

Op de Nationale Wiskunde dagen 2002 organiseerde **Odette de Meulemeester** uit België een werkgroep over Pentomino's. Haar enthousiaste manier van werken met haar eigen leerlingen sloeg direct aan bij de deelnemende werkgroepleden. In dit artikel geeft ze een even enthousiast verslag.



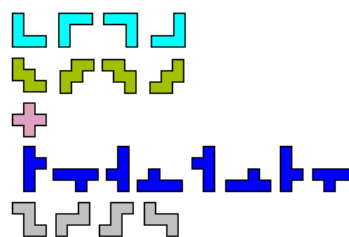
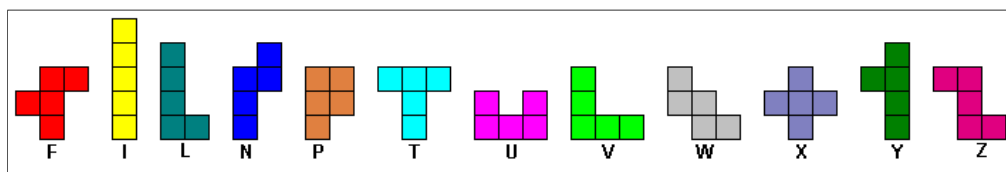
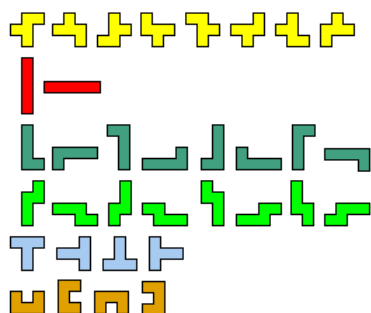
Het ontdekken van de verschillende pentomino's

In 1953 introduceerde Solomon W. Golomb, toen student aan de Harvard Universiteit, de term *polyomino* door vierkanten met zijde 1 samen te voegen.

Omdat een *domino* bestaat uit twee aaneengesloten vierkanten, stelde Golomb voor figuren met drie vierkanten *tromino*'s te noemen. Die met vier *tetromino*'s. En verder *pentomino*'s, *hexomino*'s, ... Golomb kende aan elke pentomino een letter toe. Vertrekkende van de *monomino*, via de *domino*, *trimino* en *tetromino* (vormen van tetris) vinden we de twaalf verschillende *pentominovormen* als we de congruente vormen (spiegeling en rotatie) niet meerekenen.

Leerlingen vinden het doorgaans leuk om deze serie uit te breiden tot alle *hexomino*'s (35). Ik geef elke leerling een pentomino en ze zoeken thuis alle vormen die ontstaan door bij de gekregen pentomino op verschillende plaatsen één vierkantje toe te voegen. De volgende les hangt één leerling al zijn gevonden vormen op en de andere leerlingen kijken of ze nog andere vormen hebben gevonden.

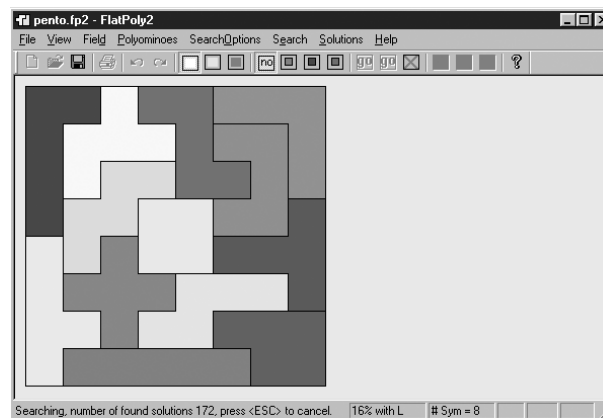
Houden we wel rekening met draaiingen en spiegelingen, dan vinden we 58 verschillende vormen.



Rechthoeken maken met pentomino's

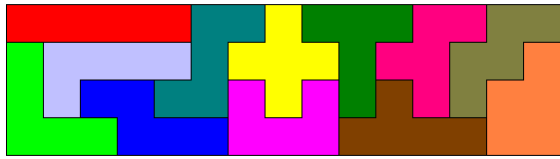
Als leerlingen een setje van alle pentomino's krijgen proberen ze doorgaans daarmee rechthoeken te maken.

