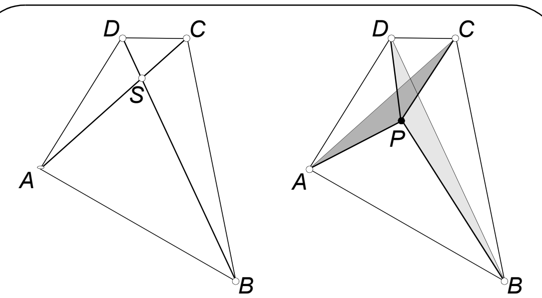
Wat te bewijzen is

Rubriek

De allereerste opgave van de allereerste Nederlandse Wiskunde Olympiade luidde letterlijk: *Gegeven is een vlakke vierhoek, waarvan elke hoek kleiner is dan een gestrekte hoek. Geef het punt aan, waarvoor de som van de afstanden tot de hoekpunten van de vierhoek zo klein mogelijk is. Bewijs dat uw antwoord goed is.*

Dat was in 1962 en deze som was wat je noemt een 'binnenkomer'. Het vermoeden dat het snijpunt S van de diagonalen het beoogde punt is, ligt tamelijk voor de hand, en met gebruik van de driehoeksongelijkheid kan dan het bewijs worden geleverd.

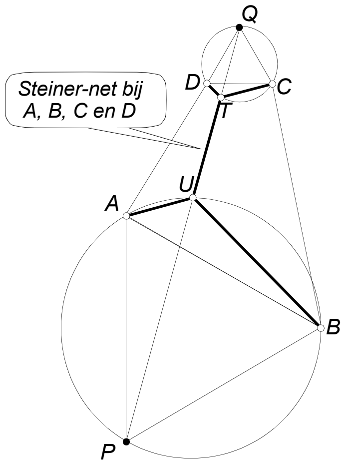


ABCD is convex, dus S tussen A en C en tussen B en D.
Vandaar: $|AS| + |BS| + |CS| + |DS| = |AC| + |BD|$
Voor elk punt P geldt:
$|AP| + |CP| \geq |AC|$ *en* $|BP| + |DP| \geq |BD|$
Als $P \neq S$*, vervalt in ten minste een van beide driehoeksongelijkheden de optie 'is gelijk aan'.*

Nu, veertig jaar later, zou dit vraagstuk waarschijnlijk een beetje warmer aangekleed zijn. De hoekpunten zouden bijvoorbeeld fabrieken voorstellen, die door een ondergronds kabelnet met elkaar verbonden moeten worden. Om de kosten te minimaliseren wil men het kabelnet zo kort mogelijk maken. Hoe doet men dat?

Een Steiner-net

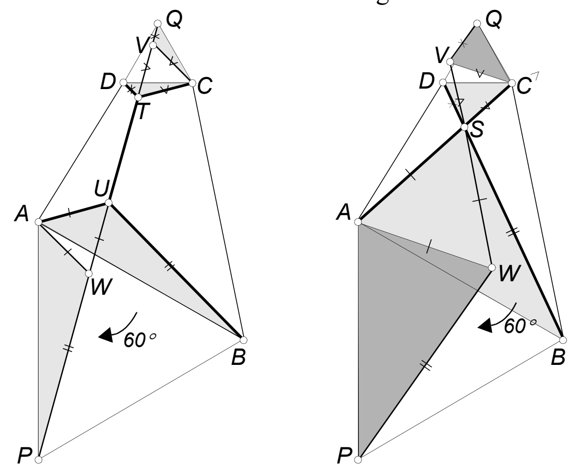
Het grappige is dat in deze formulering de eerste-gezicht-oplossing van de diagonalen in het algemeen niet optimaal is. De crux is namelijk dat het gunstig kan zijn om bij de aanleg van het net meer dan één knooppunt te gebruiken. Bij de hieronder getekende ligging zal het kortste net twee knooppunten hebben, terwijl de in een knooppunt samenkomende kabels onderlinge hoeken van 120° maken. Die laatste eigenschap maakt dat dit een *Steiner-net* heet. De constructie van zo'n net gaat aldus. Zet, met toppen P en Q, gelijkzijdige driehoeken buitenwaarts op twee overstaande zijden van de vierhoek en teken de omgeschreven cirkels van die driehoeken. Daar waar de verbindingslijn PQ de beide cirkels ook nog snijdt, liggen de knooppunten (zeg T en U) van een Steiner-net.



Het bewijs dat de drie hoeken rond T en U inderdaad 120° zijn, zou fraai in een VWO-examen wiskunde B1,2 passen. Uit $\angle APB = 60°$ volgt direct $\angle AUB = 120°$. Verder geldt $\angle AUP = \angle ABP = 60°$ (omtrekshoeken op dezelfde boog), dus $\angle AUT = 120°$.

