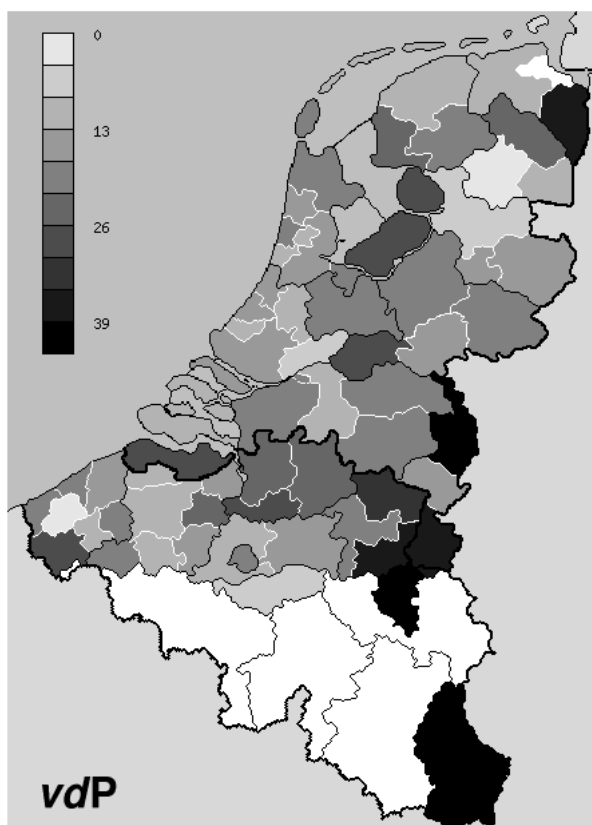


Sinds 1 januari jl. zijn wij allen getuige van een uniek experiment: de Eurodiffusie. Een groep wiskundigen heeft zich een week lang over de vraag gebogen hoe snel de muntjes zullen mengen. **Ger Koole** schetst hoe men tot een eenvoudig matrixmodel is gekomen.

## Het modelleren van de Eurodiffusie



Percentages buitenlandse euro's per regio

### Inleiding

Met ingang van 1 januari jl. zijn de nationale munten in twaalf Europese landen vervangen door de euro. Deze euro's hebben allemaal op de achterzijde een nationale beeltenis. Door het reizen over landsgrenzen zullen deze munten langzaamaan mengen; de nationale banken hebben om financiële redenen – transport is duur – besloten de munten niet te herdistribueren. Na verloop van tijd zal dus een ideale menging ontstaan, die alleen verstoord zal worden door het vervangen van verloren gegane muntjes door nieuwe. Dit zijn er op jaarbasis in Nederland tussen de vijftig en honderd miljoen, een klein deel van het to-

taal van 1,6 miljard dat in actieve circulatie is.

De vraag is met welke snelheid de Nederlandse munten vervangen worden door buitenlandse. Om dit te kunnen meten heeft het Wiskundig Genootschap in samenwerking met het tijdschrift *Natuur & Techniek* een website opgezet ([www.wiskgenoot.nl/eurodiffusie](http://www.wiskgenoot.nl/eurodiffusie)) waarop vrijwilligers de inhoud van hun portemonnee kunnen rapporteren. Op deze wijze krijgen we een beeld van het verloop van de menging in Nederland en Vlaanderen. Tevens heeft *Natuur & Techniek* de vraag neergelegd bij de Studiegroep Wiskunde voor de Industrie, die dit jaar in februari op de Universiteit van Amsterdam is gehouden. Op de resultaten van de studiegroep gaan we hier wat dieper in.

De studiegroep heeft zich tot doel gesteld de diffusie in Nederland te schatten. Preciezer gesteld hebben we geprobeerd het moment te schatten waarop de helft van de euromunten in actieve circulatie in Nederland van buitenlandse origine is. Het oplossen van dit probleem heeft twee componenten: het schatten van de huidige diffusiesnelheid, hetgeen een data analyseprobleem is, en het extrapoleren van deze diffusie. Hoe we moeten extrapoleren (lineair? exponentieel?) is niet op voorhand duidelijk. Daarom maken we een dynamisch model van de diffusie. De extrapolatie rolt er dan vanzelf uit.

### Data analyse

Voor de data analyse hebben we uiteraard eerst de data van de Eurodiffusie website geanalyseerd. Gezien de wijze waarop de data worden aangeleverd, kan men niet op voorhand verwachten dat de metingen representatief zijn voor de Nederlandse portemonnee. Daartoe hebben we de globale resultaten vergeleken met enkele 'eurometers' die we wel betrouwbaar achten, namelijk zij die uit een grote groep deelnemers bestaan en meerdere malen hebben deelgenomen, waarschijnlijk schoolklassen. Deze lieten inderdaad een beduidend ander beeld zien, namelijk een aanmerkelijk lagere diffusie na één maand. Eigen metingen onder studenten, studiegroepdeelnemers en kantinekassa's bevestigden dit beeld. Het valt tevens op dat de metingen sterk uiteenlopen, van 91 tot 98 procent

Beatrixen. Gezien de grootte van elke meting duidt dit erop dat hier sprake is van verschillende verdelingen. Inderdaad kwam de meting met de snelste menging uit Hengelo, waar je zou verwachten dat de menging met Duits geld sneller gaat dan elders.