Je kan leerlingen laten ontdekken welke de verschillende mogelijke afmetingen zijn. De oppervlakte is dus steeds 60. Hierbij kan men ook telkens naar de omtrek vragen. *FlatPoly* is een prachtig programma dat gratis kan worden gedownload op de website van Aad van de Wetering uit Driebruggen (<http://home.wxs.nl/~avdw3b/aad.html>) en waarmee men heel eenvoudig vlakken kan vullen met pentomino's.

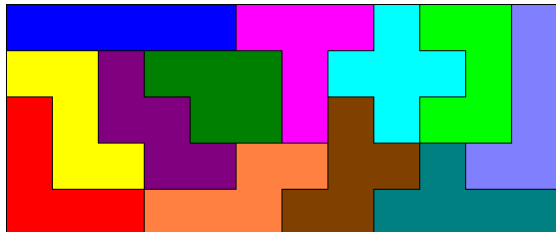


We laten drie oplossingen zien:

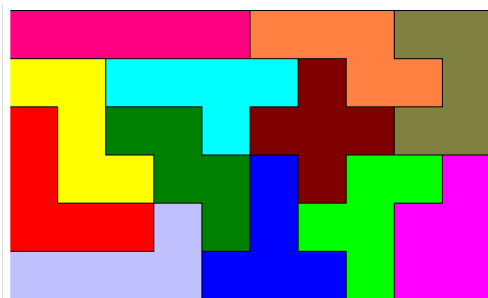
15 bij 4 (386 mogelijkheden)



12 bij 5 (1110 mogelijkheden)

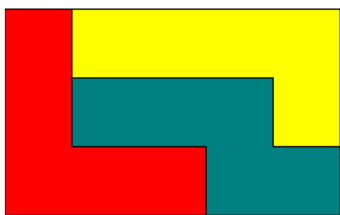


10 bij 6 (2339 mogelijkheden)

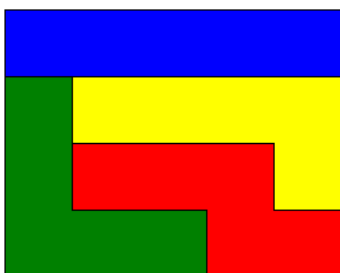


Men kan ook rechthoeken maken met een deel van de set. We geven weer drie mogelijkheden:

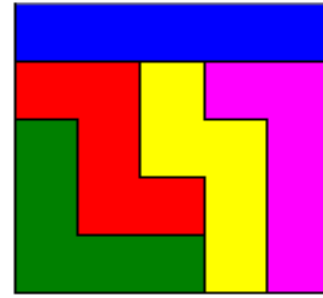
3 bij 5 (7 mogelijkheden)



4 bij 5 (50 mogelijkheden)

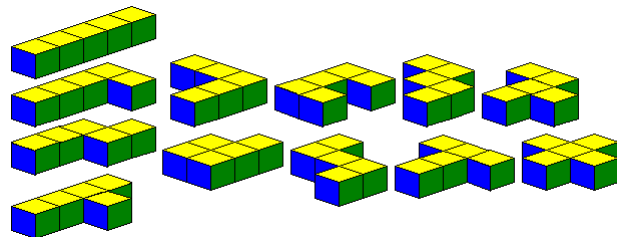


5 bij 5 (107 mogelijkheden)

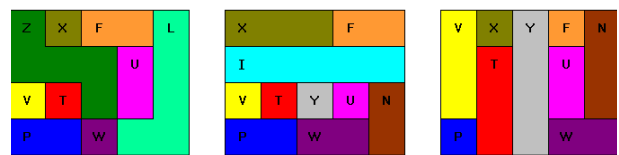


Pentakubussen

In plaats van vierkantjes kunnen we ook figuren vormen door eenheidskubussen samen te voegen. Door de kubussen in één vlak te plaatsen krijgen we weer de twaalf pentominovormen.

