

Master Class wiskunde wordt aangeboden door universiteiten. **Hans Finkelberg** heeft de Master Class omgebouwd tot Master Practische Opdrachten. Hij laat in dit artikel zien wat een Master PO is en hoe dat in z'n werk gaat. Naar aanleiding van de Master PO 'Projectieve meetkunde' is er ook een lerarendag georganiseerd, waarvan een impressie is opgenomen.

Masterclasses worden Master Praktische Opdrachten

Inleiding

Ieder voorjaar wordt op het Mathematisch Instituut van de Universiteit Leiden een masterclass wiskunde georganiseerd voor leerlingen uit de bovenbouw van het vwo. Het doel van deze masterclasses is geïnteresseerde leerlingen in de gelegenheid te stellen kennis te maken met universitaire wiskunde. Dit kan van belang zijn bij de afweging 'ga ik wiskunde studeren of niet', maar het is vooral een bijzonder leuke ervaring die bij de meeste deelnemers een veel bredere kijk op wiskunde heeft opgeleverd. Onderwerpen die de afgelopen jaren zijn behandeld zijn discrete dynamische systemen (fractals), topologie, coderingstheorie en statistiek. Deelname aan deze masterclasses was geheel vrijblijvend en had geen verdere consequenties voor school.

Met de komst van de Tweede Fase ontstond echter de mogelijkheid deelname aan een masterclass mee te laten tellen in het examendossier in de vorm van een Praktische Opdracht of een Profielwerkstuk. Na enige kleine aanpassingen van de opzet en dergelijke is zo begin 2002 de eerste PO-variant op de masterclasses georganiseerd: de Master-PO. De organisatie van de Master-PO is als volgt:

- Donderdag: de gehele dag (werk)colleges.
- Donderdagavond: uit eten met de hele groep bij een pizzeria. Dit is niet alleen bijzonder gezellig, maar vervult ook een belangrijke sociale functie. De deelnemers zijn namelijk vaak leerlingen die op school enigszins alleen staan met hun belangstelling voor wiskunde. Gezellig uit eten gaan met een groep 'geestverwanten' is voor sommigen dan ook een verademing.
- Vrijdag: wederom (werk)colleges met aan het eind van de dag een 'open eind' aan de stof met daarbij een aantal opdrachten om thuis uit te werken en te verwerken tot een kleine presentatie.
- Vrijdagochtend drie weken later: de leerlingen presenteren in de ochtend al dan niet in groepjes de uitwerkingen van de door hen gekozen opdrachten. Hierbij krijgen ze een grote mate van vrijheid voor wat betreft keuze van opdrachten en de manier van

presenteren. Het betreft hier leerlingen die deze vrijheid heel goed aan kunnen.

- Vrijdagmiddag: de leerlingen krijgen twee verdiepende colleges over de behandelde stof. Doordat ze drie weken lang de tijd hebben gekregen de basisstof te laten bezinken, kan met deze colleges veel dieper worden gegaan dan bij de 'oude' masterclass die alleen werd gegeven op twee aaneensluitende dagen. De Master-PO wordt dan afgesloten met een hapje en een drankje en de uitreiking van de deelnamecertificaten 'ter waarde van 20 SLU'.
- De afronding op school voor een cijfer kan dan bijvoorbeeld geschieden door de presentatie met extra uitleg ook nog eens op school te houden voor de klas of de sectie wiskunde. Hoe dit verder gaat is geheel aan de wiskundedocent.

Het onderwerp van deze eerste Master-PO was Projectieve Meetkunde.

Het programma van de donderdag

Het Projectieve Vlak

We startten in het 'gewone' platte vlak. Door in het vlak te kijken naar de verzameling van lijnen door de oorsprong worden de eerste schreden gezet op het gebied van de projectieve meetkunde. Langzaam maar zeker wordt een waterdicht en vooral volkomen duidelijk model opgebouwd, dat als niet anders geïnterpreteerd kan worden dan het platte vlak met daaraan toegevoegd punten op oneindig: het projectieve vlak. Wat voor de deelnemers vooral heel opmerkelijk was, was dat deze toegevoegde punten geen bijzondere punten van het model waren.

