

Eind maart heeft de finale plaatsgevonden van de Nationale Wedstrijd voor Jonge Onderzoekers. In de *Nieuwe Wiskrant* van december jl. beloofde **Gerda Haisma** u een inzending te bespreken waar wiskunde een grote rol in vervulde. En dat is het onderzoek van Ronald van Rij geworden.

Wiskunde als onderzoeksonderwerp voor scholieren

Nieuwe generatie ...

Het zal u niet ontgaan zijn dat de snelle opkomst van de PC in de afgelopen tien jaar geleid heeft tot het veel eenvoudiger doen van toegepast onderzoek. Ook middelbare scholieren profiteren hiervan, bij wiskunde was het nog nooit zó simpel om zelf berekeningen uit te voeren of je een beeld te vormen van wat je net uitgerekend hebt. Natuurlijk is wiskundekennis nog steeds vereist om te weten wat je de computer voor je moet laten doen, en ook om de gevonden resultaten te begrijpen. Maar als je eenmaal weet wat je wilt, is het heel wat sneller uitgevoerd (of uitgeprobeerd ...) dan ten tijde van rekenmachine of rekenliniaal.

Een andere PC-toepassing is Internet, als super-encyclopedie waar alle kennis te vinden is die anders misschien voorbehouden zou zijn aan universiteitsbibliotheken en onderzoekslaboratoria. Ook het onderhouden van contact met mensen die gewenste kennis bezitten, maar niet om de hoek wonen, is met hulp van e-mail veel makkelijker dan voorheen.

Bij de Nationale Wedstrijd voor Jonge Onderzoekers is de opkomst van de computer als hulpstuk duidelijk zichtbaar. Twintig jaar geleden waren de winnaars een groep middelbare scholieren die zelf een computer bouwden. Op dit moment wordt de computer, bewust of onbewust, ingezet als gebruiksvoorwerp. Een goede ontwikkeling, die het doen van wiskundig onderzoek stimuleert.

Suikerkristallen, sterren en simulaties

In de jongste categorie (12-15 jaar) van de Nationale Wedstrijd voor Jonge Onderzoekers is te zien dat de deelnemers zich met name bezighouden met praktische 'vindingen', variërend van een 'plakbandschaaf' om het begin van de rol te vinden tot een computermuis-besturingsprogramma, waarmee de muis met blazen in een rietje aanstuurbaar is.

In de oudere leeftijdscategorie (16-20 jaar) doen scholieren serieus onderzoek. Sommige onderzoeken kennen een heel praktische inslag, zoals bijvoorbeeld dat van Vincent Nolting en Tom Maréchal (beide 6 vwo), die al-

lerhande praktische oplossingen moesten zoeken om het gedrag van niet-opgeloste suikerkristallen in een kopje thee te kunnen verklaren. Via stukjes brood, roeren met een mixer of een boormachine met een theelepeltje eraan, in een oplossing met kaliumpermanganaat, concludeerden zij dat kristallen in de gevormde draaikolk naar boven en naar buiten geslingerd worden, waarna het kristal aan de buitenkant naar beneden zakt en naar het midden circuleert, waarna de cyclus opnieuw begint. Zodra de externe aanvoer van energie (roeren) stopt, hopen de kristallen zich midden op de bodem van het glas op, wat te zien is na roeren in een kopje thee waar teveel suiker in zit.

Het onderzoek van Louk Rademaker (6 vwo) toont het andere uiterste van middelbare scholieren-onderzoek. Hij deed een uitgebreide literatuurstudie naar de aard van SS433, een dubbelster die nog niet volledig opgehelderd is. Op grond van literatuur en daarop door hem uitgevoerde berekeningen concludeert hij dat SS433 waarschijnlijk bestaat uit een blauwe reus met een kleine neutronenster als begeleider.

