

De Technische Universiteit Eindhoven heeft een profielwinkel die leerlingen hulp biedt bij het maken van een profielwerkstuk of een praktische opdracht. **Jan Essers** beantwoordt de vragen die binnenkomen over wiskunde.

Wiskundige vragen van leerlingen in de Tweede Fase

Sinds september 2000 is er op de Technische Universiteit Eindhoven (TU/e) een profielwinkel, als onderdeel van het aansluitingsproject TU/e-VO. Deze ‘winkel’ biedt leerlingen in de tweede fase hulp bij het maken van een profielwerkstuk of een praktische opdracht. Dat kan bijvoorbeeld het uitvoeren van een experiment in de laboratoria van de TU/e zijn, een gesprek met een deskundige over een bepaald onderwerp of het zoeken van informatie in de bibliotheek van de TU/e. De vraag kan schriftelijk gesteld worden, per telefoon of via een online-aanvraagformulier op de website van de winkel.

De binnenkomende vragen worden eerst beoordeeld door een medewerker van de profielwinkel en dan meestal doorgestuurd naar een contactpersoon bij een van de faculteiten. Vragen over wiskunde komen op die manier bij mij binnen.

Toen de winkel van start ging, was het nog erg rustig. Vanaf december komen er regelmatig vragen binnen. Je merkt dat de tweede fase in het onderwijs begint door te dringen. De volgende letterlijke voorbeelden geven een beeld van de vragen die binnenkomen. Alle namen heb ik uit privacy overwegingen veranderd.

Voorbeeld 1

Geachte Meneer, Mevrouw,
Mijn naam is Jolanda Hogeboom en ik zit nu in 5 vwo. Op het moment ben ik bezig met een praktische opdracht wiskunde over fractals. Bij het te maken verslag wilde ik graag een klein interview voegen met iemand met verstand van fractals. Mijn vraag is nu of er op de TU/e iemand rondloopt die enkele vragen voor mij wil beantwoorden. Hieronder heb ik een aantal vragen staan, waar ik graag antwoord op zou willen hebben. Als er iemand is die deze (via e-mail) zou willen beantwoorden, zou mij dat erg helpen.

Bij voorbaat dank, Jolanda Hogeboom
e-mail: jolandahogeboom@home.nl

1. wat is een fractal?
2. wat is chaos?
3. wat is het verschil tussen de Mandelbrot-set en de Julia-set?
4. wat is de overeenkomst tussen de Mandelbrot-set en de Julia-set?

5. wat is complexiteit?

6. wat kun je zeggen over de structuur van de Mandelbrot-set?

Zou er alstublieft ook bij vermeld kunnen worden wie de vragen heeft beantwoord (naam, leeftijd, opleiding).

Hartelijk bedankt.

Een zeer duidelijke en goed geformuleerde vraag. Ook de zes wiskundevragen zijn kort en duidelijk. Ik moest me natuurlijk eerst eens even afvragen of ik ‘verstand heb’ van fractals. Eerlijk gezegd is het antwoord daarop nee. Ik heb tien jaar geleden – toen dat onderwerp actueel was – een aantal populair wetenschappelijke boekjes (onder andere *Chaos* van James Gleick en *Fractals* van H. Lauwerier) over dat onderwerp gelezen en een beetje geëxperimenteerd met computerprogramma’s die onder andere Julia-fractals genereren. Die Julia- en Mandelbrot-fractals hebben altijd veel indruk op me gemaakt en daarom zag ik die eerste vier vragen wel zitten. Het antwoord op de vijfde vraag wist ik niet en vraag 6 is zo vaag dat je er van alles in kwijt kunt. Na een kort overleg met wat collega’s heb ik besloten om deze vraag zelf af te handelen.

Eerst maar eens even *complexiteit* op internet zoeken. Dat leverde een stuk of tien treffers op. In de eerste teksten zag ik dat het om een spelfout ging. Steeds had er *complexiteit* moeten staan. Bij mijn verdere zoektocht op internet kwam ik trouwens prachtige sites met zeer elementaire uitleg over chaos, fractals en iteratie tegen. Die adressen heb ik als eerste naar Jolanda gestuurd. De adressen zijn aan het einde van dit artikel vermeld.