Kegelsneden in P^2

Nadat het projectieve vlak is opgezet met homogene coördinaten, kan er gekeken worden naar kegelsneden: de oplossingsverzamelingen van homogene kwadratische vergelijkingen. We worden al meteen geconfronteerd met het nadeel dat je hebt als je werkt met reële getallen. (Waar je met complexe getallen voor een kwadratisch polynoom maar drie mogelijkheden hebt

(irreducibel, product van twee verschillende lineaire factoren of het kwadraat van een lineair polynoom) daar heb je in het reële geval vijf verschillende mogelijkheden voor die we binnen ons verhaal ‘met handen en voeten’ moesten ordenen bij gebrek aan voldoende kennis uit de lineaire algebra en matrixrekening. De drie mogelijkheden in het complexe geval zijn:

- een niet-ontaarde kegelsnede
- twee verschillende lijnen
- een dubbeltellende lijn.

De twee extra mogelijkheden in het reële geval zijn:

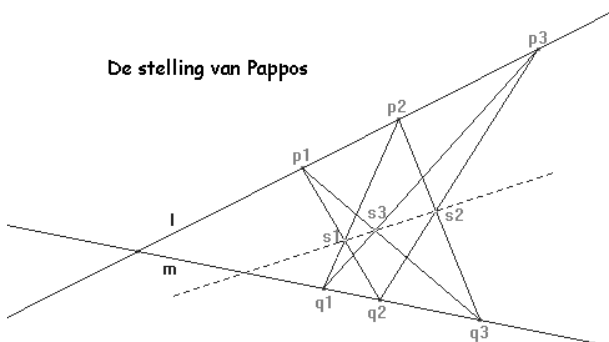
- de lege verzameling
- een geïsoleerd punt.

In het vervolg van de Master-PO hebben we ons telkens beperkt tot de niet-ontaarde kegelsnedes. Dat zijn kegelsnedes die niet bestaan uit twee al dan niet samenvallende lijnen of uit een apart punt. Het betreft dus krommen die ook echt krom zijn: ellipsen, cirkels, parabolen en hyperbolen.

Door de vergelijking te ‘liften’ naar de driedimensionale ruimte waar het projectieve vlak natuurlijk ‘geboren’ wordt (het projectieve vlak is de verzameling van lijnen in de driedimensionale ruimte door de oorsprong) kwam in zicht waarom kegelsnedes heten zoals ze heten. Wat veel indruk maakt is het inzicht dat projectief gezien er geen enkel verschil bestaat tussen cirkel, ellipsen, parabolen en hyperbolen, maar dat het affiene onderscheid alleen afhangt van de keuze van de lijn die de rol van oneindig verre punten moet spelen.

De stellingen van Pappos en Pascal

Nu zijn de deelnemers klaar voor echte werk: De stellingen van Pappos en Pascal. Deze stellingen zeggen dat drie geconstrueerde punten in een bepaalde situatie altijd collineair zijn (op één lijn liggen).



De lijnen l en m gaan door een punt.

Op lijn l bevinden zich de punten p1, p2 en p3.

Op lijn m bevinden zich de punten q1, q2 en q3.

s1 is het snijpunt van lijnstuk p1q2 en lijnstuk q1p2.

s2 is het snijpunt van lijnstuk p2q3 en lijnstuk q2p3.

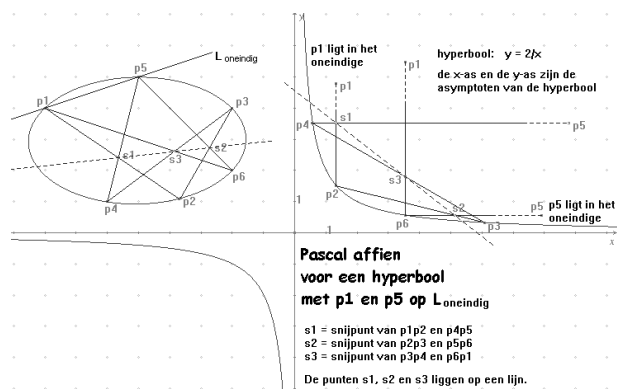
s3 is het snijpunt van lijnstuk p1q3 en lijnstuk q1p3.