Maar om de rol van wiskunde in een onderzoek het best te illustreren leent het profielwerkstuk 'Watergolven in een 3D-omgeving' van Ronald van Rij (6 vwo, Veenlanden College te Mijdrecht) zich het beste. In zijn onderzoek zijn theorie, zowel wiskunde als natuurkunde, en praktijk gecombineerd en is de computer als ultiem hulpmiddel ingezet. Ronald heeft de golven die ontstaan als een druppel in een vloeistof valt gemodelleerd met een algoritme gebaseerd op de sinusfunctie.

De wetmatigheid van watergolven onderzocht hij in drie stappen: door het algoritme van een uitstervende watergolf te bepalen, vervolgens een algoritme voor een ringgolf op te stellen en tot slot de interferentie tussen meerdere golven te bepalen (bijvoorbeeld bij twee golfbronnen, druppels).

Om zijn formules in beeld te brengen (en zo ook zijn berekeningen visueel te beoordelen) heeft hij ook de gegevens bewerkt om er een 3D-animatie van te maken. Het resultaat is een formule en een verrassend echte simulatie van een vallende druppel in een waterbak. Kijkt u eens naar hoofdstuk 6 'Interferentie':

6. Interferentie

Wanneer in een golfbak twee bolletjes in het water met een motortje worden bewogen, in dit voorbeeld worden ze synchroon bewogen, krijgen we twee epicentra. De epicentra creëren een golfbeweging met dezelfde formule. Dus voor elke vertex in de mesh geldt de formule van het epicentrum plus die van de andere. In formulevorm:

$$z = \sin(d_1 - vt) * \frac{1}{d_1 + \Omega} + \sin(d_2 - vt) * \frac{1}{d_2 + \Omega} + \dots + \sin(d_n - vt) * \frac{1}{d_n + \Omega}$$

Vereenvoudigd:

$$z = \sum_{i=1}^n \sin(d_i - vt) * \frac{1}{d_i + \Omega} \quad [1g]$$

met

- z : absolute waarde van de vertex op de z-as
- d_i : afstand van vertex tot epicentrum nummer i in units
- n : het aantal epicentra

Om de interferentie weer te geven is de basis van het script hetzelfde gebleven alleen nu is er een lus toegevoegd (while). Deze loop wordt evenveel keer uitgevoerd als het aantal epicentra, in de formule is dat dus n . De amplitude is in totaal 140 maal vergroot.

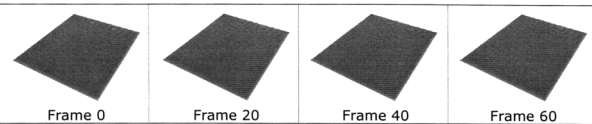
Deelscript 4 is de essentie van script Wave04. Figuur 12 laat gedeeltes uit de animatie zien en Figuur 13 is hiervan een uitvergroting. Bij deze rendering zijn twee epicentra gebruikt, n is dus 2.

```

j=1
while (j != (xcentre.count+1)) do
{
  xdistance = $.verts[1].position.x - xcentre[j] [3]
  ydistance = $.verts[1].position.y - ycentre[j] [4]
  Tdistance = sqrt(xdistance*xdistance + ydistance * ydistance) [2]
  insidesin = (8*(Tdistance-velocity*eliderTime))
  move $.selectedVerts [0,0, sin(insidesin) * (140/(Tdistance+Resis)) ] [1g]
  j +=1
}

```

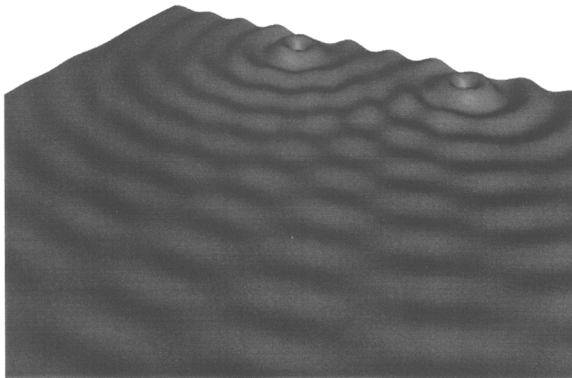
Deelscript 4: de essentie van Wave04 met formules 1g, 2, 3 en 4



