Op 25 juni 2003 sprak **Jan Aarts** zijn afscheidsrede uit op de TU Delft. In deze rede staat de versluierde wiskunde centraal; in het vak zelf en in het onderwijs. Wellicht dat de vooruitgang ook weer voor ontsluiering zorgt...

Versluierde wiskunde

Idee 529 van Multatuli[1] begint aldus:

529. Ik vond onlangs een nieuw bewys voor de Stelling van PYTHAGORAS. Hier is het. Door, als op nevenstaand voorbeeld, zes driehoeken te construeeren — ieder gelyk aan den gegeven rechthoekigen driehoek — verkrygt men twee gelyke kwadraten, A B en C D. †) Als men van elk dezer figuren vier driehoeken aftrekt, bewyst de gelykheid van 't overschot aan weerszy, wat er te bewyzen was.

Eenvoudiger kan het niet, dunkt me. Na dit bewys gevonden

Voorlopig einde citaat. Het overschot aan weerszij, waarvan hier sprake is, bestaat aan de ene kant uit de twee kwadraten op de rechthoekszijden en is aan de andere kant het kwadraat op de hypotenusa. De som van de kwadraten op de rechthoekszijden is dus gelijk aan het kwadraat op de hypotenusa. Dat is de Stelling van Pythagoras.

Na een bespreking van de prioriteit van het bewijs vervolgt Multatuli het Idee 529:

> 'Ik hoop dat iemand vragen zal, welk nut heeft het te zoeken naar eenvoudiger bewyzen voor een bekende waarheid? Dit streven leidt tot helderheid van opvatting, en gewent ons aan duidelijke voorstelling. 'Bien poser une question, c'est presque la résoudre.' Dit geldt zowel in de menskunde, moraal, politiek, enz. als in de eigenlyk gezegde wiskunde. De Natuur kent al die onderscheidingen niet. [...] De leerlingachtige verdeeling in verschillende soorten van kunden, in logiën, is 'n gevolg onzer kleinheid, die niet in staat is alles te gelyk te omvatten. Wy ontleden, waar de Natuur samenvat en spellen wat zy schryft. Nu, schande is het niet, dat wy door spellen tot lezen moeten komen. Maar 't is van belang te onthouden, dat ons spellen geen lezen is.'

Met deze rede sluit ik een periode van 36 jaar aan deze universiteit af. Nadat ik hier zes jaar lector was geweest, werd ik in 1973 door H.M. de Koningin benoemd tot gewoon hoogleraar in de afdeling der algemene wetenschappen aan de technische hogeschool te Delft om onderwijs te geven in de zuivere en toegepaste wiskunde. Gedurende die periode van 36 jaar heb ik, gemiddeld genomen, mijn aandacht gelijkelijk verdeeld over onderwijs, onderzoek en organisatie. Het gaat bij een universiteit primair om onderwijs, maar het onderzoek is de drijvende kracht achter het onderwijs en door de grootschaligheid van het universitair onderwijs kun je niet ontkomen aan actieve deelname aan coördinatie en organisatie. De TU is een goede werkgever geweest die mij alle ruimte gegeven heeft voor het ontplooien van eigen initiatieven. Zo mocht ik gedurende vele zomers mijn surplus aan energie omzetten in gasthoogleraarschappen. Dit heeft veel betekend voor mijn wetenschappelijke vorming en geleid tot een gedurige samenwerking met Togo Nishiura, Dave Lutzer en Lex Oversteegen. Zowel bij onderwijs, als onderzoek, maar ook bij organisatorische taken heb ik altijd gestreefd naar helderheid van opvatting en duidelijke voorstelling. Toch, of misschien juist daarom, geef ik er de voorkeur aan om het nu verder niet expliciet te hebben over lokale gebeurtenissen uit al die jaren. Ik wil spreken over wiskunde, in het bijzonder over mijn eigen vakgebied, de meetkunde, en over versluierde wiskunde.

