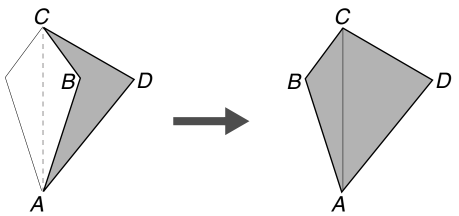
Wat te bewijzen is

Rubriek

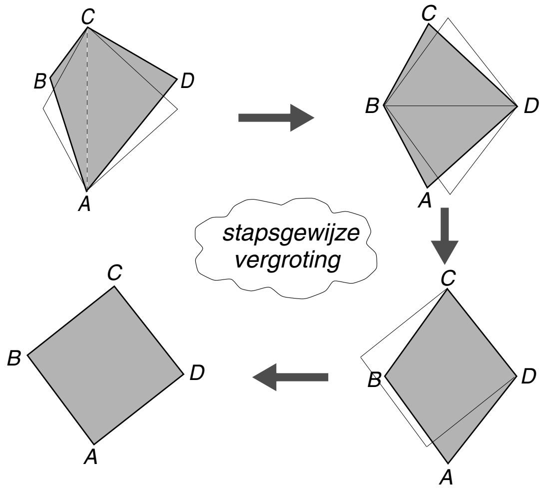
Optimaliseringsproblemen, vooral meetkundige, blijven boeien. Misschien wel het bekendst is het vraagstuk om met een koord van gegeven lengte een zo groot mogelijke rechthoekige oppervlakte te omspannen. Dit 'isoperimetrische probleem' is vanwege zijn eenvoud goed te behandelen voor jonge leerlingen. Mooi daarbij is dat zowel een meetkundige als een algebraïsche oplossing binnen hun bereik ligt.
Nadat is gebleken dat het vierkant de winnaar is, rijst de vraag of ook van alle *vierhoeken* met een gegeven omtrek het vierkant de grootste oppervlakte heeft. En als het antwoord ja is, hoe kan dat worden bewezen?
Een algebraïsche weg is zeer wel mogelijk, maar dan moet eerst een formule voor de oppervlakte van een willekeurige vierhoek worden ontwikkeld en dat vraagt wat voorkennis van trigonometrie. Ook al omdat ik het probleem in dit artikel nog wil uitbreiden naar n-hoeken, kies ik voor een meetkundige aanpak.

Stapsgewijs vergroten
Allereerst merk ik op dat slechts convexe vierhoeken kandidaat zijn om een maximale oppervlakte te geven. Onderstaand plaatje spreekt voor zich:



Iedere convexe niet-vierkante vierhoek met omtrek p kan stapsgewijs worden veranderd in een vierhoek met gelijke omtrek en grotere oppervlakte.
Stel dat van zo'n vierhoek $ABCD$ twee opvolgende zijden (bijvoorbeeld AB en BC) ongelijk van lengte zijn.
Laat nu de drie punten A, C en D vast en laat B bewegen in het vlak zonder de drager van AC over te steken en zo dat de omtrek niet verandert.
Omdat $|AB| + |BC|$ constant moet zijn, beschrijft B een halve ellips met brandpunten A en C. De oppervlakte van driehoek ABC is groter, naarmate B verder van AC af ligt en op zijn grootst als die driehoek gelijkbenig is (met top B). Net zo kan driehoek ACD met behoud van omtrek gelijkbenig (top D) worden gemaakt, waardoor er een *vlieger* ontstaat. Op dezelfde manier kunnen de beide driehoeken op diagonaal BD worden vergroot en zo ontstaat er een *ruit* met omtrek p waarvan de oppervlakte zeker groter is dan van de oorspronkelijke vierhoek. Een ruit kan gemakkelijk worden veranderd in een vierkant met behoud van omtrek en vergroting van oppervlakte.

Zo is aangetoond dat elke vierhoek met omtrek p een oppervlakte heeft die hoogstens gelijk is aan die van het vierkant met omtrek p.