Alles overziende kwamen we tot de voorzichtige conclusie dat er na één maand sprake was van vier procent buitenlandse munten in Nederland.

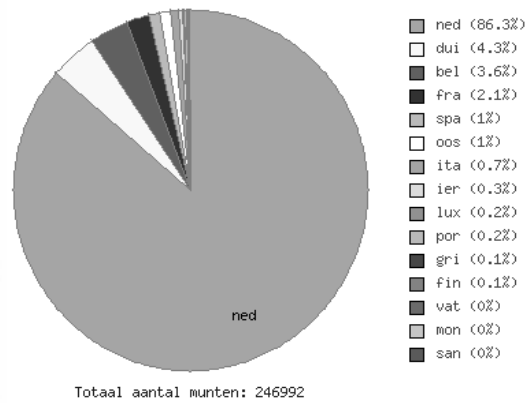
## Het model

Dit percentage zou als invoer dienen voor een wiskundig model van de Eurodiffusie. Alle munten tegelijk volgen in een model lijkt te veel gevraagd, en is ook niet nodig: het analyseren van het mogelijk gedrag van één munt geeft alle gewenste informatie. Er is voor gekozen het gedrag van een willekeurige munt te modelleren als *Markov keten*. Centraal bij Markov-ketens staan toestanden en overgangskansen tussen de toestanden. De toestand is de plaats waar een munt zich bevindt; de overgangskansen geven de kans aan dat een munt zich verplaatst.

Dit stelt ons voor de volgende vraag: hoe nauwkeurig moeten we onze munt volgen? Hoeveel en welke toestanden moeten we kiezen? Hoe meer toestanden, hoe meer overgangskansen we moeten bepalen. Dus als we veel toestanden kiezen, moeten we daar een heel goede reden voor hebben.

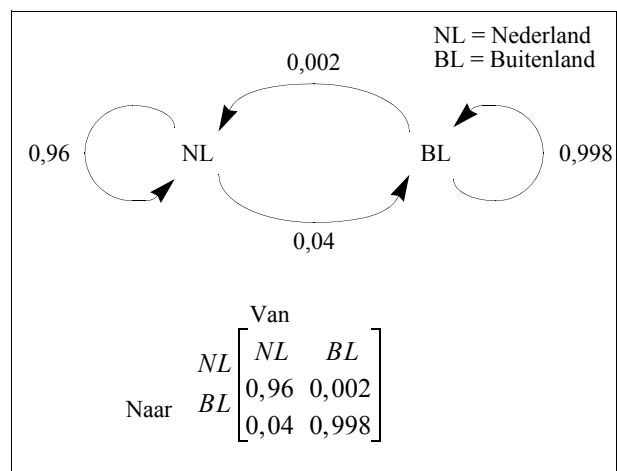
Wij hebben ervoor gekozen slechts met twee toestanden te werken: de munt is in Nederland of daarbuiten. Er hoeven nu slechts twee kansen bepaald te worden. Het betekent dat we abstraheren van de nationaliteit van buitenlandse munten: we maken bijvoorbeeld geen onderscheid tussen Belgische en Duitse munten. Het betekent ook dat we geen onderscheid maken tussen munten in kassa's, in portemonnees, of in spaarpotten. Ook dit is te verdedigen vanuit het gebrek aan informatie: de data voor een gedetailleerder model zouden onmogelijk verkregen kunnen worden.

We bepalen de overgangskansen. Eerder constateerden we dat na één maand vier procent van de Nederlandse munten vervangen zijn door buitenlandse. Blijkbaar is de kans dat een willekeurige munt in Nederland zich na één maand in het buitenland bevindt ongeveer gelijk aan 0,04. De buitenlandse muntvoorraad is ongeveer twintigmaal groter dan de Nederlandse.



Percentage buitenlandse euromunten

Gegeven dat er ongeveer evenveel munten van Nederland naar het buitenland als andersom gaan, concluderen we dat munten in het buitenland een twintigmaal kleinere kans hebben na een maand in Nederland te zijn. De corresponderende overgangskans is dus  $\frac{0,04}{20} = 0,002$ . Nu hebben we alles om de Markov-keten door te rekenen. Een eenvoudige matrixvermenigvuldiging laat zien dat bij vier procent diffusie de kans 0,5 is dat een in Nederland startende munt zich na 17 maanden nog in Nederland bevindt. Hierbij gaan we uit van tijdshomogeniteit, dat wil zeggen, de diffusie is in alle maanden gelijk. Dit zal echter overduidelijk niet het geval zijn.