Diegenen onder u die nog meetkundeonderwijs hebben genoten, denken daar misschien met weemoed aan terug. Waarover ging het in de meetkunde? Als ik, geheel willekeurig, drie lijnen teken dan gaan die meestal niet door één punt; doen ze dat wel dan is er iets bijzonders aan de hand. Evenzo, als ik drie punten aanstip, dan liggen die meestal niet op één lijn; is dat wel het geval dan is dat opmerkenswaard. Drie lijnen gaan meestal niet door één punt, maar zijn de zijlijnen van een driehoek, een vlakke figuur die begrensd wordt door drie lijnstukken, de zijden.

fig. 1 Eulerlijn op Ex Libris van Bottema

Bij een driehoek zijn er vele merkwaardige lijnen, bijvoorbeeld de middelloodlijnen, de zwaartelijnen en de hoogtelijnen. Het is opmerkenswaard dat de drie middelloodlijnen van een driehoek door één punt gaan, het middelpunt M van de omgeschreven cirkel; de drie zwaartelijnen door één punt gaan, het zwaartepunt Z; de drie hoogtelijnen door één punt gaan, het hoogtepunt H. Nog opmerkelijker is het dat de drie zojuist genoemde punten en M, Z en H op één lijn liggen, die naar haar ontdekker-lijn van Euler genoemd wordt[2].

De meetkunde wordt niet door iedereen in gelijke mate gewaardeerd. De scheiding der geesten ontstaat door de strenge toepassing van de deductieve methode, die altijd en overal dominant aanwezig is, door de één geprezen, maar door de ander verfoeid. De schoonheid en het nut van een bewijs liggen niet zozeer in de zekerheid die het verschaft omtrent de juistheid van een bewering, maar veeleer in het inzicht in de samenhang van de theorie die het geeft. Door het bewijs komt men van spellen tot lezen.

Rond 300 voor Christus heeft Euclides de toen bekende wiskunde te boek gesteld[3]. De stijl van de Elementen, de deductieve methode en de ordening van het werk, heeft zijn stempel gedrukt op de beoefening van de wiskunde. Tot in het midden van de vorige eeuw was het werk van Euclides letterlijk het schoolvoorbeeld van wiskunde. De methode van Euclides heeft ook buiten de wiskunde navolging gekregen. Spinoza heeft twee van zijn werken volgens die methode ingericht, namelijk de Ethica, ordine geometrico demonstrata, volgens de meetkundige ordening uiteengezet[4], en de delen I en II van de beginselen van de wijsbegeerte van René Descartes, more geometrico demonstratae, in meetkundige trant uiteengezet[5]. Verder dient in dit verband ook de verhandeling Tractatus Logico-Philosophicus van Wittgenstein[6] genoemd te worden.

Van eminent belang voor de ontwikkeling van de meetkunde is het werk van Descartes. Hij laat in de appendix van zijn Discours de la Méthode, getiteld Géométrie[7], zien hoe algebraïsche methoden aangewend kunnen worden om meetkundige problemen op te lossen. Sinds Descartes gebruikt men coördinatensystemen om de posities van punten in het vlak vast te leggen. In een rechthoekig coördinatenstelsel wordt de plaats van een punt P vastgelegd door zijn cartesische coördinaten, dat zijn de loodrechte projecties p_1 en p_2 op de assen: men schrijft $P = (p_1, p_2)$. De afstand tussen de punten $A = (a_1, a_2)$ en $B = (b_1, b_2)$ wordt nu berekend met de Stelling van Pythagoras:

$$\text{afstand } (A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

Voor de ruimte kan men iets dergelijks doen, maar nu met drie onderling loodrechte assen in plaats van twee. Zoals Grassmann rond 1850 liet zien, is er niets dat ons belemmert in abstracto buiten de concrete wereld te treden. Het is, in gedachten, mogelijk om bijvoorbeeld tien onderling loodrechte assen te beschouwen, of zelfs oneindig veel. In het eerste geval is een punt een rijtje van tien getallen, in het tweede geval een geschikt oneindig rijtje. De afstanden van het punt $A = (a_1, a_2, ...)$ tot het punt $B = (b_1, b_2, ...)$ wordt berekend met een formule van de vorm:

$$\text{afstand } (A, B) = \sqrt{\sum (b_i - a_i)^2}$$

waarin men weer de Stelling van Pythagoras herkent. Zo worden de tiendimensionale euclidische ruimte, respectievelijk de Hilbertruimte, gemaakt. Het zijn geen concrete objecten die men ergens zou kunnen aantreffen, maar abstracte creaties van de wiskunde. Grassmann was zich bewust van het feit dat hier iets heel bijzonders aan de hand is. Door telkens nieuwe richtingen toe te voegen onstaat uit een enkel punt eerst een lijn, vervolgens een vlak en dan de ruimte. Grassmann merkt op[8]: '[...] und weiter kann die Geometrie nicht fortschreiten, während die abstracte Wissenschaft keine Gränze kennt.'

