In maart jl. zond het ZDF de documentaire ‘Die Deppen der Nation?’ (De sukkels van de natie?) van Annette Hoth uit naar aanleiding van de PISA Panik in Duitsland. Er was een portret te zien van **Manfred Engel**. In een omgeving van behoorlijk traditioneel wiskunde onderwijs zoekt Engel al jaren naar vernieuwende manieren van lesgeven. De redactie van de *Wiskrant* spoorde hem op en vroeg hem verslag te doen van zijn voor Duitse begrippen nieuwe kijk op wiskundeonderwijs.

Op ontdekkingsreis over het schaakbord

Inleiding

Het is niet voor het eerst dat scholen en onderwijs zich door een onderzoek onder de loep moeten laten nemen. Het is wel nieuw dat nu niet alleen een lokaal, regionaal of nationaal vergelijk op een meer intuïtieve grondslag gebeurt, maar dat een internationale rangschikking met wetenschappelijk getoetste onderzoeksmethodes plaatsvindt. Kon men bij TIMSS nog twijfelen over de methode van het onderzoek, zo twijfelen met name de onderwijspolitici niet meer aan de uitkomsten van het PISA-onderzoek. Ze grijpen het thema dankbaar aan en waarschijnlijk niet alleen om bij de publieke opinie belangstelling te wekken voor het onderwijs, maar wellicht ook om zo de blik van de media op zichzelf als politicus te richten. Voor de scholen zelf is het echter van groot belang dat in de publieke discussie toegegeven wordt welke centrale betekenis de waardering van het onderwijs door de maatschappij heeft, welke mogelijkheden voor de toekomst hier liggen en dat scholing niet voortdurend achtergesteld kan blijven op vrijetijds- en consumentenactiviteiten. Veeleer is een bereidheid tot leren vereist.

Het gezegde ‘Een leven lang leren’ bestaat al vele jaren, maar niemand kan dat overtuigend verwezenlijken, omdat men zich toch gebonden voelt aan het eigen vak, de eigen zienswijze. Dus wordt in de leerplannen vaak wel in een algemeen gedeelte een pleidooi voor algemene doelstellingen en vakoverstijgende competenties gegeven, maar daarna volgen de eindtermen, die als een berg erin te stampen kennis wordt opgevat. Het lukt zelden om een overtuigende verbinding tussen vakinhoud en hogere doelstellingen te bereiken.

In mijn wiskundeonderwijs ben ik mij ervan bewust dat slechts een klein deel van de leerlingen beroepshalve in de wiskunde of een nauwer toegepast gebruik van de wiskunde verdergaat, en ik leg er ook grote nadruk op dat ik geen wiskundige, maar een wiskundeleraar ben. Ook ben ik mij ervan bewust dat er op school meer vakken gegeven worden die ook hun betekenis hebben. Daarom wil ik vanuit de wiskundige inhoud (omdat me die nu eenmaal goed ligt) methodes en zienswijzen ontwikkelen die ook in de toekomst een bepaalde draagkracht hebben. Hieronder vallen met name: het opwekken van nieuwsgierigheid, de wens eigen ideeën te ontwikkelen, deze in een discussie te evalueren en verder te ontwikkelen en om niet met een beschouwing vanuit slechts één gezichtspunt tevreden te zijn.

Op ontdekkingsreis over het schaakbord

Manfred Engel in actie

Het schaakspel heeft zijn oorsprong bij de Perzen en de Arabieren, bereikte in de negende eeuw Spanje en verbreidde zich van daaruit over heel Europa.
Aan de dichter Firdausi (1000 n. Chr.) wordt de oudste beschrijving van het bordspel toegeschreven. In de navolgende beschouwingen gaat het niet om het spel zelf, maar om wiskundige overwegingen bij het bestuderen van de 8×8 velden. Hierbij worden de velden van het schaakbord in het eerste geval genoteerd met de voor schakers bekende notatie. In het tweede geval worden de velden van 1 tot en met 64 doorgenummerd, in het derde geval blijven de 64 velden leeg (zie figuur 1).