Graaf en matrix met overgangskansen van de eurodiffusie

overgangsmatrix: maand:

	NL	BL	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
NL	0,96	0,002	1000	960	922	885	850	816	784	753	723	695	668	642	617	593	570	548	527	507
BL	0,04	0,998	0	40	78	115	150	184	216	247	277	305	332	358	383	407	430	452	473	493

veranderende samenstelling over een periode van 17 maanden van een portemonnee met 1000 muntjes, te beginnen met 1000 Nederlandse munten en 0 buitenlandse munten.

Spreadsheet berekening bij het matrixmodel

Het belangrijkste effect wordt gevormd door de zomervakanties. Stel dat twee op de drie Nederlanders voor een vakantie naar het buitenland gaan, die elk met een portemonnee terugkomen representatief voor het buitenland. Aangezien slechts vijftien procent van de actieve muntvoorraad zich in portemonnees bevindt (de rest is in kassa's, bij banken, enzovoort), zal dit tien procent van de muntvoorraad mengen, equivalent met 2,5 maanden 'januaridiffusie'.

Rekeninghoudend met ook in de zomer toenemend buitenlands toerisme en de skivakanties zijn wij met de nodige armslag gekomen tot de conclusie dat na ruim twaalf maanden, dus kort na 1 januari 2003, de helft van de actieve Nederlandse muntvoorraad uit buitenlandse munten zal bestaan. De armslag wordt ingegeven door de wankel statistische basis van onze analyse (het gebrek aan betrouwbare metingen) en de ongrijpbaarheid van menselijk gedrag. Want wie kan mij zeggen of er al niet veel meer buitenlands geld in Nederland is, maar dat verzamelaars dit opsparen? Zolang hun gedrag niet verandert past dit in het model, maar wat als ze er rond de herfst allemaal genoeg van krijgen? Dan wordt Nederland overspoeld met buitenlandse muntjes!

## Ten slotte

Dit probleem van de Eurodiffusie was naast vijf industriële problemen door *Natuur & Techniek* ingediend bij de Werkgroep Wiskunde voor de Industrie. Het doel is het gebruik van wiskunde voor het voetlicht te brengen. Dit is met de website en dit project zeker gelukt, reeds tientallen krantenartikelen zijn over dit onderwerp verschenen.

Alhoewel het oplossen van dit probleem geen direct maatschappelijk nut heeft, hopen de oplosers dat het een bijdrage levert aan het populariseren van toegepaste wiskunde.

*Het onderzoek waarover dit artikel rapporteert is uitgevoerd door Piet van Blokland, Lorna Booth, Kirankumar Hiremath, Michiel Hochstenbach, Ger Koole, Sorin Pop, Marieke Quant en Djoko Wirosoetisno.*

*Onze dank gaat uit naar Jeanine Koppels van DNB voor de door haar geleverde informatie.*

*Ger Koole, Vrije Universiteit Amsterdam  
email: koole@cs.vu.nl*

## Vakantiecursus CWI 2002 Wiskunde en Gezondheid

De Vakantiecursus Wiskunde voor leraren in de exacte vakken in VWO, HAVO en HBO en andere belangstellenden is een initiatief van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Ook in 2002 organiseert het CWI een vakantiecursus. Deze cursus geldt als nascholingsactiviteit.

### Data

Eindhoven: 23 en 24 augustus 2002  
Amsterdam: 30 en 31 augustus 2002

### Plaats

Eindhoven: Auditorium TU Eindhoven, Den Dolech 2  
Amsterdam: CWI, Kruislaan 413, zaal Z011

### Programma

Vrijdag  
15.00-15.25 Ontvangst, koffie  
15.25-15.30 Jan van de Craats. *Inleiding*  
15.30-16.15 Natasha M. Maurits. *Een wiskundige kijkt in de hersenen*  
16.15-16.45 Pauze  
16.45-17.30 Marleen Keijzer. *Monte Carlo en wijnvlekken*  
17.30-18.30 Warme maaltijd  
18.30-19.15 Ida H. Stamhuis. *Florence Nightingale: Statistiek aan het front*

19.15-19.45 Pauze  
19.45-20.30 Odo Diekmann. *Aanstekelijkheid gevangen in een getal*

### Zaterdag

10.00-10.45 Svetlana A. Borovkova. *Analysis of survival data*  
11.15-12.00 André Heck. *Gewichtige wiskunde in de klas*  
13.00-13.45 André Heck. *Praktische oefeningen*  
14.15-15.00 Rob Tijdeman. *Discrete tomografie*

### Aanmelding

Deze kan elektronisch geschieden of door het aanmeldingsformulier achterin de brochure (PDF/Word) in te vullen en vóór 15 augustus 2002 op te sturen aan het CWI.

### Cursusgeld

Het cursusgeld bedraagt € 70,-. De syllabus en de maaltijden zijn hierbij inbegrepen.

### Informatie

Wilmy van Ojik (Wilmy.van.Ojik@cwi.nl), Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam, tel. 020-592 40 09  
Meer informatie en online aanmelden:  
<http://www.cwi.nl/conferences/VC2002/>