Wat te bewijzen is

Rubriek

Met drie gegeven lijnstukken, zeg ter lengte van *a, b* en *c,* kan op congruentie na precies één driehoek worden geconstrueerd. Voorwaarde is wel dat de som van elk tweetal uit het groepje van drie groter is dan de overblijvende. Dat betekent dat de oppervlakte van de driehoek een functie is van drie geconditioneerde variabelen *a, b* en *c*:

$$\text{Opp. }(ABC) = F(a, b, c)$$

Op voorhand zijn ten minste twee eigenschappen van die functie bekend:

i $F(\lambda a, \lambda b, \lambda c) = \lambda^2 F(a, b, c)$

ii $F(a, b, c) = 0$ als $a = b + c$ of $b = c + a$ of $c = a + b$

De eerste eigenschap berust op de bekende regel dat de oppervlakte van een figuur bij schaalvergroting vermenigvuldigd wordt met het kwadraat van de schaalfactor. De tweede regel komt voort uit het randgeval van de driehoeksongelijkheid.

Die twee regels slaan de hoop dat F een polynoomfunctie is, de bodem in. Immers volgens (i) zou zo'n polynoom van de tweede graad moeten zijn en volgens (ii) zou F deelbaar moeten zijn door het polynoom P met:

$$P(a, b, c) = (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$$

Dat laatste is in tegenspraak met het eerste.

Een volgend staaltje van wishful thinking is het idee dat het *kwadraat* van de oppervlakte een (homogeen) polynoom is, en dan vanzelf van de graad 4. Dus:

$$[\text{Opp. }(ABC)]^2 = L(a, b, c) \times P(a, b, c)$$

waarbij L een lineaire vorm is.

Omdat de oppervlaktefunctie bestand moet zijn tegen de permutaties van *a, b* en *c* en omdat P invariant is onder die permutaties, zal L dat ook moeten zijn en blijft slechts de mogelijkheid: $L(a, b, c) = \lambda(a + b + c)$.

De waarde van λ is te vinden door te specialiseren; daarvoor kies ik de gelijkzijdige driehoek met zijde 1. Volgens de (hypothetische) formule zou het kwadraat van die oppervlakte gelijk moeten zijn aan 3λ.

Een bekende formule, te weten: $O = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ levert $O^2 = (\frac{1}{4}\sqrt{3})^2 = \frac{3}{16}$, kortom $\lambda = \frac{1}{16}$.

Zo krijg ik de verhoopte formule:

$$O^2 = \tfrac{1}{16}(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$$

Maar waarom zou deze formule correct zijn? Een goede gewoonte is, om alvorens te gaan zoeken naar een bewijs, eerst nog wat andere gevallen te testen. Loop je tegen een contravoorbeeld aan, dan ben je meteen klaar. Gebeurt dat niet, dan stijgt het vertrouwen in de hypothese en wordt het tijd om aan een bewijs te denken.

Neem als testcase de rechthoekige driehoek met rechthoekszijden a en b. De formule zal in dat geval moeten leiden tot $O^2 = \frac{1}{4}a^2b^2$.

Omwerken van de eerder genoemde formule tot:

$$\tfrac{1}{16}[(a+b)^2 - c^2][c^2 - (a-b)^2] =$$

$$\tfrac{1}{16}[a^2 + b^2 + 2ab - c^2][c^2 - a^2 + 2ab - b^2]$$

en rekening houdend met $a^2 + b^2 = c^2$ leidt inderdaad tot de gewenste uitkomst.

Zo zouden nog meer gevallen getest kunnen worden. Een goede algebra-oefening geeft de gelijkbenige (maar niet-gelijkzijdige) driehoek. Echter de formule van Pythagoras geeft meteen een spoor naar het algemene geval.

Een generalisatie van die formule is:

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = c^2$$

en dat kan worden gecombineerd met

$$O^2 = (\tfrac{1}{2}ab\sin\gamma)^2$$

Na optelling van:

$$4a^2b^2\sin^2\gamma = 16O^2$$

$$4a^2b^2\cos^2\gamma = (a^2 + b^2 - c^2)^2$$

en overboeken van wat termen, komt er:

$$16O^2 = 4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2$$

Via drie merkwaardige producten kan dit worden herleid tot de eerder beschreven formule.

