

Onlangs hebben veel leerlingen zich gebogen over het jeep-probleem tijdens de Wiskunde B-dag. **Aad Goddijn** en **Danny Dullens** gaan nog een stap verder. Niet alleen op zoek naar de zuinigste rit, maar ook naar het bewijs van de zuinigste rit.

Op zoek naar de zuinigste rit

De jeep van de Wiskunde-B dag

Stel je voor:

Je staat met een jeep aan de rand van de woestijn. In de hele woestijn is geen tankstation aanwezig. Op je eindbestemming is weer voldoende benzine voorhanden. Je zult dus alles wat je onderweg nodig hebt vanuit het beginpunt moeten transporteren.

Wat te doen? Kun je er toch doorkomen?

De opdrachten voor de deelnemers van de Wiskunde B-dag 2001 zijn te raden:

- laat zien dat het kan, hoe groot de woestijn ook is, door op strategisch gekozen punten depots in te richten
- probeer het zo zuinig mogelijk te doen
- vertel duidelijk hoe jouw plan werkt, en bewijs zoveel mogelijk.

Wie de jeep-vraag al direct als een wiskundig probleem heeft gelezen neemt snel aan: het verbruik is constant, ongeacht de lading of de weg, de jeep gaat niet stuk, enzovoort. Voor de zekerheid nog twee aannames over tank en depots die expliciet bij de opgave vermeld stonden:

- De jeep heeft één tank. De benzine in de tank wordt verbruikt tijdens het rijden en wordt ook gebruikt voor het vullen van de depots.
- Er kunnen langs de weg op elke plek depots aangelegd worden. Hoe dat gebeurt, wordt buiten beschouwing gelaten.

In de vorige *Nieuwe Wiskrant* stond een verslag van de Wiskunde B-dag [2], deze keer gaan we in op de wiskunde van het probleem. We kunnen daarvoor beginnen bij de oplossing die heel wat leerlingen vonden.

In de opgave werd een en ander gespecificeerd: de jeep heeft een tank van 100 liter, rijdt 1 op 10, en de woestijn is 3000 km groot. De volledige opgave is te vinden op de website van de wiskunde B-dag, zie [3].

De leerlingen deden het ongeveer zo:

Bedenk het van achteren af. Zorg dat er een depot is 1000 km voor de finish, waar 100 liter moet zijn als je vandaar naar de finish rijdt.

Die 100 liter moet gebracht worden vanuit het voorlaatste depot. Je rijdt daartoe tussen die twee depots heen-terug-heen.

Je moet dus in dat voorlaatste depot hebben: 100 liter plus brandstof voor drie keer de afstand tussen de depots. Die afstand kies je maximaal, dus $\frac{1000}{3}$ km en dan moet het voorlaatste depot 200 liter bevatten.

Dan bepaal je het depot dáárvoor, dat gaat 300 liter bevatten en daarnaartoe wordt heen-terug-heen-terug-heen gereden. De afstand tussen voor-voorlaatste en voorlaatste depot is dus $\frac{1000}{5}$ km.

We zien nu al dat de reeks $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots$ een rol gaat spelen in het probleem.

Je gaat kijken hoeveel termen van die reeks je nodig hebt. Laat N het grootste getal zijn waarvoor

$$S(N) = 1000(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2N-1})$$

kleiner of gelijk aan 3000 is. Dat geeft $N = 56$. Het eerste depot komt op $3000 - S(56)$ kilometer vanaf het startpunt en moet 56 keer 100 liter groot zijn. Vanaf het startpunt rijden we daar 57 keer heen om dat depot te vullen. Die afstand wordt dus $2 \times 57 - 1$ keer gereden. In totaal is dan $3000 + (2 \times 57 - 1) \times (3000 - S(56)) = 5662.85$ liter nodig bij het startpunt.

Aldus veel oplossters, die heel wat redeneer- en rekenwerk hebben verricht, die ervan overtuigd waren dat dit de beste manier is, maar daar geen onaanvechtbaar bewijs voor leverden, hoewel de winnaars wel tot essentiële stappen in die richting kwamen.

Bewijzen!