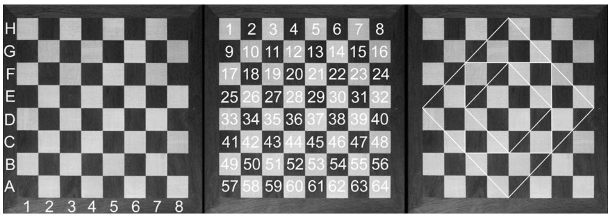


fig. 1 Drie vertrekpunten van de reis

Het linkerbord gebruik ik voor de klassieke inleiding tot exponentiële groei, nauwkeurigheidsgrenzen van de rekenmachine, procentuele afwijkingen en hun absolute orde van grootte, evenals het weergeven van exponentiële groei in een reële omgeving.
Het doorgenummerde bord maakt het mogelijk de optellingsregels voor de natuurlijke getallen op te sporen (de regel van Gauss), het ontdekken van ordeningsstructuren en het beredeneren van ontdekte patronen. Het lege bord biedt de mogelijkheid om met ingeschreven vierkanten de opbouw van een rekenkundige toepassing, exponentieel verval, en het begrip convergentie aanschouwelijk te maken. Met punaises en gekleurd draad laat ik de leerlingen zulk soort figuren maken.

Het traditionele schaakbord

fig. 2 Exponentiële groei op het schaakbord

Gewoonlijk worden leerlingen bij de behandeling van de exponentiële groei verrast door de beproefde opgave 'schaakbord en rijstkorrels'. Na de afspraak over de verdeelregel 'veld 1 één rijstkorrel, veld 2 twee, ofwel op ieder veld komt het dubbele aantal van het vorige veld', volgt als resultaat voor het laatste veld met 263 een getal waarvoor de zakrekenmachine 9 223 372 037 · 1018 vermeldt. Zo'n groot aantal overstijgt ons bevattingsvermogen. Vaak is hiermee de beschouwing ten einde.
Maar er zijn natuurlijk nog veel meer beschouwingen mogelijk. Bijvoorbeeld door de rijstkorrels te vervangen door centen, enerzijds omdat geld leerlingen meer aanspreekt dan rijstkorrels, anderzijds omdat centen een makkelijk te bepalen hoogte en massa hebben. Na de afspraak over de verdeelregel kun je bijvoorbeeld de volgende vragen stellen die de leerlingen eerst intuïtief beantwoorden:

- Hoeveel centen liggen er op het schaakbord?
- Hoe lang kan een gezin van vier personen van het totaalbedrag leven?
- Is het bedrag op het laatste veld groter of kleiner dan het jaarinkomen van Michael Schumacher?
- Op welk veld hebben we de hoogte van de Eiffeltoren bereikt?
- Op welk veld hebben we de massa van een locomotief bereikt?
- Kun je het totale bedrag op het schaakbord sneller met of zonder rekenmachine berekenen?
- Je telt de centen van het eerste tot en met het voorlaatste veld op. Liggen hier meer of minder centen dan op het laatste veld?
- Loont het de moeite om over het verschil tussen die beide bedragen te vechten?

Uit ervaring blijkt dat de antwoorden nogal kunnen verschillen, veroorzaakt door de intuïtieve schattingen en het ontbreken van gegevens (bijvoorbeeld de hoogte van de Eiffeltoren, de hoogte en massa van een cent).
Nu komt er een groot scala aan groepsopdrachten met verschillende uitdagingen in beeld. Zoekopdrachten uit naslagwerken, internet of de bank, de experimentele bepaling van de hoogte en de massa van een cent met schuifmaat en weegschaal, het gebruik van een rekenmachine en hoofdrekenen, het ontwikkelen van wiskundige oplossingen en ook het inzicht, dat men het op enkele gebieden (zoals het uitgavenpatroon van een gezin van vier personen, de massa van een locomotief) eens moet worden over de geschatte waarde.

De beperkingen van de rekenmachine bij het bepalen van het exacte bedrag
In de klas leveren rekenmachines met verschillend aantal weergegeven cijfers aanleiding tot een discussie over procentuele en absolute afwijkingen. Na de uitleg over deze cijfers en machten van tien krijg je bijvoorbeeld de volgende resultaten:

92 234 000 000 000 000 euro en
92 233 720 370 000 000 euro.