Figuur 12: de rendering van het script Wave04 met twee epicentra

Het is opvallend dat bij deze rendering aanzienlijk meer vertices nodig zijn om het gewenste effect te laten zien. De dimensies zijn 740 x 600 units met 51 x 51 vertices dus 2601 vertices in totaal. De berekentijd is hierdoor aanzienlijk langer. Om 90 frames te renderen (keyframe voor elke 5 frames) duurt het berekenen 11 minuut 21 seconden. Deze tijd is gemeten met de interne klok van de computer.

$$\text{De berekensnelheid: } \frac{51 * 51 * 18 \text{ vertices}}{11 * 60s + 21s} = 68,7 \text{ vertices/s.}$$



Figuur 13: uitvergroting van Wave04

Het vreemde is dat het aantal vertices dat per seconden wordt berekend hoger is dan bij een rendering met 1 epicentrum. De oorzaak hiervan kan worden gezocht in het computergeheugen van het systeem verschillend waren belast, waardoor de toegang daar tot sneller ging.

Wanneer de epicentra met ongelijke fases bewegen moet het script hiervoor enigszins worden aangepast. Nieuwe waarden moeten worden ingevoerd voor de faseverschillen en in de formule worden verwerkt.

$$z = \sum_{i=1}^n \sin(d_i - v(t - \varphi_i)) * \frac{1}{d_i + \Omega} \quad [1h]$$

met

- φ_i : het 'faseverschil' van epicentrum nummer i in frames

Dit is de formule voor een golf in een golfbak met asynchroon bewegende epicentra waardoor een gevarieerde interferentie wordt verkregen. In het volgende hoofdstuk gaan wij elementen aan deze formule toevoegen, zodat deze geldt voor een object dat in het water valt.

Het algoritme is zo veranderd dat een oneindig aantal epicentra kunnen worden gemaakt. Hierdoor krijgen we interferentie. Ook is faseverschil mogelijk tussen de epicentra.

De formule voor een golfbak is nu compleet en is:

$$z = \sum_{i=1}^n \sin(d_i - v(t - \varphi_i)) * \frac{1}{d_i + \Omega} \text{ met}$$

$$d_i = \sqrt{(x_b - x_v)^2 + (y_b - y_v)^2}$$

met

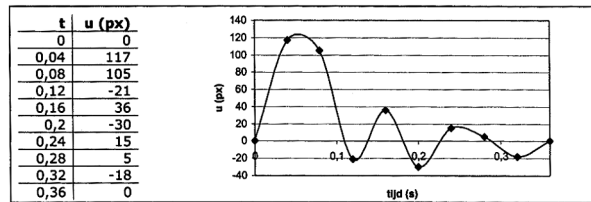
- z : absolute waarde van de vertex op de z-as
- d_i : afstand tot epicentrum i in units
- v : de snelheid van de golf in units per frame (18,3 units/frame)
- t : tijd in frames
- φ_i : het faseverschil van epicentrum i
- Ω : de weerstand van de vloeistof in units
- x_b, x_v : afstanden over de x-as, $b = \text{begin}$, $v = \text{epicentrum}$
- y_b, y_v : afstanden over de y-as, $b = \text{begin}$, $v = \text{epicentrum}$

Of kijkt u naar paragraaf 7.2 'De golven':

7.2. De golven

We hebben in een vorige hoofdstuk een golf gemaakt die continu, zoals in een golfbak, beweegt. Wanneer we echter een object in een bak met water laten vallen krijgen we een epicentrum en een ringgolf van korte duur. De vorm van het epicentrum en de ringgolfbeweging kan alleen via een experiment worden vastgelegd.