Als je de wiskunde opvat als beschrijving van de tastbare of zichtbare werkelijkheid dan kom je niet verder dan drie dimensies, maar de abstracte wereld van de wiskunde kent geen grenzen. De overgang van de zintuiglijk waarneembare driedimensionale wereld naar de abstracte vierdimensionale ruimte is als die van een kerkinterieur van Saenredam, een poging tot minutieuze, realistische weergave van de besloten ruimte, naar het Corpus Hypercubus van Dali, een surrealistische voorstelling rond de schaduw van de vierde dimensie, de uitslag van een vierdimensionale hyperkubus.

fig. 2 Saenredam en Dali

Vele eigenschappen van de ons vertrouwde planimetrie en stereometrie kunnen overgebracht worden naar de nieuw bedachte ruimten. De meetkunde van deze ruimten wordt ontwikkeld met de vertrouwde meetkunde als voorbeeld. Dit alles is niet alleen voer voor wiskundigen. De Hilbertruimte, en meer algemeen de functieruimten, vormen het natuurlijke kader voor beschouwingen over approximaties van functies, voor optimaliseringproblemen en voor de behandeling van differentiaalvergelijkin-

gen. Tegenwoordig bestaat de meetkunde uit een waaier van vakken: klassieke meetkunde, inclusief projectieve meetkunde, euclidische en niet-euclidische meetkunde, convexe en discrete meetkunde, differentiaalmeetkunde, algemene topologie, algebraïsche topologie, variëteiten en cell-complexen, globale analyse en analyse op variëteiten. Deze verdeling van de wiskunde in verschillende soorten van kunden is niet zozeer een gevolg van onze kleinheid, maar duidt veeleer op de enorme vlucht die de wiskunde heeft genomen. De indeling is enigszins willekeurig en in de opsomming van de meetkundevakken komt de algebraïsche meetkunde niet voor; die wordt eerder bij de algebra dan bij de meetkunde geplaatst. In de ontwikkeling van de meetkunde, in brede zin, heeft er een verschuiving plaatsgevonden van aandacht voor eigenschappen van individuele objecten naar studies van transformaties. In de gewone meetkunde, de planimetrie en stereometrie, nemen de spiegelingen een prominente plaats in: alle andere afstandbewarende transformaties kunnen verkregen worden door het na elkaar uitvoeren van geschikte spiegelingen. Wanneer je eens wat vaker in de spiegel kijkt, kun je een goed beeld krijgen van wat er

fig. 3 Spiegeling en anamorfose

bij een spiegeling, in wiskundige zin, gebeurt. Het spiegelbeeld is een getrouwe kopie van het origineel en, wiskundig bezien, zijn spiegelbeeld en origineel gelijkwaardig. Van punt tot punt is de correspondentie tussen beeld en origineel vastgelegd. Vervangen we de gewone spiegel door een cilinder- of kegelvormige spiegel, dan is de correspondentie tussen origineel en beeld veel ingewikkelder. Men spreekt dan van anamorfosen, wat letterlijk betekent: opnieuw vormgegeven[8]. De correspondentie tussen origineel en beeld is zó ingewikkeld dat het lijkt alsof het beeld opnieuw gevormd is, onafhankelijk van het origineel. We hebben hier te maken met een relatief eenvoudig voorbeeld van een topologische transformatie. Topologische transformaties zijn abstracte anamorfosen. Het begrip van topologische transformatie is nogal subtiel. Nemen we aan de ene kant een vlak V en aan de andere kant een vlak waaruit een compacte figuur A is weggelaten, V\A, dan bestaat er tussen deze twee verzamelingen géén topologische transformatie. Iets dergelijks geldt ook in de 10-dimensionale euclidische ruimte. Maar in de Hilbertruimte, de ruimte met oneindig veel onderling loodrechte richtingen, is de situatie heel anders. Tussen de Hilbertruimte waaruit een compacte figuur is weggelaten en de Hilbertruimte zelf bestaat er wel een topologische transformatie, al is het knap lastig om een dergelijke transformatie te beschrijven. Dit werd vijftig jaar geleden door Klee ontdekt[9]. Men zegt wel: de Hilbertruimte waaruit een compacte figuur is weggelaten en de Hilbertruimte zelf hebben dezelfde vorm; een compacte figuur verdwijnt uit de Hilbertruimte zonder een vacature achter te laten. Maar om dat verschijnsel waar te nemen, hoef je tegenwoordig niet meer naar de Hilbertruimte.

