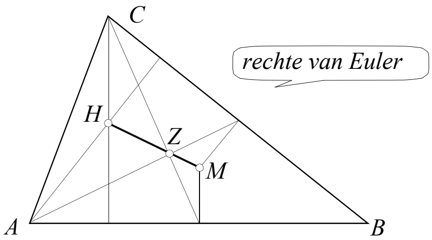
Wat te bewijzen is

Rubriek

In het in 1999 verschenen boek *Euler. The master of us all (*auteur William Dunham, uitgever The Mathematical Association of America) las ik met speciale belangstelling het hoofdstuk met de titel ‘Euler and geometry’. Euler’s naam is in de meetkunde verbonden aan de *rechte van Euler*, namelijk de lijn die het zwaartepunt (Z) van een (niet-gelijkzijdige) driehoek verbindt met het hoogtepunt (H). Het merkwaardige is dat het middelpunt van de omgeschreven cirkel (M) van de driehoek op die lijn ligt. Van dit feit, het collineair zijn van de punten H, M en Z, schijnt Euler de eerste ontdekker te zijn, let wel zo’n twee duizend jaar na Euclides.



Analytisch bewijs
Euler deed zijn vondst langs analytische weg. Hij nam hoekpunt A van de driehoek als oorsprong, legde de x-as langs AB en drukte de coördinaten van H, M en Z uit in de zijden a, b, c en de oppervlakte K van de driehoek. Na een zeer indrukwekkende rekenpartij (in het boek wel zes bladzijden!) volgt de collineariteit van de drie bijzondere punten.
Door het lezen hiervan werd ik herinnerd aan een ervaring uit het prille begin van mijn loopbaan. Ik was leraar in de examenklas van een HBS in Den Haag. Het jaar ervoor was het eerste eindexamen analytische meetkunde op de HBS afgenomen met onder meer dit vraagstuk:
Van Δ ABC met hoekpunten (-9, 0), (15, 0) en (0, 15) te berekenen de coördinaten van H, M en Z. Vervolgens te bewijzen dat de punten H, M en Z op één lijn liggen.
Toen ik ter voorbereiding van het komende eindexamen deze opgave liet maken, merkte ik bij de nabespreking natuurlijk op dat de genoemde eigenschap van H, M en Z niet slechts voor deze ene driehoek geldt, maar voor ieder willekeurig exemplaar.
Hoe je dat analytisch bewijzen kon?
Wel, in navolging van de examenopgave koos ik de x-as langs de zijde AB en de y-as langs de hoogtelijn uit C.
Zo kregen de hoekpunten de coördinaten (a, 0), (b, 0) en (0, c). Vervolgens berekende ik op het bord de coördinaten van H, M en Z, met als resultaat:

$$H\left(0,-\frac{ab}{c}\right),\ Z\left(\frac{a+b}{3},\frac{c}{3}\right),\ M\left(\frac{a+b}{2},\frac{ab+c^2}{2}\right)$$

Ten slotte toonde ik de collineariteit van dit drietal aan door de richtingscoëfficiënten van HZ en HM te vergelijken. De klas keek ademloos toe en beloonde mij met een applausje, het enige dat ik als leraar ooit heb geoogst in de les. Het verraste mij zeer en ik vroeg waarom ze hadden geklapt. Het bleek vooral te zijn voor het foutloos voltooien van een serie ingewikkelde algebraïsche berekeningen, die overigens flink eenvoudiger waren dan die van Euler. Tja, ... ik geneerde me toen al een beetje en nu ik eraan terugdenk opnieuw, want vandaag de dag kun je wat de leerlingen het klapstuk vonden gewoon door een symbolische rekenmachine laten uitvoeren. Het is trouwens wel wennen om bij inzet van computeralgebra van een ‘echt’ bewijs te spreken.