Het plan lijkt redelijk als we vanaf de finish redeneren, maar is ronduit krankzinnig als we bij de start gaan kijken. Je gaat toch niet voor die 3000 km al na 5,56 kilometer een depot inrichten dat praktisch even groot is als je startvoorraad! Dat is namelijk waar het plan toe leidt.

Anders gezegd: we hebben grote behoefte aan een bewijs waarin aangetoond wordt dat alle andere plannen inderdaad méér benzine aan de start vereisen.

Het vinden van een echt sluitend bewijs viel niet mee,

ook niet voor de leden van de commissie die de Wiskunde B-dag voorbereide. De ‘oplossing’ die boven gegeven is, werd wel voorzien en algemeen werd geloofd dat het inderdaad de topstrategie was, maar de onderbouwing eronder werd keer op keer lek geschoten. Niet fataal, en na dichten van lekken en herordenen van wat gevonden was ontstond een sluitend verhaal. In wat strenger formele vorm staat het in [1]. In dit artikel is het bewijs, vooral wat het eerste deel betreft, minder formeel genoteerd, maar de harde kern van de redenering is er volledig in te vinden.

Het bewijs laat zien dat welk-rijplan-dan-ook-dat-tot-de-finish-leidt in een aantal stappen kan worden ‘verbeterd’, waarbij we uiteindelijk bij bovenstaande strategie uitkomen. ‘Verbeteren’ wil zeggen: een rijplan vinden dat met evenveel of minder benzine het doel bereikt. Dan is aangetoond dat de aangegeven strategie inderdaad de zuinigste is.

Er zijn drie fasen. In de eerste fase sluiten we eigenlijk alleen heel domme dingen uit, zoals benzine in een depot onderweg achterlaten en nooit meer gebruiken. Aan het eind van de eerste fase zitten met een rijplan dat eigenschappen heeft die we als het ware intuïtief wel wilden aannemen, maar die nu bewezen noodzakelijk zijn.

In de tweede fase beschrijven we een bij zo’n plan horende speciale functie en eindigen met een rijplan waarbij die functie nog een extra eigenschap heeft.

In de derde fase komt de kern van de redenering en de berekening terug die de finalisten in principe gebruikt hebben, maar die we nu strak en algemeen opzetten. Daarna maken we van het bewijs een sluitend geheel.

Elke fase vroeg om een aparte wiskundige techniek. Dat maakt het verhaal ook wel afwisselend.

Tot slot gaan we in op de verderliggende vraag: Hoe kun je overzicht krijgen op de samenhang tussen af te leggen afstand en benodigde startvoorraad?

Schaal

We rekenen nu verder niet in liters en kilometers, maar in de eenheden ‘tankinhoud’ en ‘bereik bij volle tank’. In de opgave was dat 100 liter en 1000 kilometer. Deze schaalverandering helpt ons aan een notatie zonder nodeloze nullen. Aan het eind schaal je afstanden en inhouden naar behoefte weer terug. De te overbruggen afstand noemen we voortaan L , want we willen ons van meet af aan niet beperken tot een bijzonder geval.

De algemene rit geatomiseerd

Een totale rit van de jeep die het doel bereikt, begint in het Startpunt S en gaat via een eindig aantal tussenstations, die meerdere keren kunnen worden aangedaan, uiteindelijk naar de Finish F (zie figuur 1). In de tussenstations (depots, D) kan benzine worden uitgeladen of ingeladen. Verder moet alles ‘kloppen’; in te laden benzine moet er op het juiste moment zijn en de inhoud van de tank is altijd groter of gelijk nul en kleiner of gelijk de bedoelde in-

houd van de tank. Bij het startdepot S is altijd benzine aanwezig.

In de figuur zijn de depots genummerd van Finish naar Start; dat blijkt later handig te zijn, nu doet het er niet toe.