fig. 4 Het vlak V en het vlak V\A

In een moderne aanpak is de transformatie van een ruimte in zichzelf geen statisch begrip, maar bij een transformatie hoort een dynamisch beeld, dat verkregen wordt door die transformatie herhaald toe te passen. We maken als het ware een film. Deze abstracte film is een eindeloze opeenvolging van frames, momentopnamen van een evolutieproces. Ieder frame is een opname van de ruimte, die bekeken wordt, en ieder frame is uit het vorige ontstaan door toepassing van de betreffende transformatie. Als we zo'n abstracte film afdraaien, dan kunnen we van ieder punt zien hoe het beweegt. Sommige punten lopen in het rond, andere komen in beeld en weer andere verdwijnen uit beeld. Wat waargenomen wordt, ligt al besloten in de afbeelding zelf. Door de dynamische beschouwing van de transformatie worden versluierd aanwezige eigenschappen van de afbeelding aan het licht gebracht alhoewel je erover kunt twisten of die eigenschappen voor hun ont-

fig. 5 Julia-verzameling

sluiering al bestonden. Als voorbeeld bekijken we de transformatie $f(z) = 0,36 \cdot e^z$ van het complexe vlak. De afloop van de film kunnen we in één plaatje samenvatten: de punten in de grijze waaier verdwijnen uit het beeld, de punten in het zwarte gebied blijven. De gekleurde waaier wordt de Julia-verzameling genoemd; aan haar structuur is veel onderzoek gewijd. In het plaatje is de Julia-verzameling vertekend weergegeven. Dat heeft te maken met noodzakelijke afbreekprocedures in de berekeningen die door de computer worden uitgevoerd. In werkelijkheid ziet de Julia-verzameling er heel anders uit: het is een collectie dunne draadjes[10] en de verzameling kan topologisch vervormd worden tot de haartjes van een harige boog. De harige boog heeft een fractale structuur en is ook een model voor de Julia-verzameling van andere functies, waaronder de complexe sinus- en cosinusfunctie[11]. De laatstgenoemde eigenschap is pas tien jaar geleden ontsluierd. Nadere studie leert dat de eindpunten van de haren niet uit beeld verdwijnen, de rest van de haartjes wel; men zegt wel dat het gedrag van de afbeelding op de Julia-verzameling chaotisch is. De verzameling van alle eindpunten van haartjes heeft dezelfde topologische structuur als de verzameling van alle punten uit de Hilbertruimte waarvan alle coördinaten irrationaal zijn, de zogenaamde Erdös-verzameling[12].

fig. 6 Erdös-verzameling

De wiskunde is in een voortdurende ontwikkeling. Het tijdschrift *Mathematical Reviews*, uitgegeven door de American Mathematical Society, geeft korte samenvattingen van nagenoeg alles wat er aan wiskundig onderzoek verschijnt. Het betreft hier niet leerboeken of publicaties met enkel plaatselijke verspreiding, maar wel publicaties in internationale tijdschriften waarin gerapporteerd wordt over nieuwe vindingen. Zo'n publicatie is de vrucht van grote inspanningen. Wat men te zien krijgt zijn doorwrochte werkstukken, al het andere is in de prullenmand verdwenen. Wiskundige publicaties zijn in het algemeen niet erg toegankelijk en studie van een enkele publicatie vergt vaak al enkele dagen en soms wel weken. De *Mathematical Reviews* zijn tegenwoordig ook elektronisch te doorzoeken. Een onderzoekje van een half uur leverde de volgende gegevens op over publicaties die in het jaar 2000 zijn verschenen. Van dat jaar waren er 68616 wiskundepublicaties opgenomen, over algebra en meetkunde alleen al 12654. In de meetkunde, in brede zin, van gewone meetkunde tot differentiaalmeetkunde en differentieerbare variëteiten, verschenen in dat jaar 5093 publicaties. De gewone meetkunde neemt met 43 publicaties een bescheiden plaats in. Een publicatie de meetkunde betreffende, van de hand van Longuet-Higgens, gaat over vier merkwaardige lijnen die door één punt gaan. Om een beeld te geven van wat er heden ten dage nog aan meetkundig onderzoek wordt gedaan, zal ik het belangrijkste resultaat uit dit artikel vertellen. Verbindt men de raakpunten van de ingeschreven cirkel met de er tegenoverliggende hoekpunten, dan gaan deze lijnen door één punt, dat naar zijn ontdekker, het punt van Gergonne wordt genoemd. Iets dergelijks kan men ook doen met de aangeschreven cirkels; daarvan zijn er drie. Bij elk van de aangeschreven cirkels kan men ook weer een punt van Gergonne zoeken. Door nu bij elk van de vier cirkels, de ingeschreven cirkel en de drie aangeschreven cirkels, het middelpunt van die cirkel te verbinden met het bijbehorende punt van Gergonne ontstaan er vier lijnen. De Stelling van Longuet-Higgins[13] zegt nu dat deze vier lijnen door één punt gaan dat ligt op de eerdergenoemde lijn van Euler. Voorwaar, een bijzondere ontdekking.