Met vectoren
Zo’n tien jaar later deed de vectormeetkunde zijn intrede op school en toen was er de gelegenheid om bij wijze van fraaie toepassing de stelling van Euler te demonstreren.
De situatie wordt aangenaam als een van de drie bijzondere punten tot oorsprong wordt gepromoveerd.
Ik neem nu voor O het hoogtepunt (per slot van rekening wordt dit ook wel orthocentrum genoemd). De plaatsvectoren van de hoekpunten noem ik $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, en $\boldsymbol{c}$ en die van zwaartepunt en middelpunt omgeschreven cirkel $\boldsymbol{z}$ en $\boldsymbol{m}$.
Er geldt (en dat is onafhankelijk van de keus van O):

$$\boldsymbol{z} = \tfrac{1}{3}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$$

Dit was in het tijdperk van de vectormeetkunde redelijk bekend, en ik licht dit hier niet verder toe.
Bij de hier gemaakte keuze van O geldt bovendien:

$$\boldsymbol{m} = \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$$

Dit laatste verklaar ik wel. M is het snijpunt van de middelloodlijnen van de driehoek ABC.
De middelloodlijn van AB heeft als steunvector $\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ en als richtingsvector $\boldsymbol{c}$ (immers OC is hoogtelijn!).
Het punt M ligt dus op de lijn:

$$\boldsymbol{x} = \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) + \lambda\boldsymbol{c}$$

maar evenzo op:

$$\boldsymbol{x} = \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) + \mu\boldsymbol{a}$$

en zo men wil ook op:

$$\boldsymbol{x} = \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}) + \nu\boldsymbol{b}$$

Dat het snijpunt van deze drie lijnen correspondeert met:

$$\lambda = \mu = \nu = \tfrac{1}{2}$$

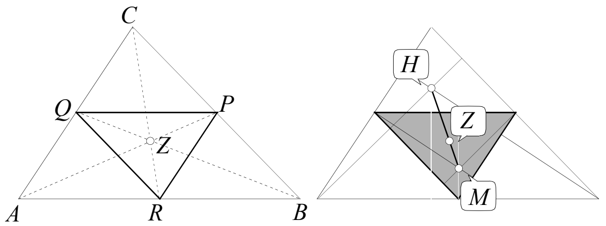
laat zich gemakkelijk raden.

Nu volgt $\boldsymbol{z} = \frac{2}{3}\boldsymbol{m}$ en dus liggen H (= O), M en Z op één lijn; bovendien weten we nu dat $|HZ| : |ZM| = 2 : 1$.

Schoonheidsprijs

Het 'vectorbewijs' is duidelijk eleganter en zeker minder mechanisch dan het eerder aangeduide 'rekenbewijs'. Achteraf gezien had ik met de keuze $H = O$ toen ook via de 'cartesische aanpak' mee kunnen dingen naar een troostprijs in de schoonheidswedstrijd, al betwijfel ik of er dan applaus gevolgd was. Het rekenwerk zou te weinig indruk hebben gemaakt. Bij zo'n slimme strategie denken leerlingen waarschijnlijk: 'dat vertelt ie aardig na'. Datzelfde geldt voor de synthetische bewijzen die ik heb mogen uitleggen. Het mooiste bewijs vind ik nog steeds dit. De driehoek van middenparallellen (PQR) is niet alleen gelijkvormig met ABC, maar ligt vanwege de evenwijdigheid van de overeenkomstige zijden centraal vermenigvuldigd ten opzichte van ABC. Het centrum van de vermenigvuldiging is het snijpunt van de verbindingslijnen van overeenkomstige hoekpunten (hier dus AP, BQ en CR) en omdat dit de zwaartelijnen zijn, is Z dit centrum. De hoogtelijnen van driehoek PQR zijn juist de middelloodlijnen van ABC, dus is M het hoogtepunt van driehoek PQR en correspondeert dus met H bij de vermenigvuldiging vanuit Z.

Conclusie: H, M en Z zijn collineair.



Eenvoudig is na te gaan dat de factor van de vermenigvuldiging van PQR naar ABC gelijk is aan -2 en zo vinden we $|HZ| : |ZM| = 2 : 1$. De enige uitzondering is de gelijkzijdige driehoek waarbij H, Z en M samenvallen.

