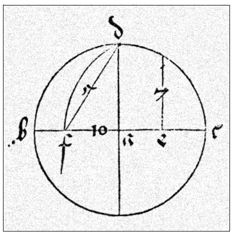
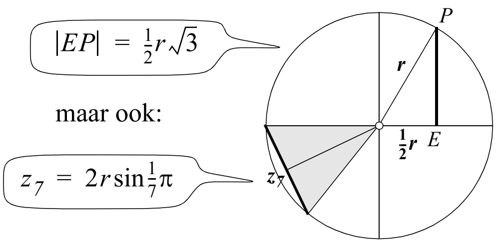
Wat te bewijzen is

Rubriek

De schilder Albrecht Dürer schreef een vierdelig meetkundig instructieboek – *Underweysung der Messung*, 1525 – bedoeld voor aankomende beeldende kunstenaars. Aan de hand hiervan zouden die zich kunnen bekwamen in het construeren met passer en liniaal en het correct tekenen in perspectief. De meester had in 1507 in Venetië voor één dukaat het beroemde boek van een andere meester, Euclides, weten te bemachtigen. In de openingszin van de *Underweysung* spreekt Dürer over de zeer wijze Euclides die de fundamenten heeft gelegd onder de meetkunde. Dürer begint dan met bespiegelingen over de begrippen 'punt' en 'lijn' in de Griekse traditie. Denk nu niet dat Dürer's werk de geest van de *Elementen* ademt. Het is vooral een opsomming van meetkundige vormen en constructiemethodes; de illustraties zijn vaak prachtig, maar bewijzen komen er nauwelijks in voor.
Na een eerste deel over kromme lijnen ('schlangenlinie'), komen de 2-dimensionale figuren aan de beurt.



Daarbij is veel plaats ingeruimd voor regelmatige veelhoeken. Hiernaast staat een van Dürer's plaatjes. De met de cijfers 7, 5 en 10 aangeduide lijnstukken geven de lengte van de zijden van de in de cirkel te beschrijven regelmatige evenzoveelhoeken.
Vanaf hier geef ik de zijde van de regelmatige n-hoek, die natuurlijk lineair afhangt van de straal r van zijn omgeschreven cirkel, kortweg aan met z_n.
Nu weten we sinds Gauss dat de regelmatige zevenhoek niet met passer en liniaal construeerbaar is. Dürer's constructiemethode is niet exact, maar geeft een *benadering* van de zijde van de zevenhoek. Dat valt gemakkelijk na te gaan. De schrijver vermeldt dat zijn lijnstuk 7 – in onderstaande figuur EP – langs de middelloodlijn van een straal valt, zó dat:

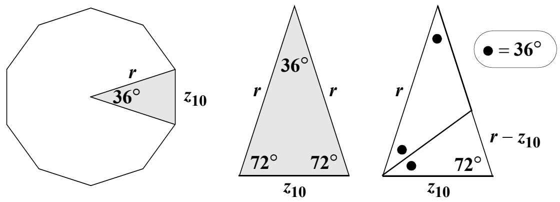


Mijn GR geeft:

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{3} \approx 0.8660254030 \quad \text{en} \quad 2\sin\tfrac{1}{7}\pi \approx 0.8677674782$$

Op een straal van 10 meter een afwijking die minder is dan 1.75 cm ... men kan zich voorstellen dat dit voor artistieke doeleinden aanvaardbaar is.

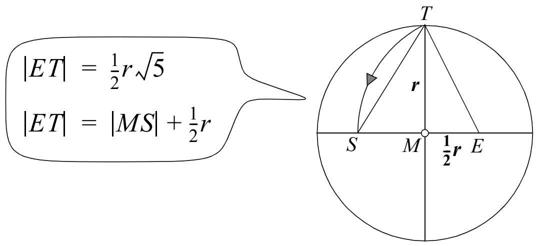
De klassieke constructies van 5- en 10-hoek.
De door Dürer bedoelde constructie van z_5 en z_{10} is wél exact met passer en liniaal uitvoerbaar en als zodanig terug te vinden in de Almagest van Ptolemaeus.
Neem eerst de regelmatige tienhoek.



In de derde figuur zijn twee gelijkvormige driehoeken te vinden (hoeken 36°, 72°, 72°) en daaruit volgt dan:

$$\frac{r - z_{10}}{z_{10}} = \frac{z_{10}}{r}$$

ofwel: $\quad z_{10}^2 + rz_{10} = r^2 \qquad$ **(i)**
Anderzijds:



Gevolg:

$$(|MS| + \tfrac{1}{2}r)^2 = \tfrac{5}{4}r^2$$

en dus:

$$|MS|^2 + r|MS| = r^2 \qquad \textbf{(ii)}$$

Uit (i) en (ii) volgt nu: $|MS| = z_{10}$

Ptolemaeus baseerde zich op het laatste (dertiende) boek van Euclides' Elementen. Propositie 9 zegt:

$$z_{10} : z_6 = z_6 : (z_6 + z_{10})$$

Met $z_6 = r$, komt dit op hetzelfde neer als bewering (i).
Euclides vervolgt dan met propositie 10:

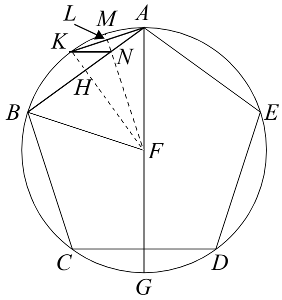
$$z_5^2 = z_6^2 + z_{10}^2$$

Die stelling rechtvaardigt Ptolemaeus' constructie van z_5, immers in bovenstaande figuur geldt:

$$|TS|^2 = r^2 + |MS|^2$$

Het bewijs van Euclides
Euclides' bewijs van zijn propositie 10 is zo fraai dat ik het op deze plaats nog eens wil doen herleven.

