Wie zich openlijk in de Nieuwe Wiskrant iets afvraagt loopt de kans een mogelijk antwoord te krijgen. Dat overkomt Truus Dekker, die in het vorige nummer een ‘Even Krijten’ schreef. Als reactie geeft **Hessel Pot** deze beschouwing over het herleiden van formules.

Het herleiden van vormen

In de *Nieuwe Wiskrant* (*20*(4), juni 2001) vraagt Truus Dekker zich in de *Even Krijten*-rubriek af hoe het komt dat nogal wat leerlingen moeite hebben met de opgave:

herleid de formule

$$\frac{y^2 + 7y + 6}{y^2 + 8y + 12} \qquad (1)$$

Mijn antwoord: omdat hier een bepaald trucje (‘apenkunstje’) van de leerling verwacht wordt in een situatie waarin die leerling niet de mogelijkheid heeft om zelf te kunnen inzien in welk groter geheel deze vraag enig belang kan hebben. Het is een schoolmeesterssommetje.
De brave leerling die in de les goed heeft opgelet, en die het geluk heeft bij de toets het beoogde laatje open te trekken, zal wellicht

$$\frac{y + 1}{y + 2} \qquad (2)$$

produceren. Maar de niet-zo-brave, wat zelfstandiger denkende leerlingen hebben minder kans om de docent tevreden te stellen. Waarbij – mijns inziens – de volgende aspecten een rol spelen.

Herleiden – wat is dat?

Een gegeven *vorm* is op oneindig veel manieren te herleiden tot een andere – gelijkwaardige – vorm. Het hangt er maar vanaf welk *doel* er nagestreefd wordt.
In de sommenrijtjes van het leerboek is dat doel vaak:
ontbind in factoren / schrijf als product.
Of juist min of meer het omgekeerde:
werk de haakjes weg / schrijf zonder haakjes / ontwikkel.
Vroeger kwam als herleidingsdoel ook wel voor:
maak logaritmisch.
Vaak moet ‘herleiden’ gelezen worden als: ‘herleid tot een *zo eenvoudig mogelijke vorm*’, waarbij lang niet altijd helder is welke prioriteit aan de verschillende eenvoudscriteria gegeven moet worden.
En ten slotte is een heel gangbare betekenis van ‘herleid’:
herleid tot de standaardvorm.
Wat op hetzelfde neerkomt als:
bereken / reken uit / is / ....

De standaardvorm is niet altijd ook de eenvoudigste vorm: vergelijk 1000 met M of met 10^3, en 362880 met 9!

En bij $\frac{3,50}{2,50}$ weet ik niet wat ik als standaard heb te zien:

1,4 of 1,40 of $\frac{7}{5}$ of $1\frac{2}{5}$ of 7 : 5 of 1.4 of 7/5 of 1 2/5?

Nog lastiger is het bij irrationele getallen. Daar zijn er zó onmetelijk veel van dat er principieel helemaal geen standaardvorm voor bestáát. Die getallen zijn dus nooit te ‘berekenen’, iets wat die getallen zo mysterieus maakt.

In het geval van *open vormen* (met één of meer lettervariabelen erbij) betekent het ‘gelijkwaardig’ zijn van twee vormen dat beide voor élke keuze van de variabele(n) dezelfde waarde hebben. Ook bij het herleiden van dít soort vormen zal er een bepaald *doel* gesteld moeten zijn. En ook hier geeft het ‘zo eenvoudig mogelijk’ lang niet altijd een eenduidig resultaat: is de open cosinusvorm

$$\cos x$$

nu wél of niet eenvoudiger dan de ermee gelijkwaardige open sigmavorm

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i x^{2i}}{(2i)!}$$

Terug naar de beginopgave, het herleiden van (1). Een algemeen aanvaarde conventie over wat hier als ‘standaardvorm’ moet worden beschouwd, lijkt me niet te bestaan. Dan er maar op gokken dat de bedoeling van de vraagstelling was: ‘schrijf zo eenvoudig mogelijk’. Maar dan lijkt me vorm (2) nog niet het toppunt van eenvoud. Beperken we ons tot de van oorsprong zestiende-eeuwse (voornamelijk door Recorde en Viète gevormde) traditie, dan is de met (1) gelijkwaardige vorm

$$1 - (y + 2)^{-1} \qquad (3)$$

toch ondubbelzinnig eenvoudiger dan (2). Of niet?