Op die sites staan ook wel de antwoorden op de vragen van Jolanda. Maar omdat zij een interview wilde heb ik ook maar zelf wat antwoorden geproduceerd. Bij het beantwoorden van zo’n vraag werd me trouwens weer duidelijk hoe moeilijk het is om in beperkte tijd iets kort en duidelijk uit te leggen. Wat vindt u van mijn antwoord op de vraag: *Wat is chaos?*:

Als het gedrag en de bewegingen van een systeem – door kleine veranderingen in de beginsituatie – complex en onvoorspelbaar worden, dan noem je dat chaotisch gedrag.

Voordat je het weet gebruik je weer nieuwe termen (systeem, complex). Getallen-voorbeelden, grafieken en figuren zeggen soms zoveel meer.

Voorbeeld 2

Heeft u toevallig ook informatie over de negen-/elf en andere proeven? Zou u die mij graag zo spoedig mogelijk op willen sturen, want ik ben bezig met een examenwerkstuk en heb dat namelijk nodig. BVD. Marco Hollander; marcoh@hotmail.com

Ook dat is een duidelijke vraag. Toevallig heb ik voor de aansluitingssite wiskunde van de TU/e een praktische opdracht over dat onderwerp gemaakt (zie <http://www.win.tue.nl/~jessers/aansluiting/>). Misschien heeft Marco de opdracht daar wel vandaan. Daarom verwijst ik Marco naar die opdracht en de bijbehorende uitleg over restrekenen.

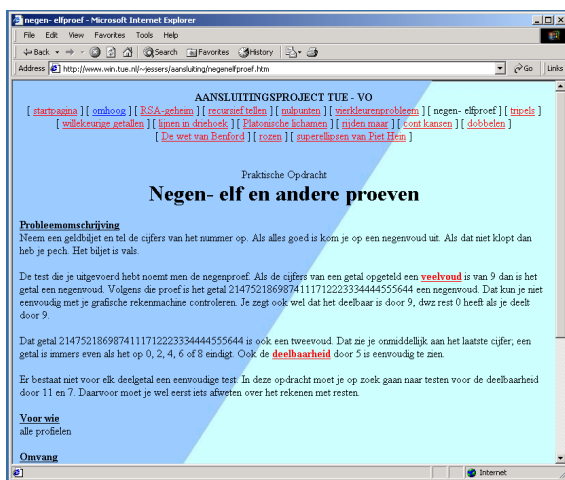


fig. 1 De opdracht 'Negen, elf en andere proeven'

Toch was Marco daar niet helemaal tevreden mee.

Voorbeeld 2 vervolg

Ik dank u voor uw reactie met links en tips van de vorige keer, maar eigenlijk was ik op zoek naar de deelbaarheids-test voor de getallen 7 en 13. De andere getallen zijn geen probleem, alleen de getallen 7 en 13 vormen enig obstakel, dus als u daar iets over heeft, dan zijn wij u zeer dankbaar. BVD Marco Hollander; marcoh@hotmail.com

Die truc is inderdaad gekunsteld en ik kan me voorstellen dat een leerling dat niet vindt. Hieronder staat mijn reactie. Natuurlijk geef ik de methode weg. Maar als Marco dit bestudeert en begrijpt en dan zelf de 13-proef oplost, ben ik reuze tevreden.

Beste Marco,
Toch gaat dat op ongeveer dezelfde wijze, alleen is het inderdaad veel moeilijker om een mooie regel te zien.

De machten van 10 modulo 7:
 $10^0 \equiv 1 \pmod{7} \equiv 1$
 $10^1 \equiv 10 \pmod{7} \equiv 3$
 $10^2 \equiv 10 \cdot 3 \pmod{7} \equiv 2$

$10^3 \equiv 10 \cdot 2 \pmod{7} \equiv 6$
 $10^4 \equiv 10 \cdot 6 \pmod{7} \equiv 4$
 $10^5 \equiv 10 \cdot 4 \pmod{7} \equiv 5$
 $10^6 \equiv 10 \cdot 5 \pmod{7} \equiv 1$

en nu herhaalt de zaak zich.