fig. 7 Stelling van Longuet-Higgins

Wiskunde is maar een van de vele kunden. De natuur kent al die onderscheidingen niet. De ontwikkeling van de wiskunde staat niet los van die der andere wetenschappen. Sterker nog, zij is nauw verweven met de ontwikkeling van de natuurkunde en de technische wetenschappen. In de slotparagraaf van zijn meesterwerk 'De mechanisering van het wereldbeeld' zegt Dijksterhuis[14]: 'De mechanisering, die het wereldbeeld bij den overgang van antieke naar klassieke natuurkunde heeft ondergaan, heeft bestaan in de invoering van een natuurbeschrijving met behulp van de mathematische begrippen der klassieke mechanica; zij beduidt het begin van de mathematisering van de natuurwetenschap, die in de physica der twintigste eeuw haar voltooiing krijgt'. Met andere woorden,

wiskunde is de lingua franca van de exacte wetenschappen geworden. Het is dan ook niet verwonderlijk dat in het onderwijs van alle technische opleidingen een ruime plaats voor de wiskunde wordt ingeruimd. De laatste zin is een wellicht wat abrupte overgang naar het tweede deel van mijn rede. Daarin wil ik enkele opmerkingen over het wiskundeonderwijs maken.

Ik begin met de uitspraak dat de wiskunde die wij onderwijzen een afspiegeling dient te zijn van de levende wiskunde. Begrippen en ideeën zijn meestal niet spontaan in een flits ontstaan, maar zijn bijna altijd gevormd in een langdurig en moeizaam proces; het is mensenwerk. Bij de behandeling van een begrip kan men niet voorbijgaan aan de plaats van dat begrip binnen de wiskunde en de andere wetenschappen. Doet men dat wel dan is er sprake van versluierde wiskunde. Op de wijze van wiskundigen noem ik een onderdeel van de wiskunde versluierd indien bij de bespreking daarvan geen aandacht wordt besteed aan de achterwaartse, voorwaartse en zijwaartse relaties, anders gezegd, aan het waarom, het waarheen en het waartoe. Versluierde wiskunde is wiskunde die ontdaan is van de deductieve methode; daarbij komt men door het spellen niet meer tot lezen. Het is eigenlijk geen wiskunde meer. Nu schande is het niet dat wij door spellen tot lezen moeten komen. Maar het is van belang te onthouden dat ons spellen geen lezen is.

Om de gedachten te bepalen kijk ik naar het integraalbegrip. Voor een eerste kennismaking wordt de integraal vaak ingevoerd als de variatie van een primitieve en wordt de oppervlakte van een figuur gedefinieerd met behulp van een integraal. Daar is op zich niets mis mee. Maar bij een behandeling in een tweede ronde dient men de integraal onversluierd te behandelen als de uitkomst van een sommatieproces. Deze methode gaat terug tot Archimedes[15] en komt neer op de berekening van de oppervlakte van een figuur via approximatie door figuren die opgebouwd zijn uit rechthoeken, driehoeken en trapezia, figuren waarvan ieder kind al de oppervlakte kan berekenen. Op deze wijze ontstaan er natuurlijke verbindingen met eenvoudige numerieke methoden en, misschien belangrijker nog, kan er inzicht ontstaan in de berekeningswijze van verschillende fysische grootheden. Een nauwkeurige analyse van het proces van integratie kan dan een natuurlijke opstap zijn naar of uitzicht geven op een meer algemene maat- en integratietheorie. Ik pleit voor een geleidelijke, stapsgewijze opbouw van het onderwijs in de wiskunde. In verband hiermee wil ik wijzen op het grote belang van de onderlinge samenhang in het onderwijs, niet alleen horizontaal, binnen het curriculum van een opleiding, maar ook verticaal, over het hele traject van basisschool tot universiteit. Het onderwijs is een dynamisch proces en de programma's van basisschool, VWO en universiteit zijn in voortdurende beweging. Dat is een goede zaak, maar wel is het jammer dat de bewegingen niet op elkaar zijn afgestemd.