Het bewijs van Heron

Omstreeks het jaar 100 schreef Heron van Alexandrië zijn boek *Metrica*. Over de oppervlakte van een driehoek staat daarin het volgende te lezen:

Er is een algemene methode om, zonder een hoogtelijn te trekken, de oppervlakte te vinden van een driehoek waarvan drie zijden gegeven zijn. Laat de zijden bijvoorbeeld 7, 8 en 9 zijn. Tel 7, 8 en 9 op, het resultaat is 24. Neem hiervan de helft, dat geeft 12. Trek daarvan 7 af; de rest is 5. Trek ook 8 van 12 af; de rest is 4. En ook met 9; de rest is 3. Vermenigvuldig 12 met 5; het resultaat is 60. Vermenigvuldig dit met 4; het resultaat is 240. Vermenigvuldig dit met 3; het resultaat is 720. Neem de vierkantswortel uit 720 en dat zal de oppervlakte van de driehoek zijn.

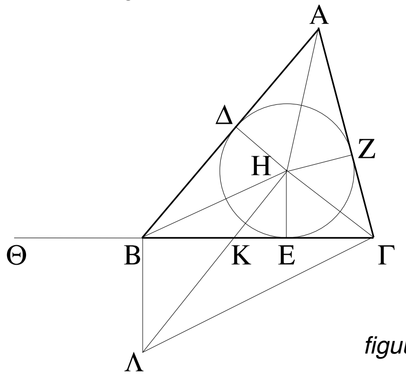
Vervolgens vertelt Heron dan hoe die (irrationale) vierkantswortel kan worden benaderd, maar dit terzijde.

Zijn algoritme (dat volgens Arabische bronnen al aan Archimedes bekend was) kan worden vertaald in de zogenaamde *s*-formule:

$$O = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

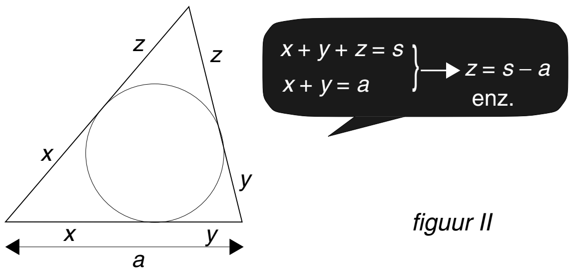
waarbij $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ en het kost weinig moeite om te constateren dat de *s*-formule gelijkwaardig is met de eerder gevonden formule voor O^2.

Heron geeft ook een meetkundig bewijs van de formule aan de hand van figuur I:



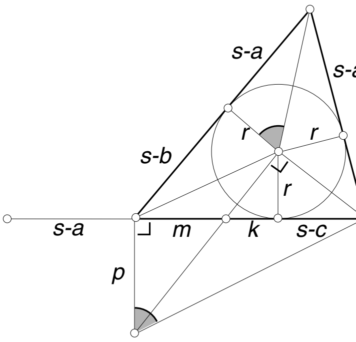
figuur I

Het betreft driehoek ΑΒΓ. Opvallend is dat Heron de ingeschreven cirkel (middelpunt H) in zijn bewijs gebruikt. De kenners van de klassieke meetkunde zullen hierover niet zo verbaasd zijn: immers de ingeschreven cirkel verdeelt de zijden van de driehoek in $s - a$, $s - b$ en $s - c$.



figuur II

In de figuur van Heron is de basis ΓΒ van de driehoek verlengd met een stuk ΒΘ zodanig dat $\Gamma\Theta = s$.
Anders gezegd: $B\Theta = A\Delta = s - a$.
Alle factoren in Heron's formule zijn dus terug te vinden in zijn figuur. Verder gebruikt hij aardig wat hulplijnen: om te beginnen de lijnen vanuit H naar de drie hoekpunten en naar de drie raakpunten. Dan is nog uit H de loodlijn op HΓ getrokken tot deze de lijn door B die loodrecht op ΒΓstaat, in Λ snijdt. In het bewijs speelt ook het snijpunt K van HΛ met ΒΓ een rol.
Heron geeft zijn tamelijk ingewikkelde bewijs netjes van voor naar achter[1], maar ik wil hier door terugredeneren zijn 'voorstudie' proberen te achterhalen. Daarbij gebruik ik de hedendaagse algebranotaties, die destijds nog niet in zwang waren. Ter verduidelijking versier ik zijn figuur met de variabelen die een rol spelen in het bewijs. De lezer kan nu de figuren I en III combineren.