De figuur toont een cirkel (middelpunt *F*) met ingeschreven regelmatige vijfhoek *ABCDE*.



G is het diametrale punt van *A*.
De straal *FK* staat loodrecht op zijde *AB* en snijdt die zijde in *H*. De straal *FM* staat loodrecht op *KA* en snijdt *AB* en *KA* respectievelijk in *N* en *L*.
De voorbereidingen zijn nu getroffen.
Euclides begint dan zijn bewijs met de afleiding dat boog *GC* gelijk is aan de helft van boog *CGD* met als conclusie dat de koorde op boog *GC* gelijk is aan z_{10}.

Vervolgens toont hij aan dat $|AK| = z_{10}$.
Dit is eenvoudig zo, omdat *FK*, zijnde de bissectrice van $\angle AFB$, de boog *AKB* middendoor deelt.
Omdat *FM* de bissectrice is van $\angle AFK$ geldt ook:
boog GC = boog $AK = 2 \times$ boog KM
Het hierop volgende deel van het bewijs schrijf ik in de vorm van een schema:

bg $GC = 2 \times$ bg KM
bg $CB = 2 \times$ bg BK
\+ ———————————
bg $GCB = 2 \times$ bg BKM

omtrekshoek is half zo groot als corresponderende middelpuntshoek

$\Downarrow$ $\qquad\qquad\qquad$ $\Downarrow$

$\angle GFB = 2 \times \angle BFM$ $\qquad$ $\angle GFB = 2 \times \angle BAF$

$\Downarrow$

$\angle BFM = \angle BAF$

Nu volgt dat de driehoeken *FBN* en *ABF* gelijkvormig zijn, want behalve de gelijke hoeken *BFM* en *ABF* hebben zij ook nog $\angle ABF$ gemeenschappelijk.
Uit die gelijkvormigheid volgt dan:

$$|BN| : |FB| = |BF| : |AB|$$

en dus

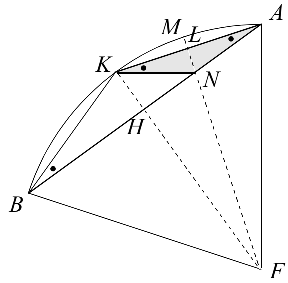
$$|AB| \times |BN| = |BF|^2 \qquad (*)$$

Let nu op het uitvergrote deel van de vorige figuur (bovenaan de volgende kolom):
Omdat $ML \perp AK$ en $|AL| = |LK|$ geldt: $|KN| = |AN|$ met als gevolg: $\angle LKN = \angle LAN$
Anderzijds: $\angle LAN = \angle KBN$, zodat $\angle LKN = \angle KBN$
Nu volgt dat de (gelijkbenige) driehoeken *ABK* en *AKN* gelijkvormig zijn, dus:

$$|AB| : |AK| = |AK| : |AN|$$

ofwel

$$|AB| \times |AN| = |AK|^2 \qquad (**)$$

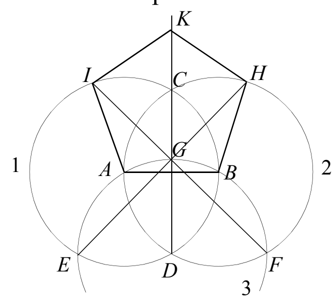


Sommatie van de regels (*) en (**) levert op:

$$|AB|^2 = |BF|^2 + |AK|^2$$

ofwel: $z_5^2 = z_6^{\,2} + z_{10}^2$. Q.E.D.

Een alternatieve constructie?
Dürer vermeldt nog een tweede constructie van de vijfhoek, uitvoerbaar met een passer met vaste opening.



Het voorschrift hierbij luidt aldus:

- teken een lijnstuk *AB*
- teken de cirkels 1 en 2 met middelpunten *A* en *B* en straal $|AB|$, en verbind hun snijpunten *C* en *D*
- teken de even grote cirkel 3 met middelpunt *D*
- snijdt cirkel 3 met de cirkels 1 en 2 (punten *E* en *F*) en met lijnstuk *CD* (punt *G*)
- trek de lijnen *EG* en *FG*; noem de snijpunten met de cirkels 1 en 2 die op het verlengde van *EG* en *FG* liggen, respectievelijk *H* en *I*
- de cirkels met de middelpunten *I* en *H* die achtereenvolgens door *A* en *B* gaan, snijden elkaar in *K.*

De vijfhoek *ABHKI* zou volgens Dürer regelmatig zijn. Aan de gelijkzijdigheid hoeft niet te worden getwijfeld. Maar hoe zit het met de gelijke hoeken? Ik voer de constructie uit met Cabri en vraag het programma naar de grootte van de hoeken. Antwoord: $\angle A = \angle B \approx 108.4°$, $\angle H = \angle I \approx 109.2°$ en $\angle K \approx 107°$. Nee dus.
Hier wreekt zich het beoefenen van meetkunde zonder bewijzen. Dürer's bron hierbij was dan ook zeker niet het werk van Euclides. Net als bij de zevenhoek is hij zich er vermoedelijk niet van bewust geweest dat dit een benaderingsconstructie is. Ik leid dit af uit het feit dat hij bij benaderingsconstructies van de 11-hoek en de 13-hoek wél zegt dat het niet-exacte constructies betreft.
Overigens is het uitvoeren met Cabri van dit type constructies, exact of niet-exact, een amusante en leerzame activiteit voor jong en oud.

Martin Kindt, martin@fi.uu.nl