Dat ziet er inderdaad niet leuk uit: zes verschillende resten. Het wordt mooier als je met negatieve getallen werkt:

$10^0 \equiv 1 \pmod{7} \equiv 1$
 $10^1 \equiv 10 \pmod{7} \equiv 3$
 $10^2 \equiv 10 \cdot 3 \pmod{7} \equiv 2$
 $10^3 \equiv 10 \cdot 2 \pmod{7} \equiv 6 \equiv -1$
 $10^4 \equiv 10 \cdot 6 \pmod{7} \equiv 4 \equiv -3$
 $10^5 \equiv 10 \cdot 4 \pmod{7} \equiv 5 \equiv -2$
 $10^6 \equiv 10 \cdot 5 \pmod{7} \equiv 1$

En nu komt de truc te voorschijn. Een vrij willekeurig voorbeeld (let op: je rekent steeds modulo 7):

$$\begin{aligned} 234567 &= 7 + 6 \cdot 10 + 5 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^5 \\ &\equiv 7 \cdot 1 + 6 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) + 3 \cdot (-3) + 2 \cdot (-2) \\ &\equiv 7 \cdot 1 + 6 \cdot 3 + 5 \cdot 2 - (4 \cdot (1) + 3 \cdot (3) + 2 \cdot (2)) \\ &\equiv (7 + 4 + 3) - (4 + 2 + 4) = 14 - 10 \equiv 4 \end{aligned}$$

Waar komt 'de truc' op neer?

1. deel getal op in groepjes van drie (van achter gezien)
2. achterste groep +, dan groep -, enzovoort
3. binnen groep (ook van achter naar voor) zijn de factoren 1, 3 en 2 (in die volgorde!).

Probeer dat maar eens uit op een willekeurig ander getal. Neem bijvoorbeeld eens 112233445566 (antwoord: rest 4). Echt fraai is het niet. Ook bij 13 kun je waarschijnlijk zo iets bedenken en daar wens ik jou nu veel succes bij. Grootjes, Jan Essers

Niet alle vragen zijn zo concreet. Soms krijg ik 'wanhopige' vragen binnen waar ik niet veel mee kan. De leerling in het onderstaande voorbeeld heb ik naar een aantal sites verwezen waar ze wat inspiratie kan opdoen, maar bovendien heb ik haar terugverwezen naar haar begeleidende docent. Samen met hem/haar zal er toch iets concreets moeten worden afgesproken.

Voorbeeld 3

Ik moet een experiment doen voor mijn profielwerkstuk over cryptografie. Ik heb geen idee wat ik moet doen. Ik hoop dat jullie mij hiermee kunnen helpen. Michelle (vwo 6/natuur&techniek)

Over geheimschriften komen overigens meer vragen binnen. Ook over dat onderwerp is er gelukkig veel te vinden op internet. Op de aansluitingssite wiskunde van de TU/e staat bijvoorbeeld uitgelegd hoe de bekende RSA-CODE in elkaar steekt (kies 'profielwerkstukken').

Voorbeeld 4

Beste Profielwinkel,
Ik moet voor wiskunde B2 een profielwerkstuk maken over encryptie. Hierbij moet ik drie verschillende manieren van encryptie van tekst beschrijven, van makkelijk naar moeilijk. Tevens moet ik een programma maken in visual basic

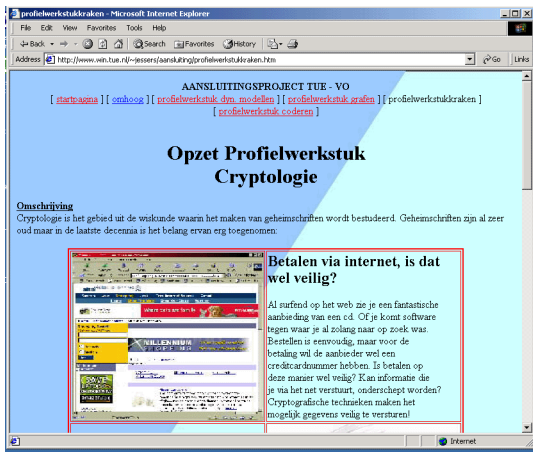


fig. 2 Beeldschermafdruk Profielwerkstuk Cryptologie

of java dat alledrie de methodes van encryptie kan uitvoeren. Uiteraard moet de tekst ook weer gedecryptet worden. Kunnen jullie mij hierbij helpen?