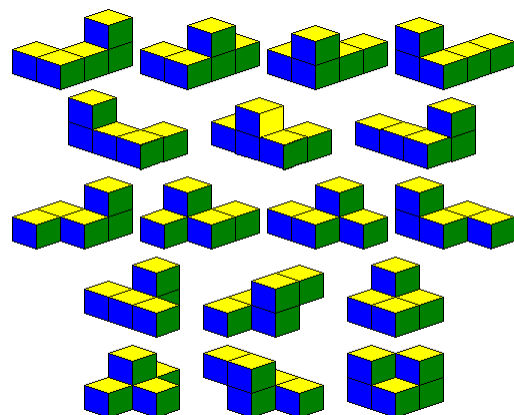


Hiermee kunnen we balkjes maken van drie lagen die ieder bij 4 bij 5 groot zijn:

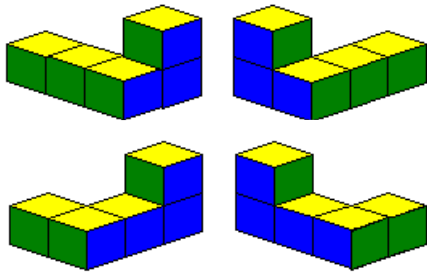


Prof. C.J. Bouwkamp zette al in juli 1967 alle 3940 mogelijkheden op een rijtje.

We kunnen ook de kubussen in twee of meer lagen samenvoegen tot driedimensionale pentomino's. Dan vinden we er nog 17 vormen bij.



Nu is het verschil tussen links en rechts ineens heel belangrijk.

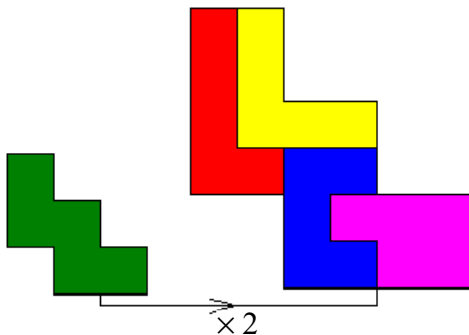


Pentomino's en gelijkvormigheid

Het begrip *gelijkvormigheid* kan mooi geïllustreerd worden aan de hand van pentomino's.

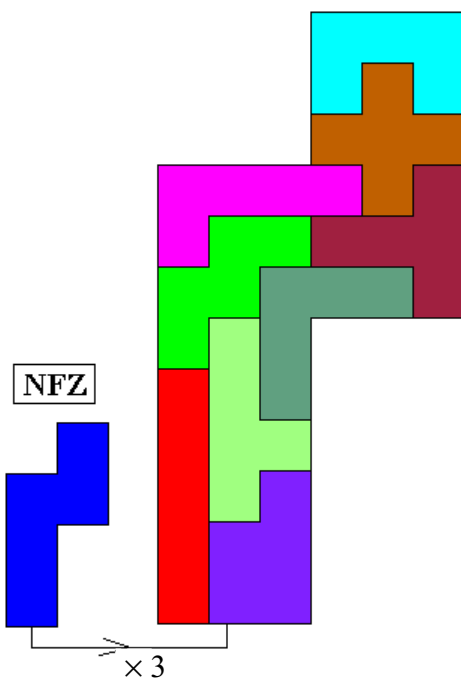
Bijvoorbeeld aan de hand van de N- en W-pentomino (van *Nieuwe Wiskrant*). Hierover vindt men op heel wat sites informatie (zie onze pentomino-links).

W-pentomino op schaal 2

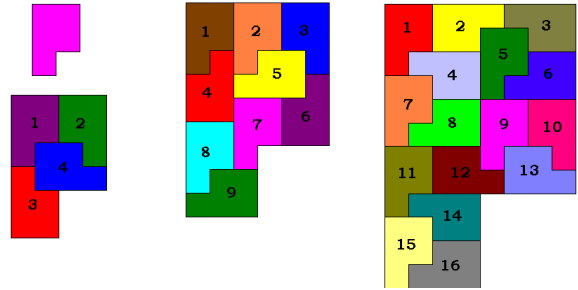


De nieuwe figuur wordt opgevuld met vier pentomino's. De leerlingen ervaren dat de oppervlakte wordt vergroot met het kwadraat van de gelijkvormigheidsfactor.