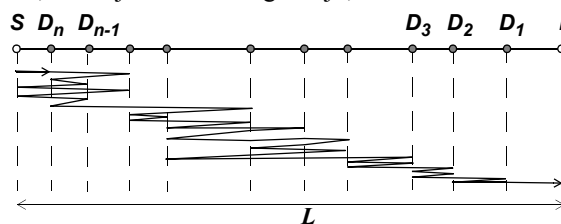


fig. 1

Het is in verband met de straks volgende redeneringen handig je de rit voor te stellen als verdeeld in een serie van ‘atomaire’ ritten. Een atomaire rit gaat van depot naar naburig depot (in een van de twee richtingen); bij het begin van een atomaire rit wordt benzine ingeladen, bij het eind van de atomaire rit wordt alles uit de tank in het depot gedaan. Zo’n opgedeelde rit is omslachtiger, maar volkomen gelijkwaardig met de oorspronkelijke rit, als we maar bij het begin van elke atomaire rit precies inladen wat er in de tank hoort te zitten volgens het oorspronkelijk ritplan.

Denk nu eens vanuit de benzine. Als deelnemende druppel maak je een rit door de woestijn, je wordt mogelijk herhaaldelijk in- en uitgeladen en uiteindelijk wordt je ofwel ergens tussen twee depots verbrand, of je blijft in een depot achter, mogelijk bij start of finish. Deel nu de benzinevoorraad in pakketjes in; de benzine in één pakketje maakt exact dezelfde geschiedenis mee.

Er zijn eindig veel verschillende pakketjes. Een pakketje gaat mee met een stel atomaire ritten, maar meestal niet met alle.

Bewijsfase 1: domme dingen uitsluiten

Nu kunnen we het geatomiseerde rijplan gaan aanpassen. Pakketjes die uiteindelijk in een depot belanden, nemen we in het verbeterde plan vanaf de start al niet mee. Dat verlicht de lading van de bij zulke pakketjes betrokken atomaire ritten. Dit heeft direct een verlagend effect op de noodzakelijke startvoorraad. Na deze vereenvoudiging weten we ook: alle pakketjes gaan uiteindelijk tussen twee depots de uitlaat uit.

Er is nog iets dat we nu makkelijk kunnen uitsluiten: het heen en weer rijden van benzinepakketjes. Elk pakketje begint bij de start, gaat mee op een serie atomaire ritten en wordt uiteindelijk verbrand in een atomaire rit die bij een bepaald depot begint. Uit die serie ritten kan altijd een selectie gemaakt worden die het pakketje linea recta naar het laatste depot van het pakketje brengt. Op de atomaire ritten die bij de omwegen horen nemen we het gewoon weer niet mee.

Het voordeel van deze vereenvoudigingen is dat we de atomaire ritten nu in een overzichtelijke volgorde kunnen uitvoeren: eerst alle heen- en terugritjes in de etappe die

bij S begint, daarna pas de ritten van de volgende etappe, enzovoort. Als er van een depot af teruggedren moet worden richting start, kan dat namelijk altijd meteen gebeuren, er komt in het depot immers nooit meer benzine van de finishkant af.

Onze opgeknapte rit, die met een kleinere of gelijke startvoorraad kan worden uitgevoerd dan de oorspronkelijke rit, ziet er nu uit als bijvoorbeeld die in figuur 2.

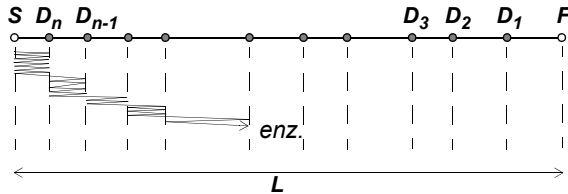


fig. 2

Dit zijn de relevante eigenschappen:

- de etappes worden stuk voor stuk volledig afgehandeld
- er wordt alleen benzine uitgeladen als de jeep vanuit de startrichting naar een depot komt
- alle meegenomen benzine wordt verstoekt.

De jeep rijdt het stuk tussen twee naburige depots altijd een oneven aantal keren, zeg $2k + 1$ keer; $k + 1$ keer in de finishrichting, k keer in de startrichting. Bij zo'n etappe-overbrugging wordt dus k keer benzine ingeladen en is de afgelegde weg op die etappe $(2k + 1)$ keer de afstand tussen de depots; omdat we als het ware 1 op 1 rijden, is dat bedrag ook juist de maat voor de gebruikte benzine.