Ik merk op dat deze constructie niet bij iedere convexe vierhoek werkt. Een voorwaarde is dat de punten U en T binnen de vierhoek liggen en wel zó dat T niet dichter bij P ligt dan U; dat laatste hoeft niet het geval te zijn als de beide cirkels elkaar snijden.

Nu het bewijs dat in de hierboven getekende situatie het Steiner-net korter is dan de beide diagonalen samen.

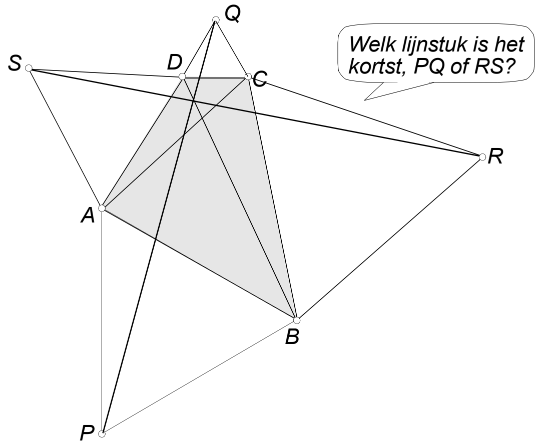


lengte Steiner-net = $|PQ|$ *lengte diagonaalnet =* $|PW| + |WV| + |VQ|$

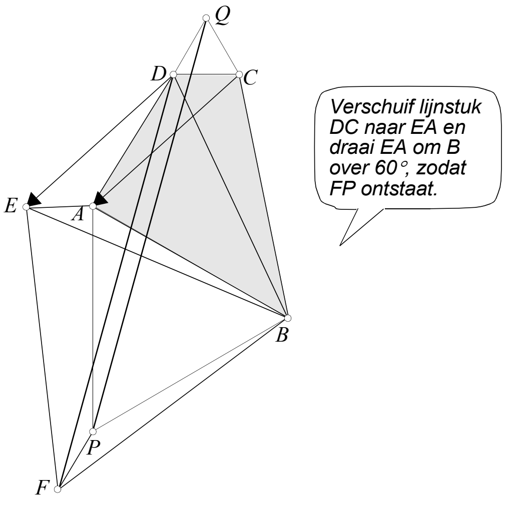
In de linkerfiguur zijn de driehoeken AUB en CDT over een hoek van 60°gedraaid, respectievelijk om A en C. De beeldpunten W en V van U en T blijken op de lijn PQ te liggen. Omdat driehoek UAW gelijkzijdig is, geldt: $\angle AWU = 60°$. Ook: $\angle AWP = \angle AUB = 120°$. Gevolg: $\angle PWU$ is een gestrekte hoek, dus W ligt op PU.

Evenzo ligt V op QT. Dat de totale lengte van het netwerk bestaande uit de vijf lijnstukken UA, UB, TU, TC en TD gelijk is aan de lengte van lijnstuk PQ is nu helder.
In de rechterfiguur zijn de driehoeken ASB en CSD over 60°gedraaid, respectievelijk om A en C. De route van P naar Q via de punten W en V is gelijk aan de som van de lijnstukken SA, SB, SC en ST. Linea recta van P naar Q is is echter korter en het Steiner-netwerk is zuiniger.

Welk minimum is absoluut?
Andere op AB en CD 'gevorkte' netwerken kunnen op dezelfde wijze met behoud van lengte worden getransformeerd naar een route van P naar Q, en dus heeft het net dat correspondeert met lijnstuk PQ de minimale lengte. Hét minimum van alle netten? Dat hoeft niet, want er is nog een kandidaat, namelijk het (eventuele) Steiner-net met vorken op het andere paar overstaande zijden.

