Boekbespreking

Titel: *Reinvention of early algebra.* Diss. Universiteit Utrecht
Auteur: B.A. van Amerom
Uitgever: Utrecht: CD β-Press, 2002
ISBN 90 73346 48 7
Prijs: e 18,-

De Italiaanse vis
De kop van een vis weegt 1/3 van de hele vis, de staart weegt 1/4 en het lijf weegt 300 gram. Hoeveel weegt de hele vis?
Met dit probleem (en soortgelijke) van de Italiaanse wiskunde Philipo Calandri uit 1491 onderzocht Barbara van Amerom (als aio werkzaam bij het Freudenthal Instituut) het vermogen van leerlingen in groep acht van de basisschool en de brugklas van het voortgezet onderwijs om zelfstandig tot algebraïsche oplossingsmethoden te komen.

Opdracht aan de lezer:
Probeer het probleem met eenvoudige 'basisschoolmiddelen' en gezond verstand op te lossen voordat u verder leest.

Mijn elementaire oplossing zag er als volgt uit (als snelle krabbel in de kantlijn geschreven):

1/3 + 1/4 = 7/12
5/12 = 300
1/12 = 60
12 × 60 = 720

Wiskundig gezien staat er natuurlijk onzin. Maar de algebraïsche redenering is volstrekt duidelijk.

In een historische aanpak kiest Luca Pacioli (1445-1514) een geschikte beginwaarde voor het gewicht van de hele vis, rekent de gevolgen van die keuze door en past het gewicht aan tot het juiste gewicht is gevonden.

Opdracht aan de lezer:
Welk begingewicht kiest u? Reken door met deze keuze en herzie uw eerste keuze totdat u het juiste gewicht hebt gevonden.

Weer als krabbel in de kantlijn schreef ik:

Gewicht is	600
kop is	200
staart is	150
	300
	650 dat is 50 teveel

Ik kom te hoog uit en dat suggereert dat ik een nog kleiner gewicht had moeten kiezen. Daar zit iets raars in. Uit de voorgaande berekening wist ik al dat 600 een te kleine keuze is. Dit loopt dus vast.

Pacioli geeft een andere aanpak. De kop en staart zijn samen 350 gram. Dan blijft er 250 gram voor het lijf over om op de gekozen 600 uit te komen. Nu vergroot je die 250 tot 300 (alles delen door 5 en keer 6):

kop: 200 : 5 × 6 = 240
staart: 150 : 5 × 6 = 180

Samen met de 300 gram van het lijf komen we zo op een totaalgewicht van 720.

Wat toont dit nu aan?
In de eerste berekening zien we dat de formele notatie achterblijft bij de algebraïsche gedachte. Het is volstrekt duidelijk wat er staat, maar de notatie klopt niet.
In de tweede oplossing verzeilen we in een tegenintuïtieve redenering die het verdere oplossingsproces blokkeert. In het onderzoek komen juist deze soort van problemen aan het licht.

Volgen leerprocessen een historische route?
Barbara van Amerom schrijft in haar samenvatting:

> De keuze om geschiedenis van de wiskunde in te zetten als didactisch gereedschap veronderstelt dat het gebruik van geschiedenis een positieve uitwerking heeft op het onderwijs. De geschiedenis plaatst de leerstof in een breder perspectief. Leerlingen kunnen ontdekken dat wiskunde door toedoen van de mens verandert en groeit, en dat zij zelf dus ook een bijdrage (kunnen) leveren.

Dit argument is een zinsgevings-argument. Het geeft een betekenis aan algebra en maakt het zo toegankelijker voor leerlingen. Een dergelijke opzet past in de uitgangspunten van het realistisch reken-wiskundeonderwijs.
Daarnaast zijn er ook onderwijskundige motieven om te kijken naar de historische ontwikkeling van de algebra. In onderwijskundige kringen is het een bekende gedachte dat de problemen die leerlingen tegenkomen bij het leren van nieuwe begrippen en vaardigheden in een aantal gevallen te herkennen zijn als historische problemen die in de loop van de geschiedenis hun oplossing hebben gevonden. Vanuit deze gedachte ging Barbara van Amerom op zoek naar de historische hobbels in de ontwikkeling van de algebra om van daaruit een leergang te ontwikkelen die de overgang van het rekenen naar de algebra kan verbeteren.
Kijkend naar de geschiedenis zijn er drie fasen te onderscheiden in de ontwikkeling van algebraïsche notaties:

– retorische algebra (beschrijvingen in natuurlijke taal)

– gesyncopeerde algebra (beschrijvingen vermengd met afkortingen en wiskundige symbolen)
– symbolische algebra (de moderne algebraïsche symbolentaal).

De retorische notaties ontwikkelden zich rond 2000 v. chr., de gesyncopeerde rond 250 n. chr. en de symbolische rond 1600. In deze geschiedenis ontwikkelt het rekenen zich tot geavanceerd rekenen in symbolentaal.