N-pentomino op schaal 3



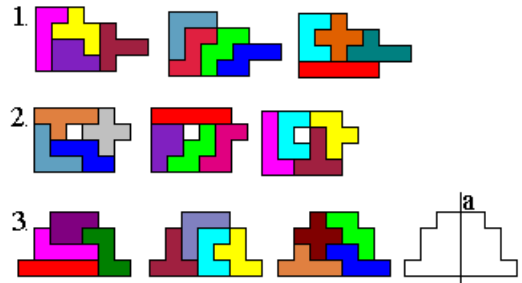
De nieuwe figuur wordt opgevuld met negen pentomino's. Leerlingen laten hun eigen fantasie werken:



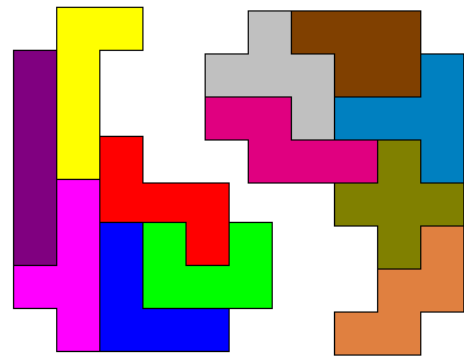
Pentomino's en congruentie

Ook congruentie leent zich heel mooi voor oefeningen met pentomino's.

Congruente figuren bestaande uit verschillende pentomino's



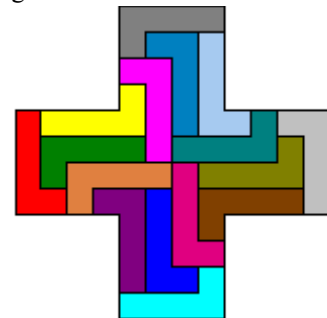
Heel fraai is oplossing 3 vanwege de verticale symmetrie-as. Ook fraai is de volgende Yin Yang figuur:

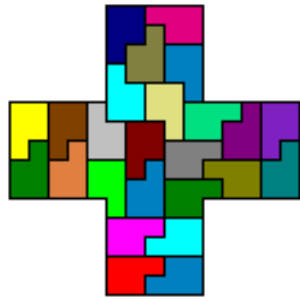


Andere oplossingen zijn op onze website te vinden.

Een pentomino verdelen in congruente delen

Twee prachtige voorbeelden:

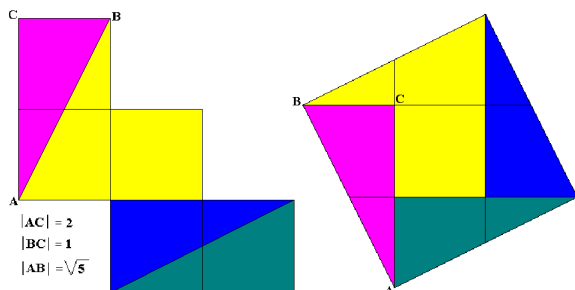




Pentomino's, wortels en Pythagoras

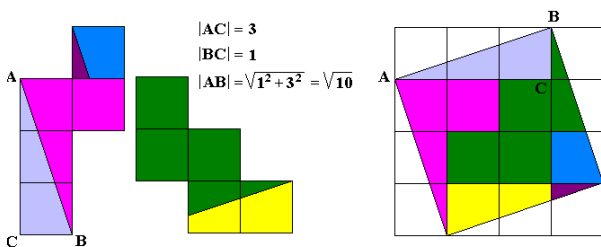
Prof. Greg Frederickson (West Lafayette-USA) gaf ons het idee om pentomino's te versnijden, waarbij men de stelling van Pythagoras heel mooi kan toepassen. Zijn boek *Dissections: Plane and Fancy* is een echte aanrader. (Zie ook: <http://www.cs.purdue.edu/homes/gnf/book.html>)