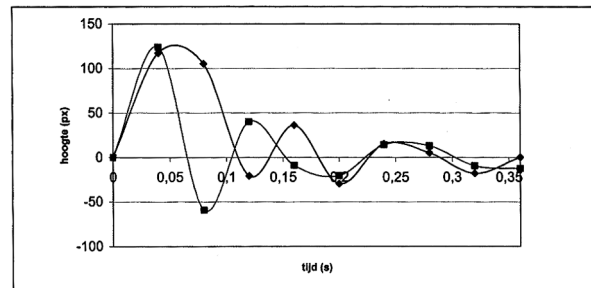
Uit dit experiment volgde deze waarden:



Tabel 4 en Grafiek 1: de meetgegevens over de beweging van het epicentrum (links) en de grafiek daarbij (rechts)

De formule, welke is gemaakt volgens het principe trial-and-error, die vrij dichtbij de meetgegevens komt is: (zie ook Grafiek 2)

$$u(t) = 5 \sin(4\sqrt{100t}) * \frac{1}{t}$$



Grafiek 2: de grafieken van de meetgegevens en de formule daarvan

Het wortelteken in de sinus zorgt ervoor dat de sinusvorm steeds uitgerekt wordt naarmate de tijd groter wordt. De $1/t$ zorgt voor de afgevlakte beweging, zoals beschreven in hoofdstuk 4.

Tijdelijk halen we de het gedeelte dat zorgt voor uitdijning uit de formule zodat we daar geen last van hebben om de oplossing te kunnen vinden. De golf die op een afstand van 100 units zit moet dezelfde Z waarde (=hoogte) hebben als dat hij had toen hij ontstond. In een vergelijking:

$$\sin(d_b - vt) = \sin(d_e - vt)$$

Volgens deze formule zijn dus d_b en d_e gelijk, maar deze zijn eigenlijk 0 en 200.

Een extra element kunnen we niet toevoegen omdat dat namelijk zowel links als rechts zouden moeten worden toegevoegd. Ω is een constante en kan daarom dus niet worden veranderd. De tijd blijft dan dus over. De vergelijking wordt: (de tijd aan de rechterkant van het is-gelijk-teken krijgt geen index, omdat dit namelijk de tijd is in frames vanaf het begin van de animatie)

$$\sin(d_b - vt_b) = \sin(d_e - vt)$$

$$d_b - vt_b = d_e - vt \quad (d_b = 0) \Rightarrow$$

$$d_e - vt = -vt_b$$

$$d_e - vt = \text{constant}$$

Als we vervolgens deze formule willen gebruiken in het algoritme moeten we hiervan het omgekeerde nemen. De formule in de originele vorm neemt namelijk toe, we zouden dan steeds grotere golven krijgen vanuit het epicentrum. Maar ze moeten juist kleiner worden, daarom het omgekeerde. We krijgen dus:

$$\frac{1}{d_e - vt}$$

Als we nu deze formule samen met de formule voor uitdoving samenvoegen dan krijgen we als eenheid:

$$\frac{1}{d + \Omega} * \frac{1}{d - vt} = \frac{1}{(d + \Omega)(d - vt)} \quad (\text{we gaan tijdelijk verder met het onderste gedeelte})$$

$$d^2 - vtd + \Omega d + \Omega vt$$

$$[d^2] - [v][t][d] + [\Omega][d] + [\Omega][v][t]$$

$$m^2 - m * s^{-1} * s * m + m * m - m * m * s^{-1} * s$$

$$m^2 - m^2 + m^2 - m^2 = m^2 \quad \text{de eenheid is dus:}$$

$$m^{-2}$$

Deze procedure werkt en dus converteren we de procedure naar een MAXScript. De scriptnaam is Wave06 en de essentie staat in Deelscript 6. Het resultaat van de rendering is opgenomen in Figuur 16.

```

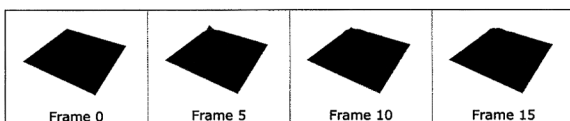
if ((sliderTime/(Tdistance/velocity))>=1) then
Moving = 1
else
Moving = 0

WaveParam = 1/((Tdistance)-velocity*sliderTime) as float

move $.selectedVerts [0,0, 100*sin(insideSin)* WaveParam *Moving*
(140/(Tdistance+Reals)) as float]

```

Deelscript 6: de essentie van Wave06



Figuur 16: de rendering van het script Wave06

Het begin is er. We hebben een golf die groot begint en afzwakt naarmate de afstand groter wordt. Verder ontstaan na de eerste golf kleinere golven. Nu moeten we nog de juiste constanten erin verwerken.