Al gedurende enkele decennia is er een proces gaande waardoor de wiskunde vervangen wordt door versluierde wiskunde. Bewijzen zijn zo goed als verdwenen uit het VWO en uit het wiskundeserviceonderwijs[16]. De onderlinge samenhang binnen de wiskunde en de relatie met andere vakken is zoek. In tegenstelling tot wat velen geloven, wordt de wiskunde daardoor niet gemakkelijker. Wanneer er in een wiskundige presentatie onvoldoende samenhang zit, is het ondoenlijk zijn inhoud te reproduceren. Een poging tot lezen blijft dan in het spellen steken. Omdat directie en docenten van onderwijsinstellingen onvoldoende inzicht hebben in wat goed is om aan leerlingen over te dragen, zijn de programma's veelal overladen. Onderwijsinstellingen zijn veranderd in grootwinkelbedrijven, waar keuzevakken naar eigen inzicht van de leerling uit de schappen worden gehaald. Door de moordende concurrentie tussen de instellingen wordt de kwaliteit voor de leerling, dat is een goede en evenwichtige opleiding, vervangen door kwaliteit van de inrichting, een hoog rendement. Er is weinig hoop dat in deze kommervolle toestand verbetering zal optreden. De overheid is royaal in het aanbieden van leuzen en slogans die bij de kiezer een welwillend oor vinden, maar steun voor het onderwijs komt er niet[18]. Dat is het trieste resultaat van de economisering van het onderwijs.

Op de universiteiten zijn tegenwoordig voor een eerste kennismaking met calculus veelal Amerikaanse leerboeken in zwang. Dit is een internationaal verschijnsel. De leerboeken zijn gewoonlijk geschreven onder het wakend oog van een grote gebruikersgroep. Omdat de uitgever gebaat is bij een zo groot mogelijke afzetmarkt, ontstaat er een product dat het kleinste gemene veelvoud is van een groot aantal cursussen, een product dat groot is van omvang en zwaar van gewicht. Omvang en gewicht hebben betrekking op de uitvoering, maar niet op de inhoud; die is van een ondraaglijke lichtheid[19]. Zó zijn de dictaten van de uitgevers. De docent kan er de weg niet in vinden en de student verdwaalt erin. Het zijn hogeschoolvoorbeelden van versluierde wiskunde. Het is zeer de vraag of de student met dit materiaal nog wel inzicht in de wiskunde kan verwerven. In een artikel in de Notices van de American Mathematical Society bespreekt Michèle Artigue[20] het eerste wiskundeonderwijs aan de Franse universiteiten. Het artikel gaat over het onderwijs in calculus en lineaire algebra bij het wiskundeserviceonderwijs. Het onderzoek laat zien dat studenten een redelijk niveau bereiken in standaardopgaven betreffende rekenvaardigheid, maar ook niet méér dan dat. Bij toegepaste problemen heeft de student bijvoorbeeld geen inzicht in welke grootheden hij moet integreren en welke hij moet differentiëren. Erger nog, ik citeer nu letterlijk: 'a certain number [of students] directly questioned, including the best students among them, do not hesitate to declare that in this area the surest thing is not to try to understand but to function mechanically. This circumstance does not need to be seen as a sort of cognitive fatality. What we are

observing are the economical ways of adaptation our students develop when exposed to inadequate educational practices.'

Het tweede punt dat ik kort wil bespreken betreft de gevolgen van de opkomst van de PC; zo'n 25 jaar geleden was hij er nog niet, maar nu is hij overal. De PC heeft gezorgd voor een revolutie die nog lang niet voorbij is. Op het internet kan verschrikkelijk veel informatie gevonden worden; het enige probleem is om die informatie te begrijpen. Literatuuronderzoek kan nu snel en efficiënt achter de PC worden uitgevoerd, bijvoorbeeld door via MathSciNet[21] de database van de Mathematical Reviews te doorzoeken. Maar ook zijn er voor weinig geld goede programma's te koop die het slavenwerk van de wiskunde kunnen doen: differentiëren, primitiveren, het berekenen van bepaalde integralen, het oplossen van differentiaalvergelijkingen, kortom bijna alles wat nu in de calculuscursussen wordt onderwezen. De vraag is natuurlijk: hoe hiermee om te gaan? Dit zegt Knuth[22] erover: 'Science is what we understand well enough to explain to a computer. Art is everything else we do. During the past several years an important part of mathematics has been transformed from Art to Science. [...] Science advances whenever Art becomes a Science. And the state of the Art advances too, because people leap into new territory once they have understood more about the old.'