De punten s1, s2 en s3 liggen op een lijn.

Het programma van de vrijdag

Kegelsnedes en dubbelverhoudingen

Met dubbelverhoudingen werd het verhaal weer een stuk technischer. Dit is echter nodig om het verschijnsel ‘harmonische scheiding’ bij kegelsnedes en poollijnen te kunnen behandelen. Wat vooral benadrukt wordt, is het feit dat harmonische scheiding tussen twee tweetallen punten affien betekende; als één van de punten op oneindig ligt, dan ligt ‘zijn partner’ precies in het midden van het andere tweetal. Bij poollijnen treedt harmonische scheiding op. Door nu deze situatie weer over te hevelen naar het affiene vlak, krijg je daar een aantal interessante stellingen die als uitspraak hebben dat een geconstrueerd punt precies in het midden van twee andere punten ligt. Al deze stellingen zijn dan niets anders dan affiene varianten op één en dezelfde projectieve stelling.



Kegelsnedes en dualiteit

Bedenkend dat bovenstaande stof in anderhalve dag is behandeld, zou je verwachten dat de deelnemers wel helemaal ‘murw’ zouden zijn. Dat waren sommigen ook wel, maar het programma was nog niet af. Voordat ze naar huis mochten om aan opdrachten te werken, werd dualiteit behandeld. Ze werden hiermee echter wel geconfronteerd met het feit dat hard werken mooie dingen kan opleveren. Dualiteit is namelijk verrassend simpel, maar o zo fraai! Dualiteit komt in feite hier op neer, dat als je in een projectieve stelling ieder woord ‘lijn’ vervangt door ‘punt’ (en omgekeerd), ‘verbindingslijn’ vervangt door ‘snijpunt’ (en omgekeerd) en ‘drie punten liggen op één lijn’ door ‘drie lijnen gaan door één punt’, dat je dan weer een ware projectieve stelling krijgt. Hiermee kon de stelling van Pappos direct worden gedualiseerd. Voor de stelling van Pascal was het nodig een kegelsnede te dualiseren. Dit bleek te lukken door als duale van een kegelsnede te nemen de verzameling van raaklijnen. Hiermee liet ook Pascal zich dualiseren en kwam de stelling van Brianchon te voorschijn.

Hierna (we zijn nu aangekomen op vrijdagmiddag) zijn de opdrachten verdeeld. Voorbeelden van opdrachten zijn:

- Maak een presentatie in Cabri van de Stelling van Pappos, waarbij één van de punten in de constructie op L-ondeindig ligt.
- Maak een affiene presentatie in Cabri van de Stelling van Pascal, toegepast op een hyperbool.
- Maak een affiene presentatie in Cabri van de duale van de Stelling van Pascal (Brianchon), waarbij je de beide asymptoten betreft als twee raaklijnen.
- Beeld de stelling over harmonische scheiding uit in het affiene geval van een parabool, waarbij het punt op oneindig één van de vier punten wordt die harmonisch gescheiden zijn.
- Beeld in Cabri een constructie uit om de raaklijnen vanuit een punt aan een hyperbool te construeren.

De deelnemers hebben een bijzonder grote vrijheid gekregen in de invulling en uitwerking van deze opdrachten. De inschatting was, dat ze deze vrijheid goed aan kunnen en er geen misbruik van maken. Dit bleek inderdaad het geval.

Het programma vrijdag drie weken later

Op de vrijdagochtend zijn de deelnemers teruggekomen met de uitwerkingen van de opdrachten. Het is een gevarieerde presentatie geworden van soms bijzonder creatieve oplossingen voor bepaalde technische problemen (bijvoorbeeld: hoe teken je in Cabri een hyperbool?). Uit deze presentaties blijkt dat ze hebben nagedacht over de stof en dat deze goed is bezonken.