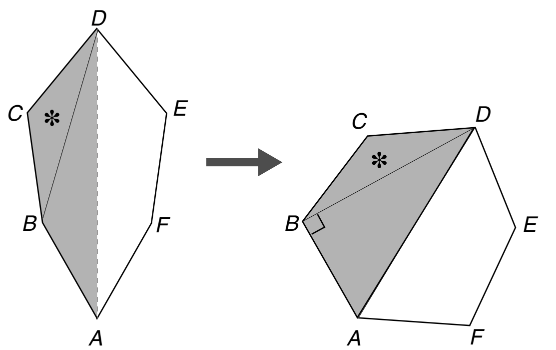


Optimale n-hoek
De vraag is nu of een dergelijk verbeterprocédé ook voor andere families van veelhoeken geldt. Een klein onderzoek leert algauw dat dit bij driehoeken zo niet lukt. Wel kan steeds worden vergroot door twee ongelijke zijden te vervangen door gelijke zijden met dezelfde som, maar dit proces is in principe oneindig. Verleidelijk is het om als volgt te redeneren: iedere driehoek die niet gelijkzijdig is, kan nog worden vergroot met behoud van omtrek, dus de gelijkzijdige driehoek moet wel de driehoek met maximale oppervlakte zijn. Deze argumentatie is echter niet correct; vergelijk maar met het volgende 'bewijs'.

Beschouw de verzameling positieve gehele getallen.
Gezocht het maximum van deze verzameling.
Bewering: dit maximum = 1.
'Bewijs':
Als x een element van deze verzamelingen en $x \neq 1$, dan geldt $x^2 > x$. Dus geen van de getallen $\neq 1$ kan het maximum zijn van de verzameling.
Het enige element dat na kwadrateren geen groter element oplevert is 1. Dat moet dus wel het grootste positieve gehele getal zijn.

De crux is dat de redenering via de verbeterstrategie alleen werkt als van tevoren vaststaat dat er een maximum is! Van de verzameling driehoeken – of algemener de familie n-hoeken bij zekere n-waarde – met een vaste omtrek is dat natuurlijk heel plausibel.
Onder de aanname dat er een maximum bestaat (hetgeen

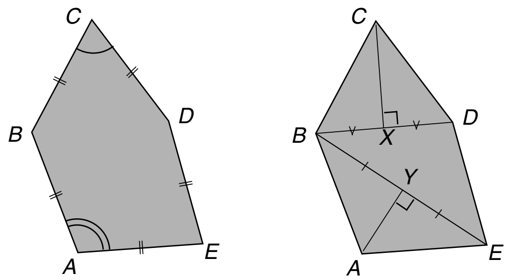
overigens met analyse kan worden bewezen) is het na het voorgaande duidelijk dat de optimale n-hoek met gegeven omtrek p over n gelijke zijden beschikt.
Voor het geval dat n een *even* getal is, kan nu betrekkelijk eenvoudig worden aangetoond dat de regelmatige n-hoek optimaal is.
Als voorbeeld neem ik $n = 6$. Vooreerst is het duidelijk dat de optimale zeshoek symmetrisch moet zijn met een diagonaal als symmetrie-as. Immers: zijn alle zijden van $ABCDEF$ gelijk aan $\frac{1}{6}p$ dan verdeelt de diagonaal AD de omtrek in twee gelijke delen. Stel oppervlakte $ABCD \geq$ oppervlakte $AFED$. Spiegel dan $ABCD$ in AD en er ontstaat een symmetrische zeshoek met omtrek p en een oppervlakte die groter dan of gelijk is aan die van $ABCDEF$.
De volgende stap is het bewijs dat de optimale zeshoek een omgeschreven cirkel moet hebben. Was dit namelijk niet het geval, dan zou uit ten minste een van de beide punten B en C de diagonaal AD onder een scherpe of stompe hoek worden gezien.
Zeg dat dit het punt B is. Driehoek BCD kan nu zo om B worden gedraaid dat $\angle ABD$ recht wordt. De oppervlakte van driehoek ABD wordt dan groter en de zo ontstane vierhoek $ABCD$ kan weer worden gespiegeld in AD.