Het verschil tussen de beide bedragen: 279 630 000 000 euro is als bedrag enorm groot, maar procentueel wijken de bedragen slechts 0,003 promille van elkaar af. Onduidelijk is hierbij welk van deze bedragen het exacte bedrag het dichtst benadert.
Door naar de eindcijfers te kijken kan men hoofdrekenen trainen en voorbereidend werk tot structureel denken doen. Dat geeft hele eenvoudige vragen als 'Welke eindcijfers hebben we op veld B3, welke eindcijfers komen in kolom 7 voor, welke eindcijfers hebben we op rij 5?', of 'Met welke factor moet je het aantal op veld F7 vermenigvuldigen om het aantal op G3 te krijgen?'. Op deze

manier kan ook beredeneerd worden dat het bedrag op H8 op een 8 moet eindigen.
Er waren rekenmachines waarmee de factor van veld A1 naar veld E1 berekend kon worden: 4 294 967 296. Als je naar het aantal velden tussen E1 en H8 kijkt, zie je dat de factor tussen E1 en H8 de helft is van de factor tussen A1 en E1. Gevolg: tussen A1 en H8 zit de factor 4 294 967 296 · 2 147 483 648 en dat is meteen het aantal op H8.

Een verbazingwekkend inzicht levert het optellen van de veldbedragen:

fig. 3 De somrij van A in rij B

Hieruit is eenvoudig af te leiden:

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^n = 2^{(n+1)} - 1.$$

Het vergelijken van de opgetelde bedragen met de enkele bedragen maakt de gevolgtrekking mogelijk: ‘Ik weet dat de van het eerste tot en met het voorlaatste veld opgetelde bedragen en het bedrag op het laatste veld slechts één cent verschillen. Deze exacte bewering kan ik doen zonder dat ik het bedrag op het laatste veld ken.’
Dit lokt bij de leerlingen altijd weer verbazing uit.
Een ander voorbeeld voor het opsporen van zo’n samenhang wordt bereikt door te starten met een verdrie- of verviervoudiging.

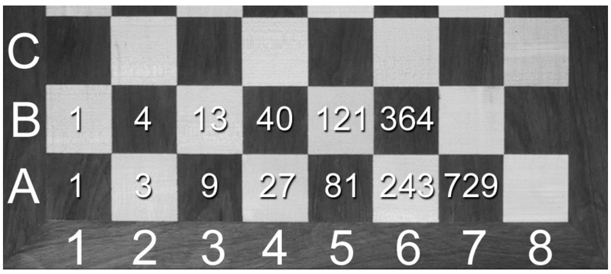


fig. 4 Verdrievoudiging

Klaarblijkelijk geldt:

$$3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + ... + 3^n = [3^{(n+1)} - 1] : 2.$$

Of zoals de leerlingen het zelf zeggen:

De som van de eerste 6 velden is het bedrag van veld 7 min 1, gedeeld door 2.

En bij de verviervoudiging wordt gevonden:

$$4^0 + 4^1 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + ... + 4^n = [4^{(n+1)} - 1] : 3.$$

Of zoals leerlingen het zelf zeggen:

De som van de eerste zes velden is het bedrag van veld zeven min 1, gedeeld door 3.

De optelformule voor meetkundige rijen wordt op deze manier aanschouwelijk voorbereid.

In dit artikel worden bewust niet alle opgeworpen vragen beantwoord. Ook voor mij waren en zijn het steeds weer waardevolle ervaringen in de klas wanneer ik zelf juist geen voorsprong in kennis heb (zoals hoogte van de Eiffeltoren en massa van een locomotief) zodat ik net als de leerlingen ook aan het werk moet.

Het van 1 t/m 64 doorgenummerde schaakbord

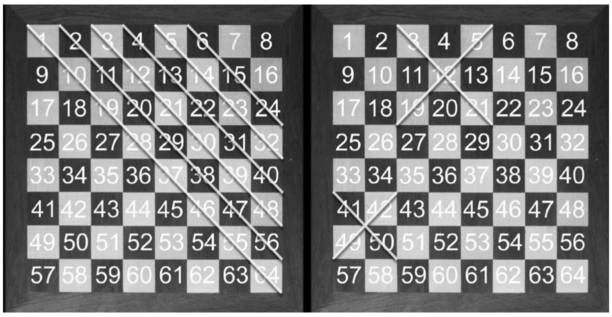


fig. 5 Spelen met diagonalen

Meestal geeft dit schaakbord niet al bij een eerste blik zijn geheimen prijs. In de les maken we gebruik van punaises en gekleurd garen. Hiermee kun je de leerlingen velden laten markeren om zo een bepaalde invalshoek te benadrukken. Zo kun je een diagonaal afzetten om een rekenfoefje voor de optelling van alle getallen op het schaakbord te laten ontdekken, zie het linker schaakbord in figuur 5.
Als je de tegenoverliggende getallen op de hoofddiagonaal paarsgewijs optelt, dan is de uitkomst altijd 65. Dit geldt natuurlijk ook voor de andere diagonaal en er kunnen in totaal 32 veldenparen met som 65 gevonden worden. Zo kan, net als Gauss dat deed, het optellen van opeenvolgende getallen vervangen worden door een vermenigvuldiging:

$$1 + 2 + 3 + ... + 64 = 65 \cdot 32.$$

Maar wat gebeurt er nu als je de diagonalen verschuift? Wat verandert er aan de getallen op de velden, welke som volgt daaruit?
De getallen op de velden nemen telkens met één af. Beginnen we bovenaan en bekijken we telkens drie velden, dan verschillen de sommen telkens 3.
Voorbeeld:
$6 + 15 + 24 = 45$ $5 + 14 + 23 = 42$ $4 + 13 + 22 = 39$.

Leerlingen aan het werk ...

En zo kun je als je de som van een diagonaal kent ook de som van de linker 'buurdiagonaal' bepalen:

$4 + 13 + 22 + 31 + 40 = 110$
$3 + 12 + 21 + 30 + 39 + 48 = 153$
kan vervangen worden door
$110 – 5 + 48 = 153$.

Een andere uitdaging is het spannen van draden over meerdere diagonaalvelden, zoals in het rechter schaakbord van figuur 5. Welke ontdekkingsmogelijkheden vind je hier? Of het bekijken van de verschillen tussen de rijen of de kolommen: ook dit levert genoeg stof tot discussie op.

Als je de leerlingen de tijd gunt om met elkaar in discussie te gaan, komen er ook observaties te voorschijn die je vooraf als docent niet hebt voorzien. Je hebt dan ook niet overal meteen een antwoord op, je moet samen met de leerlingen zo'n situatie bekijken en proberen te begrijpen.

... delen hun ontdekkingen

Ingeschreven vierkanten op een schaakbord

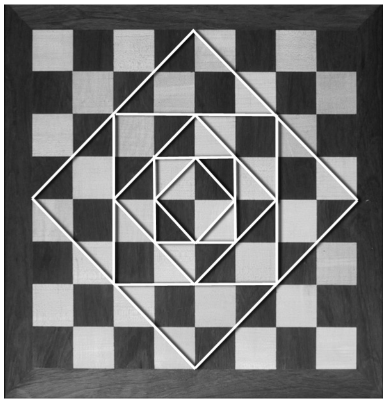


fig. 6 Ingeschreven vierkanten

Met punaises en gekleurd garen kunnen de leerlingen bovenstaande figuur uitzetten: naar aanleiding hiervan kan er discussie over het oppervlak en de omtrek van de vierkanten ontstaan. Het is makkelijk in te zien dat de oppervlakte van vierkant tot vierkant gehalveerd wordt. En de volgende tabel ontstaat vanzelf:

Vierkant nummer	0	1	2	3	4	5	6	7	8
oppervlakte in velden	64	32	16	8	4	2	1	0,5	0,25

In combinatie met de grafiek die hierbij te maken is krijgen de leerlingen inzicht in het verschijnsel exponentiële afname. En in de vierde klas kun je dit verband ook algebraïsch weergeven:

$A_0 = 64\ v$,

$A_1 = 64 \cdot \frac{1}{2} \cdot v$

$A_2 = 64 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} v$

En ten slotte: $A_n = 64 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Bij bestudering van de omtrek zijn de leerlingen geneigd de stelling van Pythagoras te gebruiken. Maar hier ligt juist een mooie gelegenheid om afgeronde rekenmachineuitkomsten te vergelijken met de exacte uitkomsten en om het worteltrekken te introduceren of gedeeltelijk te herhalen.

Vierkant nummer	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Lengte zijde	8	?	4	?	2	?	1	?	0,5
Omtrek	32	?	16	?	8	?	4	?	2

Bewust zijn hier bij de vierkanten 1, 3, 5, 7 vraagtekens geplaatst. Van vierkant 1 weten we dat voor de oppervlakte geldt: $A_1 = 32$ velden. Maar hoe vind je nu de lengte van een zijde als de oppervlakte geen mooi kwadraat is? Hier kunnen mooie discussies ontstaan als een leerling suggereert om bij een vraagteken een mooie tussenliggende waarde in te vullen. Voor het eerste vierkant zou dan de zijde zes velden lang zijn. Maar dan zou de oppervlakte 36 velden zijn en dat is in tegenspraak met het feit dat het grotere vierkant A_0 een oppervlakte heeft van 32 velden.