In onze huidige (knoppeninstrumenten-)tijd kan het nog handig zijn om de vorm met de variabele te laten beginnen. Dat kan bijvoorbeeld door (1) te herleiden tot de kettingvorm (schakelvorm)

$$y\ \boxed{+}\boxed{2}\boxed{=}\boxed{x^{-1}}\boxed{-}\boxed{1}\boxed{=}\boxed{+/-} \qquad (4)$$

Liever algemene aanpak dan ad hoc-trucje

De coëfficiënten in opgave (1) zijn héél speciaal gekozen. Daarom ligt het weinig voor de hand dat iemand die wat snapt van algemene herleidings- en vereenvoudigingsprincipes op het idee komt om te proberen teller en noemer te ontbinden en zo op (2) uit te komen. Ik zie (1) als een soort toevalsopgave, een je-moet-'t-maar-net-zien-opgave.
Wellicht heeft het voorafgaande onderwijs voornamelijk naar dit trucje toegewerkt, en mogelijk nagelaten om aandacht te geven aan een algemene aanpak waarmee dit type vormen te vereenvoudigen zijn. Zoiets versterkt niet het vertrouwen van leerlingen in de zinnigheid van wiskunde.
De tekst in het kader hiernaast zegt iets over het algemenere geval.

Vorm ≠ formule

De in de aanhef aangehaalde opgave spreekt van een *formule* die *herleid* dient te worden. Is het echter niet zo dat in het spraakgebruik onder een 'formule' wat anders verstaan wordt dan onder een 'vorm'? Dat je 'vormen' kunt herleiden tot andere, ermee gelijkwaardige vormen, maar een formule níét tot zoiets als een 'gelijkwaardige formule'?
Bij 'formule' denk ik aan de weergave van het resultaat van een (in zeker opzicht) belangrijke herleiding: een identiteit, met gelijkwaardige vormen in linker- en rechterlid. Zoals ze voorkomen op de formulekaarten en in de formuleboeken: de merkwaardige producten en dito quotiënten en tal van andere. En niet te vergeten de beroemde *abc*-formule:

$$\{x \mid ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0\} = \left\{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right\}.$$

Het gebruik van de term 'formule' in de betekenis van 'vorm' zal her er, mijns inziens, voor de leerling die gevraagd wordt een herleiding uit te voeren, niet direct gemakkelijker op maken.

Hoe is $\dfrac{y^2 + 7y + 11}{y^2 + 8y + 12}$ te vereenvoudigen?
Het ontbindingstrucje werkt nu niet, maar met het toverwoord 'helen-uithalen' of 'kwadraatafsplitsen' valt er toch wel wat te bereiken.
Want in de (gelijkwaardige) vorm

$$1 - \cfrac{1}{y + 7 + \cfrac{5}{y + 1}}$$

en ook in de vorm

$$\frac{(y + 7/2)^2 - 5/4}{(y + 4)^2 - 4}$$

komt op maar twéé plaatsen de variabele voor in plaats van op víér plaatsen in de opgavevorm.

Kan het ook nog met de y alleen op één plaats?
Ja, in de moderne knoppennotatie kan dat inderdaad, en wel als

$$y\ \boxed{M}\boxed{+}\boxed{1}\boxed{=}\boxed{x^{-1}}\boxed{\times}\boxed{5}\boxed{+}\boxed{MR}\boxed{+}\boxed{7}\boxed{=}\boxed{x^{-1}}\boxed{+/-}\boxed{+}\boxed{1}$$

Flauw hè.

De antwoorden (2), (3) en (4) zijn fout

Het zal niet in alle omstandigheden even belangrijk zijn, maar strikt genomen zijn de vormen (2), (3) en (4) *niet* gelijkwaardig met vorm (1).
Een volledig correcte antwoordvorm ziet er eerder uit als:

$$1 - \frac{1}{y + 2} + \frac{0}{y + 6} \qquad (5)$$

of als

$$\begin{cases} 1 - (y + 2)^{-1} & , \quad y \neq -6 \\ \text{onbepaald} & , \quad y = -6 \end{cases} \qquad (6)$$

Daar aan het behandelen van deze finesse in gymnasium 3 (en elders) ook weer bezwaren zullen kleven, moet mijn eindconclusie misschien wel zijn: stel opgaven van het bedoelde type maar helemaal niet aan de orde in het voortgezet onderwijs.

Hessel Pot, Woerden