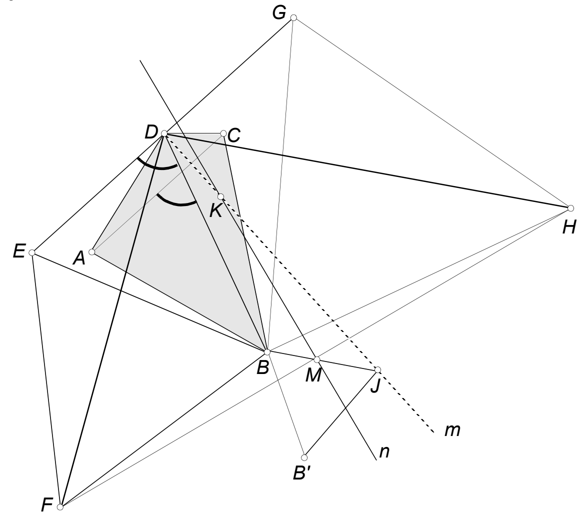


Dit net wordt gemeten via een route RS, waarbij R en S de toppen zijn van gelijkzijdige driehoeken op BC en DA.
Voor vierhoeken met twee Steiner-netwerken is het nu zaak om de lengten van PQ en RS te vergelijken.
Een verkenning met Cabri doet vermoeden dat bij een hoek van 90° tussen de diagonalen geldt: $|PQ| = |RS|$.
Maken de diagonalen een scheve hoek, dan lijkt het zo te zijn dat, met P en Q als toppen van de gelijkzijdige driehoeken tegenover de *scherpe* hoek, geldt: $|PQ| < |RS|$.



Om dit vermoeden te bewijzen verplaats ik de lijnstukken PQ en RS zó dat een eindpunt in D komt. De tekening onderaan de vorige kolom toont hoe dat met PQ is gebeurd. Uit het in de tekening aangegeven procédé volgt tamelijk eenvoudig dat FP even lang en evenwijdig is aan DQ en dus geldt hetzelfde voor QP en DF!
Evenzo kan AD worden verschoven naar een lijnstuk CG dat op zijn beurt na rotatie om B over −60° overgaat in een lijnstuk RH; met als gevolg dat lijnstuk DH gelijk en evenwijdig is aan SR.

Een nieuw probleem
Het probleem dat rest, is het vergelijken van de lengten van DF en DH.
Merk eerst op dat de hoeken tussen de diagonalen gelijk zijn aan de hoeken die DE en DG met DB maken.



Als de diagonalen loodrecht op elkaar staan, ligt het punt B op de middelloodlijn m van lijnstuk EG, en dan zijn de gelijkzijdige driehoeken EBF en GBH elkaars spiegelbeeld ten opzichte van m. Met als gevolg: $|DF| = |DH|$.
Bekijk nu het geval (zoals in de figuur) van een scherpe hoek tussen DE en DB. Na veel 'sleepwerk' met Cabri kwam ik tot een paar sterke vermoedens.

a. Het midden M van FH ligt steeds aan dezelfde kant van m als B en precies twee keer zo dichtbij m als B.
b. M is ook het midden van BJ, waarbij J zó op m ligt dat $\angle EJG = 60°$.
c. De middelloodlijn n van HF snijdt m in een vast punt K, tussen (!) D en J; er geldt: $\angle EKG = 120°$.

Als dit allemaal bewezen is ben ik klaar, want dan is het duidelijk dat D en H aan een verschillende kant van n liggen en dus: $|DF| < |DH|$. Vermoeden b. impliceert vermoeden a., dus er zijn nog twee bewijzen nodig.

Bewijs b.

$$G \xrightarrow{R_{B,60°}} H \xrightarrow{R_{M,180°}} F \xrightarrow{R_{B,60°}} E$$

De resultante van de serie rotaties is een rotatie over 300° (of over −60°) die G op E afbeeldt; het centrum van die rotatie is dus J.

Zij B^* het beeld van B bij deze rotatie, dus driehoek BJB^* is gelijkzijdig.
Pas nu de serie toe op B:

$$B \xrightarrow{R_{B,60^\circ}} B \xrightarrow{R_{M,180^\circ}} ? \xrightarrow{R_{B,60^\circ}} B^*$$

Driehoek BJB^* is gelijkzijdig, dus:

$$J \xrightarrow{R_{B,60^\circ}} B^*$$

en de middelste schakel van de serie is nu ook bekend:

$$B \xrightarrow{R_{M,180^\circ}} J$$

Met andere woorden: M is het midden van BJ.

Bewijs c.
De hoeken van driehoek EGK zijn 30°, 30° en 120°. Noem de dragers van de zijden van die driehoek e, g en k (e tegenover E, enzovoort). De rotaties om E en G over –60° zijn producten van twee spiegelingen; er geldt:

$$R_{E,-60^\circ} = S_k S_g \qquad \text{en} \qquad R_{G,-60^\circ} = S_e S_k$$

Het product van die twee rotaties beeldt F af op H:

$$F \xrightarrow{R_{E,-60^\circ}} B \xrightarrow{R_{G,-60^\circ}} H$$

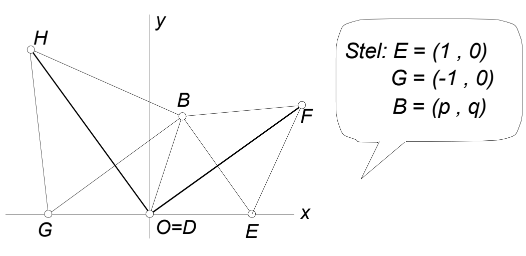
De resultante is ook het product van twee spiegelingen:

$$R_{G,-60^\circ} R_{E,-60^\circ} = S_e S_k S_k S_g = S_e S_g$$

en dat is gelijk aan de rotatie om K (het snijpunt van de lijnen e en g) over −120°. Nu weet ik dat het punt K even ver van F als H ligt, ofwel n gaat door K.