Wedstrijd én gezellig evenement

De onderzoeken van Louk en Ronald brengen hen later dit jaar naar verschillende buitenlandse evenementen en wedstrijden. Dit is ook weggelegd voor de scholieren in uw omgeving!

In september verschijnt er op alle middelbare scholen met een HAVO/VWO-afdeling het nieuwe lesmateriaal. In de versie voor leerlingen wordt uitgelegd hoe je onderzoek doet en presenteert. Hierbij haakt het lesmateriaal in op de kerndoelen van de basisvorming en het studiehuis van de Tweede Fase. Zo kan bijvoorbeeld een profielwerkstuk over het algemeen moeiteloos door naar de Wedstrijd. Voor docenten is er een aparte folder die uitlegt hoe je als docent leerlingen kunt begeleiden in hun onderzoek. Voor scholieren die individueel aan de slag willen is het lesmateriaal ook bruikbaar, samen met de internet-site. Traditioneel doet circa tien procent van de deelnemers 'buitenschools' mee, en ook leerlingen van VMBO verschijnen stevast in de finale.

Dit jaar sluit de Wedstrijd weer aan op het thema van de Wetenschapsweek, zodat scholieren voldoende gelegenheid hebben om inspiratie op te doen voor een onderzoek. Meedoen kan in twee categorieën: van 12-15 jaar (onderbouw) en van 16-20 jaar (bovenbouw middelbare school).

De aanmelding sluit een paar weken na de kerstvakantie en in februari vinden voorrondes van een dag plaats. De 75 beste deelnemers worden uitgenodigd om in maart mee te doen aan de driedaagse finale. De eerste dag is ge-

reserveerd voor kennismaken en een excursie naar een bijzondere plaats. De tweede dag komt de jury de inzendingen bekijken, waarna de derde dag de prijsuitreiking is. Voor 'Idee' zijn er computers en geldprijzen, voor 'Project' de toegangsbewijzen voor internationale jongerevenementen en wedstrijden. Maar zoals de deelnemers ieder jaar zeggen: het gaat niet om het winnen, maar om het meedoen. Het is niet voor niets dat een deel van de deelnemers ieder jaar opnieuw probeert een finaleplaats te veroveren.

Organisatie

Voor finalisten die te oud zijn om mee te doen is een vervolg mogelijk in de organisatie. De praktische organisatie van deze Wedstrijd is namelijk in handen van een werkgroep van zes tot negen studenten uit het hele land. In een jaar tijd zorgen zij ervoor dat de circa 300 voorrondedeelnemers en 75 finalisten een wedstrijdlocatie hebben, dat er stands, catering en een overnachtingsplaats is, een interessant programma en natuurlijk een deskundige jury. De hierboven beschreven Nationale Wedstrijd voor Jonge Onderzoekers is de belangrijkste activiteit van de (onafhankelijke) Stichting de Jonge Onderzoekers. Deze Stichting heeft als doel het stimuleren van wetenschap en techniek voor jongeren door hen daarmee zelf actief aan de slag te laten gaan. Het benodigde geld is afkomstig van subsidie (circa 25%) en sponsoring. Het Stichtingsbestuur bestaat uit vertegenwoordigers van bedrijfsleven, overheid, onderwijs en onderzoek die wetenschap en techniek voor jongeren willen promoten.

Kent u scholieren die geïnteresseerd zijn, aarzel dan niet om contact met DJO te zoeken. Wiskundig onderzoek was immers nog nooit zó aantrekkelijk voor scholieren!

Gerda Haisma, Gerda@DJO.nl

www.DJO.nl