Doordat de deelnemers drie weken de tijd hebben gekregen de behoorlijk ingewikkelde stof te laten bezinken, is het mogelijk de Master-PO af te sluiten met twee colleges van een niveau dat niet onderdoet voor dat van tweede- of derdejaars colleges voor wiskundestudenten. De twee behandelde onderwerpen zijn:

De kwadratische Cremona transformatie en de Grassmannvariëteit $G(1,3)$.

Deze laatste twee colleges zijn zonder meer bijzonder moeilijk. Het leek echter, dat veel leerlingen tóch in staat bleken deze verhalen grotendeels te volgen (ongeveer de helft). Sommigen zijn halverwege beide colleges afgehaakt. Dit is niet erg. Beide colleges stonden op zich zelf. Wie halverwege de eerste de draad was kwijtgeraakt, kon bij het tweede college weer 'instappen'. Niet alleen hebben ze allemaal het begin kunnen volgen, wat al een hele prestatie is, maar het is voor deze leerlingen ook wel eens goed de grenzen van hun kunnen tegen te komen. Iets wat deze leerlingen op school bij wiskunde zelden gebeurt.

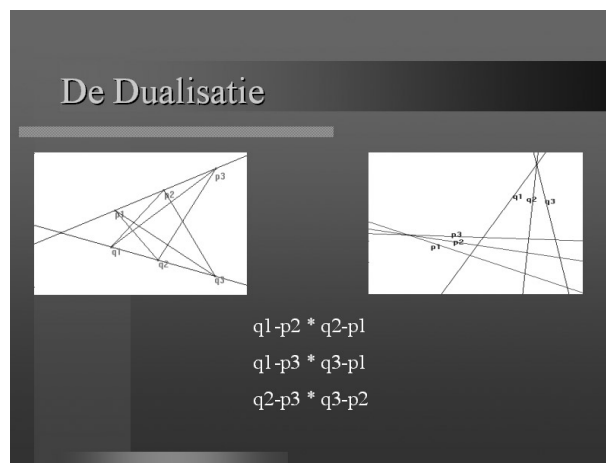
De afsluiting

Uit de evaluatie is gebleken dat de leerlingen bijzonder genoten hebben van deze Master-PO. Ze zijn in aanraking gekomen met erg mooie wiskunde en worden eindelijk eens uitgedaagd om op het puntje van hun tenen te lopen. Dat de meesten er ook nog eens in geslaagd zijn de

laatste twee colleges (grotendeels) te volgen geeft hen (en natuurlijk ook de organisatie van de Master-PO) veel voldoening. Een aantal deelnemers heeft deze Master-PO op school laten meetellen als een praktische opdracht en heeft daar mooie cijfers voor gekregen. Van twee leerlingen heb ik gehoord dat ze een acht en een tien hebben gekregen. Verdient!

De Master-PO voor leraren

Een paar weken later is op de Universiteit Leiden een nascholingsdag georganiseerd over deze Master-PO voor docenten wiskunde uit het voortgezet onderwijs. Ruim twintig docenten hebben hieraan meegedaan. In één dag hebben zij alle stof behandeld gekregen van de Master-PO voor leerlingen. Daarna is besproken hoe de ervaringen met de leerlingen zijn geweest en zijn enkele werkstukjes van de leerlingen bekeken. Op de website van de *Nieuwe Wiskrant* kunt u enkele uitwerkingen van leerlingen vinden en downloaden.



Een dia uit de powerpoint presentatie van Edo Veen en Tim Sinkeldam

Uit de evaluatie is gebleken dat het heerlijk is om een hele dag met alleen maar wiskunde bezig te zijn. De docenten zijn onder de indruk van de prestaties van de deelnemende leerlingen. Aan het eind van de dag is besproken of deze opzet voor een Master-PO in combinatie met een nascholingsdag voor docenten een goede 'formule' is. Hier is positief op gereageerd met de kanttekening dat het niveau van deze Master-PO wel bijzonder hoog is voor leerlingen en misschien wel iets té hoog. Master-PO's als deze zijn eigenlijk alleen geschikt voor een heel klein publiek. Er is voorgesteld om naast deze Master-PO een variant op te zetten voor een iets breder publiek, zodat meer leerlingen kennis kunnen maken met wiskunde op de universiteit in de vorm van een praktische opdracht. Dit idee wordt natuurlijk door ons in overweging genomen!