De verbrandingsfunctie onderzocht

Bij een gegeven ritplan met zojuist genoemde eigenschappen definiëren we nu de verbrandingsfunctie f . Leg daartoe de x -as langs de route, met $x = 0$ bij het Startpunt en $x = L$ bij de Finish. We definiëren nu:

$f(x)$ = de hoeveelheid benzine die bij de gegeven rit op het traject tussen x en L verbrand wordt.

Toegegeven: in deze definitie lopen contexttaal en wiskundetaal dwars door elkaar heen en voor een echte formalist is dat een doorn in het oog. In dit soort puzzelachtige problemen is het echter vrij gebruikelijk dat met het oog op de leesbaarheid toch zo te doen. Zie de literatuur over verwante problemen: [4], [5], [6].

Onmiddellijk is in te zien:

- $f(L)$ is 0; $f(0)$ is de totale hoeveelheid benzine die bij de start nodig is
- f is strikt monotoon dalend op $(0, L)$
- in de depotpunten geeft de waarde van f juist de inhoud van het depot aan op het moment dat het depot zover mogelijk gevuld is, dat wil zeggen op het moment dat de jeep vanaf dat depot voor het eerst richting finish vertrekt
- als punt x op een traject ligt dat de jeep $2k + 1$ keer aflegt, dan is f in x differentieerbaar en er geldt

$$f'(x) = -(2k + 1)$$

- in de depotpunten is f in het algemeen niet differentieerbaar
- zie figuur 3, daar is de schaal op de verticale as niet gelijk aan die op de horizontale as.

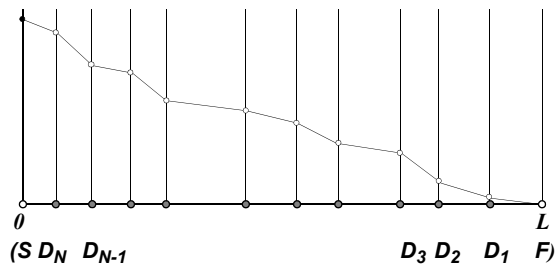


fig. 3

Het is niet zo dat bij elke functie f die aan de gegeven beschrijving voldoet een rijplan te vinden is dat werkt; dat is geen storende factor voor ons bewijs, omdat we steeds met een 'werkend' rijplan bezig zijn. Maar het is ook niet zo dat als f een verbrandingsfunctie bij een uitvoerbaar rijplan is, dat rijplan dan ook uniek door f bepaald is.

De precieze uitvoering van een etappe laat namelijk nog wat speling toe. We moeten voor het vervolg ook eenvoudig kunnen vaststellen of een stukje grafiek inderdaad een rijdbare etappe voorstelt.

Daartoe nemen we nu één etappe onder de loep, lopend van depotpunt A naar depotpunt B ; de constante helling van de grafiek van f op dit traject zij $-(2k + 1)$. De afstand AB is d , $f(A) = a$ en $f(B) = b$.

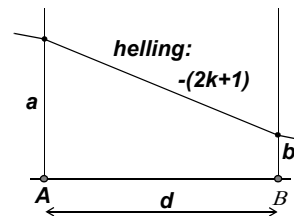


fig. 4

De jeep legt het traject AB juist $2k + 1$ keer af; het verschil $a - b$ is dus de verreden benzine:

$$a - b = (2k + 1) \cdot d.$$

De jeep rijdt eerst k keer de route $A \rightarrow B \rightarrow A$ en één laatste keer de route $A \rightarrow B$.

Bij die eerste k keer worden hoeveelheden benzine getankt, zeg t_i , $0 < t_i \leq d$, $i = 1, \dots, k$. Er moet ook gelden:

$$t_1 + t_2 + \dots + t_k \geq 2k \cdot d$$

want de afstand AB wordt $2k$ keer afgelegd. We kunnen voor het gemak net zo goed alle t_i gelijk nemen aan hun rekenkundig gemiddelde, t . Bij B wordt dan steeds $t - 2d$ in het depot gedaan en er geldt $2d \leq t \leq 1$.

De laatste rit gaat alleen heen. Het restant r wordt in A opgehaald, en er wordt één keer naar B gereden. Nu moet dus $d \leq t \leq 1$ gelden. Bij B wordt deze keer $r - d$ geloosd. Depot A wordt leeg gereden, dus geldt ook nog $k \cdot t + r = a$.