Het vergelijken van DF en DH vroeg behoorlijk wat creatieve inspanning, ik geef het toe. Zonder de hulp van Cabri was het mij misschien niet gelukt dit bewijs te vinden. De kracht van het programma is niet alleen dat elk vermoeden onmiddellijk kan worden beproefd, maar vooral ook dat invariante elementen die een wegwijzer zijn naar een bewijs, zichtbaar worden.

Van analytisch naar synthetisch
Voor de rekenaars is er nog een andere mogelijkheid om de vergelijking van DF en DH uit te voeren.
Neem D als oorsprong van een assenstelsel waarvan de x-as door E en G gaat en de y-as samenvalt met m.

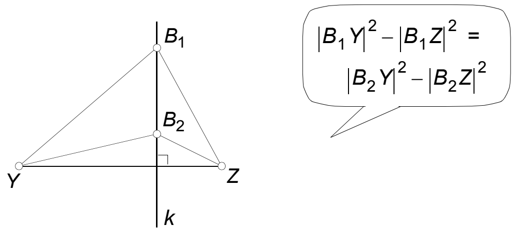


De coördinaten van F en H kunnen nu via wat rekenwerk – ook deze weg gaat niet over rozen – worden uitgedrukt in p en q en dat leidt ten slotte tot een vergelijking van de afstanden tot O.

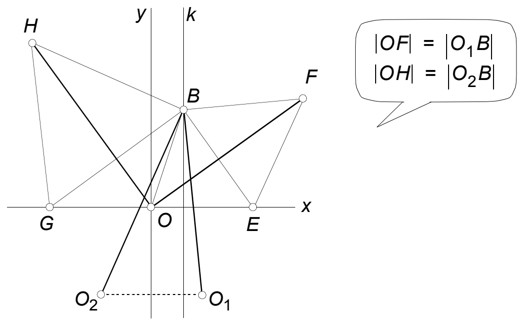
$$|OF|^2 = 1 + p^2 + q^2 - p + q\sqrt{3}$$
$$|OH|^2 = 1 + p^2 + q^2 + p + q\sqrt{3}$$

Als $p = 0$, dus als $\angle BOE = 90°$, geldt: $|OF| = |OH|$
Als $p > 0$, dus als $\angle BOE < 90°$, geldt: $|OF| < |OH|$

Het verschil tussen de kwadraten van $|OH|$ en $|OF|$ hangt slechts af van p, en dat geeft te denken. Als B in verticale richting wordt verschoven blijft dat verschil hetzelfde, opnieuw een invariant element. De associatie die ik hierbij heb is een stelling uit de klassieke meetkunde:



Als B over de lijn k ($k \perp YZ$) beweegt, verandert (denk aan Pythagoras!) het verschil tussen de kwadraten van de afstanden tot Y en Z niet. Zouden OF en OH op een verstandige manier kunnen worden verplaatst, zodat zij het gemeenschappelijk eindpunt B krijgen?
Het ligt nu voor de hand om OF te roteren om E over 60° en OH te roteren om G over −60°. F en H gaan dan over in B en O gaat over in de punten O_1 en O_2.



Omdat de driehoeken OEO_1 en OGO_2 gelijkzijdig zijn en omdat O het midden is van EG, weet ik dat O_1 en O_2 elkaars spiegelbeeld zijn ten opzichte van de y-as.
Als B rechts van de y-as ligt, geldt dus $|O_1B| < |O_2B|$ ofwel $|OF| < |OH|$.

Zo leidde, in een als altijd vruchtbaar gesprek met Aad Goddijn, het resultaat van een analytisch bewijs tot een nieuw en eenvoudiger synthetisch bewijs. Cabri bleek minder onmisbaar dan ik aanvankelijk dacht. Terugblikkend op de ontwikkelgang van dit ‘meertrapsbewijs’ komt de vraag op of de lijnstukken PQ en RS niet beter direct via één transformatie kunnen worden overgevoerd naar BO_1 en BO_2. Dat lukt inderdaad en dat geeft weer een nieuw bewijs, maar ook daarbij zijn een paar tussentreden onvermijdelijk. Voor de geïnteresseerde lezer lijkt me dit een mooie oefening in transformatiemeetkunde.

Martin Kindt, martin@fi.uu.nl