Het versnijden van één pentomino tot een vierkant

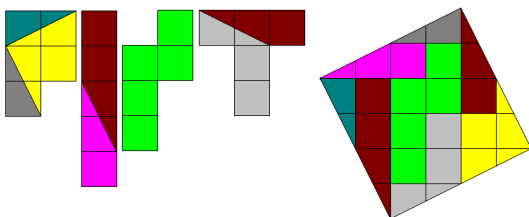


De oppervlakte van het vierkant is 5. Het irrationaal getal $\sqrt{5}$ wordt zo mooi geconstrueerd.

Het versnijden van twee pentomino's tot een vierkant
We versneden de N(ieuwe) W(iskrant):



Het versnijden van vier pentomino's tot een vierkant
Van Aad van de Wetering kregen we de volgende oplossing aangeboden:



De oppervlakte van het vierkant is 20. De zijde van het

vierkant is dus

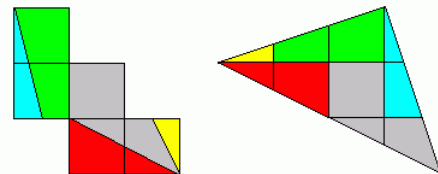
$$\sqrt{20} = \sqrt{2^2 + 4^2}.$$

Eén pentomino bestaat nooit uit een rechthoek van 4×2 . We moeten de zijde van het vierkant dus op een andere manier snijden namelijk:

$$\sqrt{20} = 2\sqrt{5} = \sqrt{5} + \sqrt{5}.$$

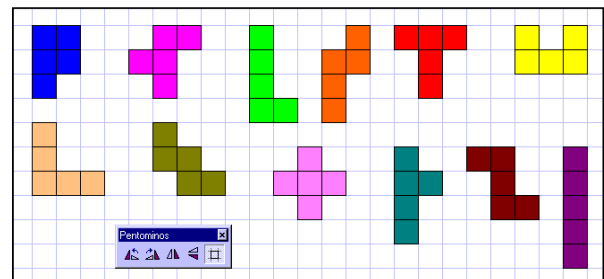
De juistheid van het vereenvoudigen van deze vierkantswortel wordt duidelijk geïllustreerd door voorgaande tekening.

Het versnijden van een pentomino tot een gelijkbenige rechthoekige driehoek



Excel en Paint gebruiken voor het uitprinten van oplossingen

We maakten een excelprogrammaatje waarbij de verschillende pentomino's aanwezig zijn. Er is een werkbalkje waarmee men de pentomino's op het raster kan verplaatsen, spiegelen en draaien. Dit programmaatje is van onze site te downloaden.



Wedstrijdproblemen

Het pentomino-project werd hoofdzakelijk in de lessen wiskunde uitgewerkt, maar het leukste van het project is toch wel onze site met daarop onze wedstrijd en daardoor onze vele, meestal buitenlandse, contacten. De meeste wedstrijdproblemen werden opgesteld door de leerlingen zelf. Ze zijn nog allemaal op onze site te vinden bij 'records'.

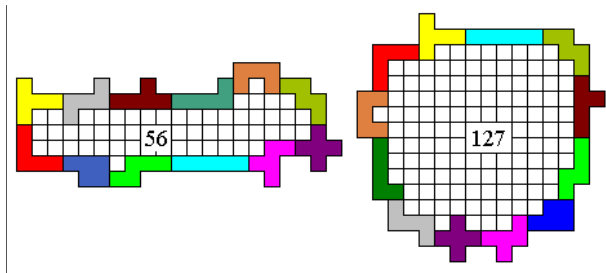
Hier volgen enkele wedstrijdproblemen:

'Fenceproblems' = omsluitingsproblemen

We omsluiten een zo groot mogelijke oppervlakte met de totale set pentomino's, waarbij de verschillende pentomino's elkaar raken met minstens één zijde.