Als $a = k + 1$, zijn t en r gelijk beide aan 1, in andere gevallen is er wat speling voor t en r .

Nu weten we wanneer een etappe als die in figuur 4 realiseerbaar is: juist dan als er getallen t en r bestaan met:

$$2d \leq t \leq 1, d \leq r \leq 1, k \cdot t + r = a.$$

Dat is een helder criterium, dat we direct gaan gebruiken in de volgende bewijsstap.

Bewijsfase 2: hellingen ordenen

We gaan nu aantonen dat zulke situaties als bij D_3 in figuur 3, waar een kleinere k -waarde door een grotere wordt gevolgd, zonder ‘schade’ vermeden kunnen worden. Met andere woorden: als f niet convex is, is het rijplan te vervangen door een rijplan waar de bijhorende verbrandingsfunctie wel convex is.

Beschouw de situatie van figuur 5 waarin de depots A , B en C zijn. De bijhorende grafiek is de doorgetrokken lijn. We gaan aantonen dat de aangegeven gestippelde lijn met het nieuwe depot B' , ook uitvoerbaar is. De gestippelde en de getrokken grafiek vormen samen een parallelogram.

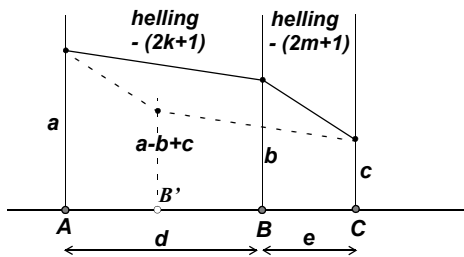


fig. 5

We onderzoeken of de in de figuur gesuggereerde etappe $B'C$ realiseerbaar is.

De afstand $B'C$ is d , de hoogte boven B' is $a - b + c$ en de helling is $-(2k + 1)$. We weten ook dat $a \leq k + 1$.

Om aan het gevonden criterium te voldoen moeten we dan getallen t en r vinden met:

$$2d \leq t \leq 1, d \leq r \leq 1, k \cdot t + r = a - b + c.$$

Vul nu eerst de ondergrenzen voor t en r in $k \cdot t + r$ in en dan de bovengrenzen; we vinden $(2k + 1) \cdot d = a - b$ en $k + 1$. De waarde $a - b + c$ ligt daar tussenin want:

$$a - b \leq a - b + c \leq a \leq k + 1$$

en als we eerst t van $2d$ naar 1 laten lopen en vervolgens r van d naar 1, dan moet de meelopende waarde van $k \cdot t + r$ op zeker moment gelijk aan $a - b + c$ zijn. Op dat moment zijn geschikte t en r gevonden.

De realiseerbaarheid van etappe AB' leiden we net zo af. $AB' = e$, de helling is $-(2m + 1)$ en hoogte bij A is a .

Volgens het criterium moeten er getallen u en s gevonden worden met:

$$2e \leq u \leq 1, e \leq s \leq 1, m \cdot u + s = a.$$

De onder- en bovenwaarde van $m \cdot u + s$ zijn nu

$(2m + 1) \cdot e = b - c$ en $m + 1$. Nu ligt a tussen $b - c$ en $m + 1$ in, er geldt immers $a \leq k + 1 < m + 1$. Op dezelfde manier als zo-even vinden we dus geschikte getallen u en s .

We hebben nu laten zien dat we in de situatie van figuur 5 de hellingen kunnen verwisselen. Door eindig veel van zulke verwisselingen uit te voeren eindigen we deze fase met een verbrandingsfunctie waarvan de hellingen van de opeenvolgende stukken nooit stijgen.

Een kleinere startvoorraad levert het niet op, maar met deze wat nettere functies kunnen we in de volgende optimaliseringsstap wel weer verder.

Het kan zijn dat er na het sorteerproces etappes op elkaar volgen met dezelfde helling of k -waarde. Die zijn niet altijd tot één etappe te verenigen, de lezer zoekt zelf maar een tegenvoorbeeld daarbij. Voor de rest van het bewijs levert dit geen probleem, daar werken we verder met de nu convexe stuksgewijs lineaire verbrandingsfunctie.