Bewegende beelden in het Cabri-tijdperk

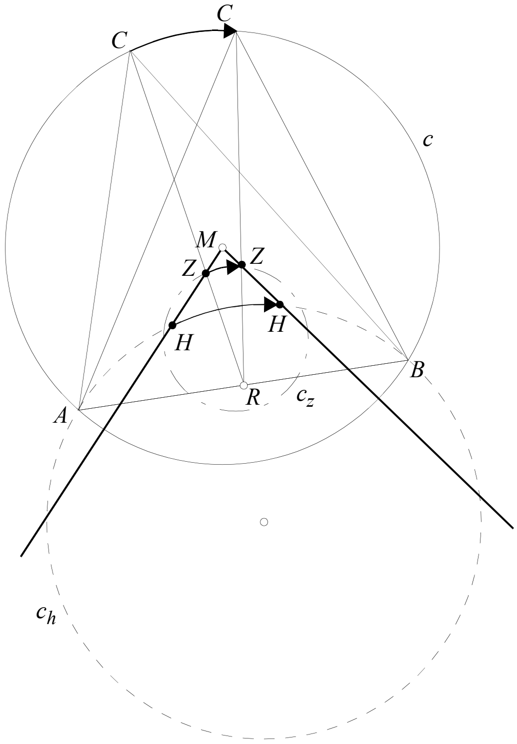
Klassieke analytische meetkunde en vectormeetkunde zijn vrijwel verdwenen uit het curriculum. Terug is een stukje synthetische meetkunde, waarbij het programma Cabri een prachtig medium is. Leerlingen kunnen daarmee naar hartelust meetkundige situaties exploreren en vervolgens hun ontdekkingen proberen te begrijpen.

Het construeren van de punten H, Z en M bij een willekeurige driehoek in Cabri is goed te doen. Wat op moet vallen is dat bij verslepen van een hoekpunt dit drietal als vogeltjes op een drooglijn blijven zitten. Voor speciale driehoeken als de rechthoekige en de gelijkbenige (niet-gelijkzijdige) is dit direct aantoonbaar. Voor meer willekeurige driehoeken zal bij het vinden van een bewijs wel wat geholpen moeten worden. Het is zeer de moeite waard om het te slepen hoekpunt (zeg C) een beetje aan banden te leggen, bijvoorbeeld door het te bewegen over de omgeschreven cirkel (c) van de startdriehoek ABC. Een voordeel is dan dat M op zijn plaats blijft en alleen Z en H bewegen. De banen van Z en H kunnen via de optie Meetkundige Plaats (of Locus) zichtbaar worden gemaakt en ... lijken verdacht veel op cirkels.

Voor Z is dat gemakkelijk te verklaren: vermenigvuldig de omgeschreven cirkel van ABC vanuit het midden R van AB met factor $\frac{1}{3}$ en je hebt de meetkundige plaats van Z te pakken (in de figuur c_z).

De meetkundige plaats van H blijkt ook een cirkel (c_h) te zijn, maar dat is wat lastiger te snappen. Het is door Aad Goddijn tot een schoolvoorbeeld gemaakt van hoe je via Cabri niet alleen meetkundige fenomenen kunt waarnemen, maar ook hoe je op het idee van bewijzen kunt komen. (Zie ook het artikel: Goddijn, A. (2000). Gegeven: cirkel met vlinder, *Nieuwe Wiskrant, 20*(2) 19-25.)

De cirkel c_h is even groot als c; men kan bijvoorbeeld bewijzen dat zij via een translatie uit c ontstaat. Via de optie Animatie kan nu een carrousel in beweging worden gebracht. C lopend over de cirkel c en Z en H in dezelfde richting en steeds met dezelfde hoeksnelheid bewegend over respectievelijk c_z en c_h.



Er zijn vier posities van C waarbij vooraf al duidelijk is dat de lijn HZ door het vaste punt M gaat, namelijk die waarbij de driehoek rechthoekig en die waarbij de driehoek gelijkbenig (met C als top) is. Het vermoeden is dat M het centrum is van een vermenigvuldiging die c_z op c_h en elke Z op de bijbehorende H afbeeldt. Dit vermoeden kan worden bewezen uit de gelijkvormigheid van de bewegingen van Z en H ten opzichte van de beweging van C. En ja hoor: in de Cabri-animatie zie je de rechte van Euler een slingerbeweging uitvoeren om het draaipunt M.

Martin Kindt, martin@fi.uu.nl