Dit is een heel mooi probleem om omtrek en oppervlakte van vlakke figuren te bespreken. We vergelijken de op-

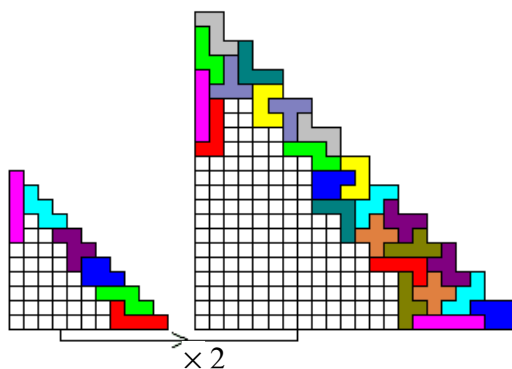
pervlakte van een cirkel, een vierkant en een rechthoek die dezelfde omtrek hebben, met elkaar. De leerlingen waren overtuigd dat er een zo groot mogelijke oppervlakte was als ze probeerden de pentomino's in de vorm van een cirkel te plaatsen.



De beloning van 1000 BEF (€ 25,-) betekende een extra stimulans bij het vinden van een oplossing.

De Trapwedstrijd

Dit leverde weer een mooi voorbeeld op van gelijkvormige figuren.



De huidige wedstrijd

Als vervolg op het bijwonen van mijn pentomino-workshop tijdens de NWD in Noordwijkerhout maakten Peter

Vaandrager en zijn collega's van de Liudger-scholengemeenschap uit Drachten een boekje met wiskundige vragen en opdrachten voor HAVO 3.



Op onze website www.pentomino.be.tf vindt u hier meer over en ook over alle andere problemen en oplossingen. Doe mee aan de wedstrijd en win de Tetromino-slinger (of € 25,-). Elke inzending krijgt een zelfgemaakte pentominoset toegestuurd. Deze set is door de leerlingen tijdens de les technologische opvoeding gemaakt. Inzenden kan nog tot 31 december 2002.

Op dit moment is de Tetromino-site van Casper Verbuyst en Rocky Nerinx te bewonderen op:

<http://proto.thinkquest.nl/~11b351>.

Deze leerlingen van mij doen met deze site mee aan de Nederlandse ThinkQuest wedstrijd.

Wilt u graag de getekende figuren als bestand krijgen, mail dan o.d.m@pi.be.

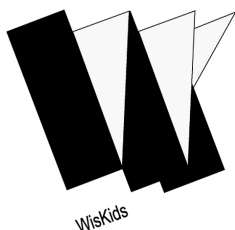
Commentaar, opmerkingen en suggesties zijn zeer welkom.

Odette de Meulemeester, KSO Glorieux, Ronse, België

De Wiskunde Scholen Prijs 2003

Ook als u zelf denkt dat u 'niets bijzonders' doet op school, kan uw school in aanmerking komen voor het winnen van de 'Wiskunde Scholen Prijs'. Deze prijs is ingesteld om scholen te stimuleren met hun sterke punten op het gebied van wiskundeonderwijs naar buiten te treden. Alle scholen voor voortgezet onderwijs kunnen meedingen naar deze prijs. Er zijn drie categorieën waarin een school een prijs kan winnen:

- basismvorming (klas 1 en 2)
- bovenbouw VMBO (klas 3 en 4)
- HAVO/VWO (de klassen 3 t/m 6).



Scholen die meedoen dingen mee naar de hoofdprijs van euro 2000. Daarnaast is er voor elke categorie een eerste prijs van € 1000,- te winnen.

In november is naar alle scholen een folder gestuurd met nadere informatie. Heeft uw school belangstelling om mee te doen, stuur dan het antwoordkaartje bij de folder in of stuur een e-mail naar wiskids@fi.uu.nl.

Midden januari ontvangt u dan nadere informatie.

De Wiskunde Scholen Prijs is een onderdeel van het WisKids project, een gezamenlijk initiatief van wiskundig Nederland. Doelen van WisKids zijn: het bevorderen van enthousiasme bij jongeren, het imago van wiskunde verbeteren, jongeren uitdagen via de wiskunde, belangstelling voor de exacte vakken bevorderen.

Zie ook www.fi.uu.nl/wiskids.