Bewijsfase 3: optimum bij volle tanks

In figuur 6 is uitgebeeld hoe de grafiek van zo'n verbrandingsfunctie eruitziet.

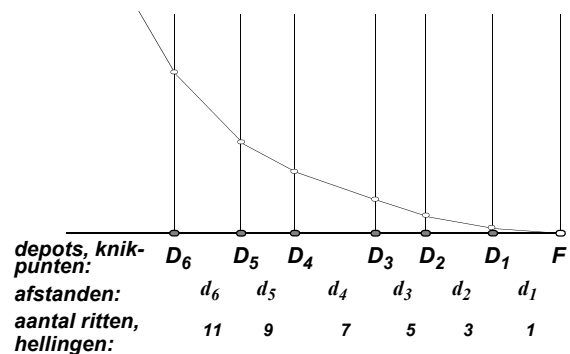


fig. 6

De afstanden tussen de knikpunten van de grafiek zijn aangegeven en de hoeveelheid keren dat de jeep rijdt op het aangegeven traject is tegelijk de helling. In de figuur zijn alle oneven hellingsgetallen aangegeven, maar een afstand d_i kan best 0 zijn; doe dan of meerdere knikpunten samenvallen. Uiteraard geldt wel steeds $d_i \geq 0$.

Onze enige verder optimaliseringsmogelijkheid zit in het zover mogelijk naar links krijgen van de knikpunten, daardoor maken we de grafiek vlakker en $f(0)$ lager.

Dat betekent dat we alle sommen van de vorm:

$$d_n + d_{n-1} + \dots + d_3 + d_2 + d_1$$

groot willen maken.

De beperkingen zitten in de grootte van de depots; de voorraad op plek D_n zal kleiner zijn dan n , want de jeep tankt precies n keer bij dat punt. Die voorraad wordt uitgereden op het stuk na D_n en daarom vinden we de volgende serie ongelijkheden, die links de totale afgelegde

weg ná, en rechts de maximumvoorraad in het depot hebben:

$$\begin{aligned}d_1 &\leq 1 \\3d_2 + d_1 &\leq 2 \\5d_3 + 3d_2 + d_1 &\leq 3 \\7d_4 + 5d_3 + 3d_2 + d_1 &\leq 4 \\9d_5 + 7d_4 + 5d_3 + 3d_2 + d_1 &\leq 5 \\&\dots\end{aligned}$$

Als ‘voorbeeld voor allen’ optimaliseren we nu onder deze voorwaarden $d_5 + d_4 + d_3 + d_2 + d_1$.

Het is niet zonder meer mogelijk uit de serie ongelijkheden af te leiden dat $d_1 = 1, d_2 = \frac{1}{3}, \dots, d_9 = \frac{1}{9}$. Misschien is het wel handiger d_9 net iets groter te maken en dan iets te bezuinigen op d_1 en d_2 ! We pakken het systematischer aan door de som $d_5 + d_4 + d_3 + d_2 + d_1$ uit te drukken in de linkerleden van de serie ongelijkheden:

$$\begin{aligned}d_5 + d_4 + d_3 + d_2 + d_1 &= \\&\frac{1}{9} \cdot (9d_5 + 7d_4 + 5d_3 + 3d_2 + d_1) \\&+ \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9}\right) \cdot (7d_4 + 5d_3 + 3d_2 + d_1) \\&+ \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) \cdot (5d_3 + 3d_2 + d_1) \\&+ \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) \cdot (3d_2 + d_1) \\&+ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) \cdot (d_1)\end{aligned}$$

Bepaal bijvoorbeeld wat de driehoek als coëfficiënt voor d_2 oplevert; dat is:

$$\left(\frac{1}{9} + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right)\right) \cdot (3)$$

Niet gaan breukrekenen nu, kijken is genoeg, er staat ‘1’. Want de omvangrijke eerste factor zakt in elkaar tot $\frac{1}{3}$. In de grote driehoekige vorm zijn de getallen

$$\frac{1}{9}, \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9}\right), \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right), \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right), \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right)$$

positief. We krijgen daarom $d_5 + d_4 + d_3 + d_2 + d_1$ zeker zo groot mogelijk als we de maxima van de uitdrukking achter die factoren allemaal kunnen bereiken.