Slotopmerkingen

De ontdekkingsreis op het schaakbord toont een voorbeeld van een wiskundeles waarin een integratie van leerstof kan plaatsvinden en nieuwe samenhangen ontdekt kunnen worden door de leerlingen. De taak van de leraar bestaat daaruit, gelegenheden te bieden om vanuit waarnemingen vermoedens te laten ontstaan en die de leerlingen uitdagen tot verhelderende discussies. Daarbij moet de leraar niet alleen de inhoudelijke samenhang analyseren, een vakdidactisch toelaatbare vereenvoudiging plannen en uitdagend lesmateriaal ter beschikking stellen, maar moet hij zich zelf ook als lerende aan deze onderwijssituaties onderwerpen.
De daarbij vaak aan het licht komende argumenten en observaties van leerlingen moet de docent opvatten als serieuze ontdekkingen en in een open lessituatie ter discussie stellen. Zo kan hij met zijn kennisvoorsprong en zijn oog voor leerstrategieën van de leerlingen een begeleider zijn voor de zelfstandige leerprocessen van de leerlingen.

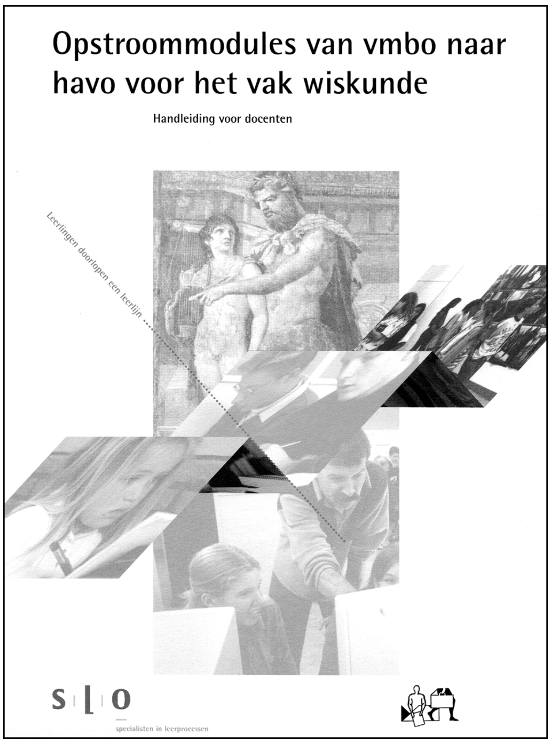
Manfred Engel, Jakob Grimm Schule, Rotenburg / Fulda, Duitsland

Vertaling: Ceciel van Aalst
Met dank aan: Annette Hoth, hoofdredacteur Gesellschafts- und Bildungspolitik, ZDF, Mainz, maakster van de documentaire 'Die Deppen der Nation', uitgezonden 24 maart 2002, ZDF en Raymond Ladewig, ZDF-Bilderdienst, voor het vervaardigen en het ter beschikking stellen van de foto's uit eerdergenoemde documentaire.

... uitdagen tot verhelderende discussies

Verschenen

Titel:	*Opstroommodule wiskunde van VMBO naar HAVO*
Auteur:	Harm van Son
Prijs:	€ 15,50
Bestelnummer:	AN 3.675.8305
Bestelwijze:	afd. Verkoop SLO, Postbus 2041 7500 CA Enschede 053 484 03 05



Voor leerlingen van VMBO-Theoretische leerweg die willen opstromen naar HAVO 4 Tweede Fase heeft de SLO een opstroommodule geschreven.
In de module maken de leerlingen kennis met een aanpak en de leerstof die in het verlengde ligt van de examenprogramma's wiskunde in de Tweede Fase. Zij kunnen voor zichzelf uitmaken of zij er affiniteit mee hebben en of zij de capaciteiten hebben voor die vormen van wiskunde.
De opstroommodule vult ook de inhoudelijke lacunes in de aansluiting tussen VMBO-Theoretische leerweg en HAVO voor het vak wiskunde.

Mannus Goris, Projectleider Doorlopende Leerlijnen