In het voorjaar van 2003 worden weer een of twee Master-PO's georganiseerd. Actuele informatie is te vinden

op www.math.leidenuniv.nl/~hfinkeln. Het onderwerp zal zijn: Escher en het Droste-effect. Het opvullen van het gat in de tekening van Escher heeft alles te maken met conforme transformaties op de verzameling van de complexe getallen. Tijdens de Master-PO zal alle benodigde wiskunde achter het opvullen van het gat worden behan-

deld. Belangstellenden kunnen zich via deze website of per e-mail aanmelden.

Hans Finkelberg, Mathematisch Instituut Universiteit Leiden

hfinkeln@math.leidenuniv.nl

Wintersymposium van het Wiskundig Genootschap

Al vele jaren organiseert het Wiskundig Genootschap op een van de eerste zaterdagen in het kalenderjaar haar Wintersymposium. Dit symposium is in eerste instantie bedoeld voor docenten uit het voortgezet onderwijs, maar natuurlijk is iedere belangstellende van harte welkom. De bedoeling van het Wintersymposium is om het contact tussen leraren enerzijds en wiskundigen uit de academische wereld en het bedrijfsleven anderzijds te onderhouden en te verstevigen. In een drietal voordrachten belichten ervaren sprekers facetten van een gekozen thema.

Het symposium op 11 januari 2003 zal worden gehouden in het Johan van Oldenbarnevelt Gymnasium, Thorbeckeplein 1, Amersfoort en heeft als thema Wiskunde in Techniek: welke rol speelt wiskunde in diverse technische toepassingen?

In de eerste voordracht laat de spreker zien dat op grond van de fysische dimensies die in een 'model' voorkomen, kan worden bepaald dat sommige conclusies wel en andere niet uit het model kunnen worden afgeleid. Bijvoorbeeld: kan uit de baan van een regeldruppel op het raam van een trein de snelheid van de trein worden afgeleid? De dimensie-analyse zal een krachtig hulpmiddel blijken, die zonder rekenwerk antwoord kan geven op bovenstaande vraag.

Een modern probleem: kunnen we een zoekmachine op internet een plaatje van een voorwerp aanbieden, waarna de machine informatie over dit voorwerp opzoekt?

De tweede spreker schetst welke modellen en technieken gebruikt kunnen worden om dit in bepaalde omstandigheden daadwerkelijk te realiseren.

In de afsluitende lezing leren we dat de putjes in een golfbal er niet alleen zijn om de speler meer grip te geven als hij het balletje op wil pakken, maar dat het alles te maken heeft met turbulentie. Een aantal technieken dat nodig is bij het numeriek benaderen van turbulentie zullen worden uitgelegd.

Programma:

09.30-10.00	Ontvangst met koffie en thee
10.00-11.00	De kracht van dimensie-analyse J. Molenaar (TUE/UT)
11.00-11.15	Pauze
11.15-12.15	Surfen met plaatjes P.J. Oonincx (KIM)
12.15-13.30	Pauze, waarin men deel kan nemen aan een gezamenlijke lunch
13.30-14.30	Turbulentie, golfballetjes en discrete afgeleiden R.W.C.P. Verstappen (RUG)

Deelname aan het symposium is gratis.

Aanmelding en verdere informatie op de website van het Wiskundig Genootschap (<http://www.wiskgenoot.nl/wintersymposium.html>).

Wie wil deelnemen aan de gezamenlijke lunch wordt verzocht vóór 25 december 2002 € 8,- over te maken op gironummer 3762917 t.n.v. H. Bakker te Marum.

Voor verdere inlichtingen kunt u bellen met 050 3633935 (overdag) of 0594 64 16 36 ('s avonds) of e-mailen naar h.bakker@cs.rug.nl.