Dus als:

$$\begin{aligned}d_1 &= 1 \\3d_2 + d_1 &= 2 \\5d_3 + 3d_2 + d_1 &= 3 \\7d_4 + 5d_3 + 3d_2 + d_1 &= 4 \\9d_5 + 7d_4 + 5d_3 + 3d_2 + d_1 &= 5\end{aligned}$$

en die gelijkheden kunnen inderdaad allemaal tegelijk worden gerealiseerd. Begin maar met de eerste, die gaat vanzelf. Daarna kan d_2 berekend worden uit de tweede vergelijking, enzovoort. Dit is uiteraard de enige oplossing van het stelsel; we zien ook dat het voor langere d -sommen eender gaat en dat de gevonden d_i 's niet afhan-

gen van de lengte van de som:

$$d_1 = 1, d_2 = 1/3, d_3 = 1/5, \dots, d_n = \frac{1}{2n-1}.$$

Zij nu h de verbrandingsfunctie die op de manier van figuur 6 is opgebouwd, en die overal inderdaad

$$d_n = \frac{1}{2n-1}$$

realiseert. Noem het n -de knikpunt van deze functie H_n . Dat knikpunt ligt dus op afstand:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1}$$

van F . Er geldt steeds $h(H_n) = n$. Een andere verbrandingsfunctie f heeft het n -de knikpunt D_n mogelijk dicht bij F liggen. Dat geldt voor alle knikpunten en het betekent dat x met betrekking tot de etappe-indeling van h in een interval met een *zeker niet hoger nummer* ligt dan het betrokken interval voor f . De grafiek van h zal in een punt x (als x niet toevallig knikpunt van een van beide functies is, maar dat zijn er slechts eindig veel) dus even steil of minder steil zijn dan de grafiek van f zal zijn. Daarom geldt uiteindelijk:

$$h(0) \leq f(0).$$

Alleen als alle knikpunten van f met die van h samenvallen is er gelijkheid. Het rijplan dat bij h hoort is tot in alle details uniek bepaald; omdat $f(H_n) = n$ zijn alle (t, r) paren die het etappegedrag beschrijven gelijk $(1, 1)$.

Daarmee is ons doel bereikt: we hebben bewezen dat alleen het bij de functie h horend rijplan de laagste startwaarde heeft.

Rekenen met $L = 5$

Het algoritme voor het bepalen van die optimale startwaarde bij gegeven L demonstreren we aan de hand van het voorbeeld $L = 5$.

Stap 1. Bepaal de grootst mogelijke N waarvoor

$$S(N) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2k-1} \leq 5$$

Resultaat: $N = 3091$ en $S(3091) = 5 - 0.00012$.

Stap 2. De grafiek van de verbrandingsfunctie h heeft op het interval $[0, 0.00012]$ helling $-(3091 \times 2 + 1)$. $h(0.00012) = 3091$, dus de startwaarde $h(0)$ is: $3091 + (3091 \times 2 + 1) \times 0.00012 = 3091.74204$.

Een benaderingsmethode

Het heikele punt van het algoritme is stap 1. Als L groot is duurt het lang voor we N en $S(N)$ op deze platvloerse manier hebben gevonden.

Er is een andere manier, die geen exact resultaat levert, maar wel een heel nauwkeurige schatting geeft voor de vereiste benzinevoorraad bij weglengte L .

Vrij snel dook na het vinden van de optimale strategie al

de functie:

$$g(L) = \frac{e^{2L}}{4e^\gamma}$$

op, die een goede kandidaat lijkt te zijn. γ is hier de beroemde constante van Euler-Mascheroni, gedefinieerd door:

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right)$$

In 20 decimalen: $\gamma = 0.57721566490153286061\dots$

Hier is een tabel met de starthoeveelheden $V(L)$ volgens het optimale model en $g(L)$ voor $L = 1$ tot en met 6.