Met vriendelijke groet,
Toon Habets (nootstebah@hetnet.com)

Geen kleine klus. Bij het RSA-systeem komt heel wat 'zwaar' rekenwerk kijken. Kunt u zich voorstellen hoe je het gevraagde in Visual Basic programmeert? Eerlijk gezegd lijkt dat me vrij ambitieus voor 80 slu. Zelfs bij het maken van een programma voor een eenvoudig cryptosysteem (denk aan het Caesar systeem: aap wordt ccr als je twee posities opschuift) kom je al veel deelproblemen tegen: Hoe zet je letters om in cijfers? Hoe reken je modulo 26? enzovoort. En hoe doe je dat in Visual Basic? Ik heb ooit een cursus Visual Basic gehad en ik weet zeker dat er hier erg veel gevraagd wordt. Deze leerling heb ik daarom terugverwezen naar zijn docent. Zijn onderwerp moet volgens mij ingeperkt worden, want anders heeft deze leerling geen tijd meer over voor de andere vakken in zijn profiel!

Een paar weken daarna heb ik nog eens gevraagd hoe het met z'n werkstuk was.

Beste Jan,
Ik ben erg blij dat u mailt ...
Door een crash op mijn computer (dank aan MS) was ik al mijn gegevens kwijt. Gelukkig had ik nog een backup van twaalf dagen oud, maar daar stond jammer genoeg niet uw emailadres bij.

Ik ben inmiddels bezig met het ontwikkelen van een programma in MS VB6.

Tot dusver gaat dat aardig, indien ik uw hulp kan gebruiken zal ik dat gelijk melden.

Indien u geïnteresseerd bent in de programmacode kan ik u wel mijn werk tot nu toe opsturen.

Met vriendelijke groet, Toon

Tot zover deze voorbeelden. Bij de andere faculteiten komen meer vragen binnen. De meeste vragen zijn tot nu voor Natuurkunde en Scheikundige Technologie. Daar zitten ook verzoeken bij om een experiment te doen. De meeste aanvragen komen digitaal binnen in de vorm van een e-mail of via het online-aanvraagformulier op de website van de profielwinkel. De meeste vragenstellers zitten op het VWO en zijn afkomstig uit Brabant en Limburg, onze eigen regio dus.

Dit werk voor de profielwinkel is bijzonder leuk om te doen. Soms ontstaat er een hele correspondentie met een vragensteller. In andere gevallen hoor je nooit meer iets. Dat is jammer, maar dat hoort nu eenmaal bij een winkel. Voor het komend jaar ben ik overigens zeker van plan om bij leerlingen en hun docenten met iets meer nadruk na te vragen wat ze gedaan hebben met de aan hun verstrekte informatie. Als dat interessante informatie oplevert, hoort u nog van mij.

Jan Essers, aansluitingsproject VWO-WO/profielwinkel
Technische Universiteit Eindhoven

J.Essers@tue.nl

Adressen

- *Profielwinkel TU/e:*
<http://www.osc.tue.nl/profielwinkel/>
- *Aansluitingssite voor wiskunde:*
<http://www.win.tue.nl/~jessers/aansluiting/>
- *Sites over fractals:*
<http://math.rice.edu/~lanius/frac/>
<http://www.pandd.demon.nl/fractals.htm>
<http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/julia/julia.html>
<http://math.bu.edu/DYSYS/FACGEOM/FACGEOM.html>
<http://www.geocities.com/CapeCanaveral/2854/>