Aan het begin beginnen

De huidige discussie rond het algebraonderwijs spitst zich vooral toe op de overgang van klas 3 naar klas 4 in HAVO en VWO. Aanleiding tot deze discussie zijn de problemen van leerlingen met het formele rekenwerk dat ze in klas 4 tegenkomen. Dat heeft zowel te maken met het beheersen van algebraïsche vaardigheden als met algebraïsch inzicht.

De keuze van Barbara van Amerom om te kijken naar de bovenbouw van de basisschool en de brugklas is in dit opzicht zonder meer uiterst waardevol en is een gevolg van de (historische) opvatting dat de aanvankelijke algebra geënt is op het 'geavanceerde' rekenen. Het probleem van de Italiaanse vis is daarvan een fraai voorbeeld.

Een experimentele lessenreeks

Bij het ontwerpen van de experimentele lessenreeks zijn enkele belangrijke elementen uit de historische ontwikkeling van de algebra gebruikt:

– het oplossen van woordproblemen
– activiteiten rond 'geavanceerd' rekenen aansluitend bij de informele oplossingsstrategieën
– ruilhandel als natuurlijke en realistische context voor het vergelijken van hoeveelheden
– historische methodes en vraagstukken om de reflectie op de verschillende oplossingsmethoden te prikkelen.

De lessenreeks bestaat uit een viertal pakketjes die op basis van pilotervaringen in de klas zijn ontwikkeld. Deze pakketjes zijn op vier basisscholen en twee scholen van voortgezet onderwijs uitgeprobeerd.

De resultaten

De resultaten van de leerlingen zijn zorgvuldig geanalyseerd aan de hand van de volgende twee hypothesen:

1. Leerlingen zijn in staat om via pre-algebraïsche activiteiten de kloof tussen rekenen en algebra te overbruggen.
2. De geschiedenis van de wiskunde heeft een positieve uitwerking op het leren en doceren van aanvankelijke algebra, niet alleen vanwege de bredere kijk die het leerlingen geeft op de lesstof, maar ook vanwege het intermediërende (pre-algebraïsche) karakter en de meta-cognitieve toepassing van de geselecteerde historische methodes en vraagstukken.

Bij de uitdrukking 'pre-algebraïsche activiteiten' kan men denken aan opgaven van het type De Italiaanse vis, en ook aan opgaven in context, waarin bijvoorbeeld twee onbekenden een rol spelen. Deze opgaven zijn zowel door redeneren als door het kiezen van een eigen informele schrijfwijze op te lossen.

Hypothese 1 wordt niet zonder meer bevestigd door het onderzoek. Pre-algebraïsche bekwaamheden blijken niet zonder meer tot verdere formalisering te leiden. Soms grijpen leerlingen bewust terug naar een informele aanpak. Dat is vooral het geval als deze even effectief is als de formele methode. Ook geldt dat leerlingen die het niet lukt om met redeneren het rekenniveau te ontstijgen, vaker blijven hangen op een lager niveau van noteren. Daarbij lijkt het alsof het algebraïsch redeneren en het algebraesch symboliseren zich manifesteren als twee onafhankelijke vaardigheden.

Hypothese 2 wordt eveneens niet zonder meer bevestigd. Wel blijkt de integratie van algebra en geschiedenis van de wiskunde in de brugklas meer effect te hebben dan in de basisschool. Sommige opdrachten leiden in de brugklas spontaan tot pre-algebraïsche strategieën. Maar wellicht is dit effect te wijten aan de grotere betrokkenheid van de docent.

Naast deze 'officiële' resultaten van het onderzoek valt er tussen de regels door nog veel meer belangwekkends te ontdekken. Bijvoorbeeld dat leerlingen op de toets terugvallen naar een lager niveau van oplossen dan ze eerder in de klas hadden bereikt. En dat een vloeiende overgang van rekenen naar algebra wordt gehinderd door verschillen tussen rekenkundige en algebraïsche oplossings-strategieën.

Discussie

Dat algebraïsch redeneren en symboliseren twee verschillende vaardigheden zijn weten we natuurlijk al enkele eeuwen. Alleen komt die wetenschap voort uit de ervaring met leerlingen waarbij het letterrekenen vooraf ging aan het algebraïsch redeneren. De verdienste van het onderzoek van Barbara van Amerom is dat ze aan de kant van het algebraïsch redeneren is begonnen. Maar ook haar resultaten geven aan dat er meer moet gebeuren om tot een geïntegreerde samenhang tussen redeneren en symboliseren te komen.

Hoeksteen van het realistisch wiskundeonderwijs is het aanbieden van realistische betekenisvolle contexten waarbinnen de leerlingen hun eigen cognitieve wiskundige noties kunnen construeren. De voor leerlingen vertrouwde realistische rekenomgevingen zouden in die opvatting een constructieve opstap naar de algebra kunnen zijn. Daar zit echter de algebra zichzelf in de weg, met name de eigenzinnige wijze waarop de algebra genoteerd wordt. Die notatie zit vol historisch gegroeide afspraken zonder enige logica. Het blijft een open vraag of er wel een koninklijke realistische weg bestaat naar de formele algebra. Hoe dan ook, Barbara van Amerom zette een wegwijzer in de juiste richting. Proficiat Barbara.

Sieb Kemme