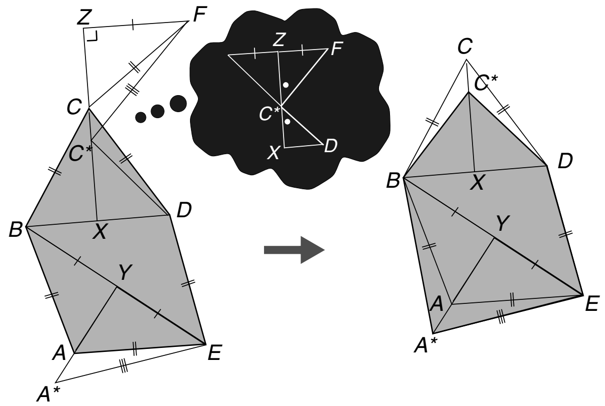
Alleen een zeshoek waarbij AD vanuit alle hoekpunten (behalve A en D) wordt gezien onder een hoek van 90°, komt in aanmerking om de maximale oppervlakte te hebben. Volgens Thales heeft een dergelijke zeshoek een omgeschreven cirkel met middellijn AD en omdat bovendien alle zijden gelijk zijn, is de zeshoek regelmatig.
Merk op dat de voorwaarde $n = 6$ niet wezenlijk is in dit verhaal; wél wezenlijk is dat het aantal zijden even is. Bij een oneven aantal gelijke zijden is er geen enkele diagonaal die de omtrek halveert, en juist daarop berust voorgaand bewijs.

Ook voor oneven-hoeken

De Griek Zenodorus, niet gehinderd door twijfel aan het bestaan van een maximum, heeft aangetoond dat *van alle veelhoeken met hetzelfde aantal zijden en gelijke omtrek de gelijkzijdige én gelijkhoekige veelhoek* – kortom de regelmatige veelhoek – *de grootste in oppervlakte is*. Als onderdeel van zijn bewijs toont hij aan (maar niet volledig) dat een ongelijkhoekige veelhoek met behoud van omtrek kan worden vergroot.
Het volgende bewijs ontleen ik aan *Stories about Maxima and Minima* van de Russische auteur Tikhomirov. Voor het tekengemak neem ik een vijfhoek met gelijke zijden en omtrek p. Als niet alle hoeken gelijk zijn, moeten er ten minste twee niet-opvolgende hoeken ongelijk zijn (het bewijsje hiervan laat ik aan de lezer over).
Stel nu $\angle A > \angle C$, dan volgt eenvoudig $|EY| > |DX|$, waarbij Y en X de middens zijn van BE en BD.



Het idee is nu om $ABCDE$ te veranderen in een veelhoek met kleinere omtrek, maar met grotere oppervlakte.
Als dat lukt, kan met zekerheid worden gezegd dat een ongelijkhoekige vijfhoek niet optimaal is.
In onderstaande figuur (links) is om te beginnen driehoek CFZ congruent met AEY zo geplaatst dat CZ in het verlengde ligt van XC. Verder is geconstrueerd de kortste weg FC^*D van F naar D via de lijn XZ; naar de oplossing van een bekend optimaliseringsprobleem maken FC^* en DC^* gelijke hoeken met XZ.



Omdat $\angle FCZ = \angle EAY > \angle DCX$ is het zeker dat:

$$|CF| + |CD| > |C^*F| + |C^*D|$$

en ook dat C^* tussen C en X ligt.
Vervolgens is driehoek A^*YE congruent met CZF geconstrueerd, waarbij A^* op het verlengde van YA ligt.
De vijfhoek A^*BC^*DE heeft nu een kleinere omtrek dan $ABCDE$ en ... een grotere oppervlakte.
Het eerste volgt uit de ongelijkheid hierboven gecombineerd met: $|C^*F| = |A^*E|$ en $|CF| = |AE|$.
De tweede bewering volgt uit een vergelijking van de driehoeken CC^*F, CC^*D en AA^*E. De eerste en de derde driehoek zijn congruent. Verder is: oppervlakte $CC^*F >$ oppervlakte CC^*D, want $|FZ| = |EY| > |DX|$.
Dus de twee aangeplakte driehoekjes BAA^* en EAA^* zijn samen groter in oppervlakte dan de weggesneden exemplaren BCC^* en DCC^*. Daarmee is het bewijs voltooid.

Martin Kindt, martin@fi.uu.nl