L	optimale V(L)	benadering g(L)
1	1	1.0372
2	7.673	7.6637
3	56.6286	56.6272
4	418.422	418.4218
5	3091.742	3091.742
6	22845.0553	22845.0553

De waarden in regel 3 en regel 5 zijn inmiddels bekend, maar wat echt opvalt is de ronduit verbijsterende nauwkeurigheid van de schatting $g(L)$. Aanvankelijk lukte het slechts te bewijzen dat:

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{V(L)}{g(L)} = 1$$

maar de tabel suggereert dat:

$$\lim_{L \rightarrow \infty} (V(L) - g(L)) = 0$$

Uiteindelijk werd een sterkere bewering bewezen:

Er bestaat een positieve constante C , met de eigenschap dat voor alle $L \geq 1$ geldt

$$|V(L) - g(L)| \leq \frac{C}{g(L)}$$

en omdat $g(L)$ 'heel snel' naar oneindig gaat, nadert het verschil $V(L) - g(L)$ dus 'heel snel' naar 0.

Hier volgt een schets van de bewijsgang, een volledige afleiding staat in [1].

Uitgangspunt is een nauwkeurige schatting voor een beginstuk van de harmonische reeks:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

waarin met $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ een restterm wordt aangegeven die kleiner is dan een constante maal $\frac{1}{n^2}$.

Daaruit kan afgeleid worden dat:

$$L_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} = \frac{1}{2} \ln(n) + \frac{1}{2} \gamma + \ln(2) + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Vermenigvuldig nu linker- en rechterlid met twee en exponentieer, we willen immers n zelf boven water halen. Na enig omwerken en gebruikmaken van bekende eigenschappen van e^x vinden we:

$$g(L_n) = \frac{e^{2L_n}}{4e^\gamma} = ne^{O\left(\frac{1}{n^2}\right)} = n \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) = n + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

Blijkbaar is $g(L_n)$ dus praktisch evengroot als n en omdat n juist gelijk is aan $V(L_n)$ kunnen we vaststellen:

$$V(L_n) - g(L_n) = O\left(\frac{1}{g(L_n)}\right)$$

We moeten nog laten zien dat dit voor alle L geldt.

Nu is $V(L)$ de stuksgewijs lineaire functie met knikpunten (L_n, n) . Zij nu $g_1(L)$ de stuksgewijs lineaire functie met knikpunten $(L_n, g(n))$. Aangetoond moet worden dat $V(L)$ en $g_1(L)$, maar ook $g_1(L)$ en $g(L)$, niet zoveel van elkaar verschillen; dat laatste betekent dat de betreffende coördinaten van g niet ver van g zelf af liggen. Hier moeten uiteraard de gegevens van figuur 7 gebruikt worden.

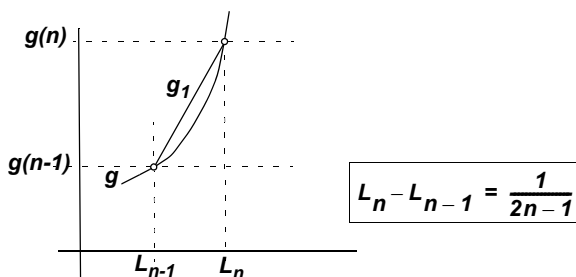


fig. 7

Uiteindelijk volgt wat te bewijzen was:

$$V(L) - g(L) = O\left(\frac{1}{g(L)}\right)$$

Aad Goddijn en Danny Dullens, Freudenthal Instituut

Literatuur

Over de wiskunde B-dag:

- [1] Dullens, D. (2002). *Wiskunde B-dag 2001, een eigen karakter. Afstudeerscriptie wiskunde*. Utrecht: Mathematisch Instituut Universiteit Utrecht. Zie ook [3].
- [2] Dullens, D. (2002). De Wiskunde B-dag 2001. *Nieuwe Wiskrant*, 21(3), 4-7.
- [3] <http://fi.uu.nl/wisbdag>
- Verwante problemen in de literatuur zijn vaak omgekeerd: hoever kan de jeep komen met zeg 1000 liter benzine, als er maar 100 liter mee kan. In [5] en [6] staan interessante (discrete!) kameel-en-banaanvarianten.
- [4] <http://mathworld.wolfram.com/JeepProblem.html>.
- [5] http://puzzle.dse.nl/math/index_nl.html#bananen.
- [6] Bondt, M. de (1996). The Camel-Banana problem. *Nieuw Archief voor wiskunde*, 14(3), 415-426.