figuur III

Via de som van de oppervlakten van de driehoeken ABH, ΒΓΗ en ΓΑΗ wordt duidelijk dat geldt: $O = rs$.
Heron wilde daarom aantonen:

$$rs = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

ofwel:

$$\frac{r^2}{(s-b)(s-c)} = \frac{s-a}{s}$$

Om die eerste breuk te vereenvoudigen kan een verband tussen r en $s - c$ helpen. Heron haalt zo'n verband uit het rechthoekige driehoekje ΚΓΗ. Daarin geldt (figuur III):

$$r^2 = k \cdot (s-c)$$

Vul in en er blijft te bewijzen:

$$\frac{k}{s-b} = \frac{s-a}{s}$$

Griekse wiskundigen waren gewend om te 'spelen' met evenredigheden. Zo is deze gelijkheid equivalent met:

$$\frac{k}{s-b-k} = \frac{s-a}{a}$$

Een kwestie van de tellers aftrekken van de noemers.
De vorm $s - b - k$ is in figuur III terug te vinden als m.
Uit de gelijkvormigheid van de driehoeken HKE en ΛΚΒ volgt $k : m = KE : BK = HE : \Lambda B = r : p$.

Nu blijft te bewijzen: $\frac{r}{p} = \frac{s-a}{a}$ of ook $\frac{a}{p} = \frac{s-a}{r}$

en dat betekent (zie figuren I en III) dat $\angle B\Lambda\Gamma = \angle \Delta HA$.
Nu is die laatste hoek gelijk aan $90° - \frac{1}{2}\alpha$.
Blijft te bewijzen $\angle B\Lambda\Gamma = 90° - \frac{1}{2}\alpha$.
Nu komt de crux: vanwege de rechte hoeken, aangeduid in figuur III, is ΛΓΗΒ een koordenvierhoek!
Daaruit volgt: $\angle B\Lambda\Gamma = 180° - \angle BH\Gamma$ ... (*)
Kijk naar driehoek ΒΓΗ. De hoeken aan de basis zijn $\frac{1}{2}\beta$ en $\frac{1}{2}\gamma$, dus $\angle BH\Gamma = 180° - (\frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\gamma)$.
Ingevuld in (*) geeft dat $\angle B\Lambda\Gamma = \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\gamma = 90° - \frac{1}{2}\alpha$ en dat was precies wat nog te bewijzen bleef.
Het bewijs van Heron is wat je 'rijk' kunt noemen. Er komt van alles bij kijken en de rol van de koordenvierhoek is ronduit verrassend. Het rekenwerk bestaat vooral uit het manipuleren van verhoudingen. Het lijnstuk ΒΘ speelt voor ons geen rol van betekenis; het dient alleen om de halve omtrek s te kunnen representeren als ΓΘ.

Isoperimetrisch probleem

Is de s-formule ergens goed voor? Zij is praktisch in onbruik geraakt, maar één toepassing wil ik toch geven. Een optimaliseringsprobleem: *bij een gegeven omtrek de driehoek te vinden met de maximale oppervlakte.*
Intuïtief verwacht je de gelijkzijdige driehoek als oplossing. Inderdaad: bij constante s is de som van drie termen $(s - a) + (s - b) + (s - c)$ eveneens constant ($3s - 2s = s$) en dus is het product $(s - a)(s - b)(s - c)$ maximaal indien $(s - a) = (s - b) = (s - c)$ ofwel $a = b = c$.

Martin Kindt, martin@fi.uu.nl

[1] Zie voor de originele tekst (Grieks en Engels) *Greek Mathematical Works II* uit 'Loeb Classical Library'.