Deze uitspraak over onderzoek in de wiskunde is evenzeer van toepassing op het onderwijs. Een groot deel van de calculus is slavenarbeid. En waar het mogelijk is moeten we dat door een machine laten doen. Zoals het hoofdrekenen en het werken met logaritmetafels door de komst van de zakrekenmachine verdwenen zijn uit ons onderwijs, zo zullen ook grote delen van de calculus uit het onderwijs verdwijnen. Als je ziet hoe de wiskunde in de praktijk bedreven wordt, dan kun je vaststellen dat al het geploeter met calculusopgaven ook niet nodig is om als ingenieur succesvol aan de slag te kunnen gaan. In feite opent de komst van de PC onverwachte mogelijkheden om het wiskundeonderwijs opnieuw in te richten. Er komt weer ruimte om aandacht te besteden aan het waarom, het waarheen en het waartoe van de calculus. Eigenlijk vind ik het jammer dat ik vandaag aan het einde van mijn periode als docent sta, en niet aan het begin.

Zestig jaar van mijn leven heb ik te maken gehad met onderwijs, als leerling, als student of als docent. Ik heb altijd veel plezier beleefd aan het geven van onderwijs. Dat heeft ongetwijfeld te maken met het feit dat ik in een onderwijzersgezin ben opgegroeid; beter gezegd, ben grootgebracht. Ook heb ik veel voortreffelijke docenten gehad. Ik noem hier slechts enkelen. Om te beginnen was dat in de vierde klas van de lagere school in Sittard meneer Schreurs, die me leerde begrijpen, zonder trucjes, hoe je $3\frac{1}{3}$ vlaai eerlijk moest verdelen over $2\frac{1}{2}$ personen, twee grote en één kleine. Op het Gymnasium van het Bisschoppelijk College te Sittard heb ik alle jaren les gehad van meneer Vaessen die, gewapend met bordpasser en meetlat, met grote overgave het bord vol toverde met mooie kleurrijke figuren en, belangrijker nog, eigen oplossingen van de leerlingen zeer waardeerde, ook al waren ze niet helemaal goed. Op de Universiteit van Amsterdam zijn er twee docenten geweest die een beslissende invloed op mijn leven hebben gehad. Professor de Bruijn ontvouwde in zijn colleges een panorama van de wiskunde. Ik waande me in een boomgaard waar de idëeen en stellingen als rijpe vruchten van de bomen vielen. Professor de Groot, mijn promotor, wist op unieke wijze zijn enthousiasme voor en zijn visie op de wiskunde over te dragen. Hij leerde me hoe leuk en spannend het was om bewijzen en eigenschappen zelf te vinden. Dat alles wat je vond al voor 99 komma 9 repetent procent bekend was, dat was voor later zorg. In Delft behoorde ik voor een groot deel van mijn onderwijs bij de groep van docenten bij het propedeutisch onderwijs algemene wiskunde. Ik wil hier met nadruk zeggen dat ik grote waardering heb voor al het werk dat de groep met die lange naam altijd heeft verzet. Een speciaal woord van dank aan K.P. Hart, Eva Coplakova en Robbert Fokkink voor de goede samenwerking. Als ik een klasgenoot was geweest van Woutertje Pieterse, dan had meester Pennewip het volgende onder ogen gekregen[23]:
Het onderwyzen van Wiskunde is een schone zaak,
En geeft het menschdom veel vermaak.
Ik weet niet of de pruik van meester Pennewip hierbij rechts of links zou hebben gestaan. Aan het voltooien van het Roverslied[24] ben ik helaas niet toegekomen.

Aan het einde van mijn rede nog dit. Wiskunde is de Koningin der Wetenschappen, een veeleisende koningin. De leden van mijn gezin hebben het daar niet altijd gemakkelijk mee gehad; *multatulerunt*. Voor hun toewijding ben ik hen veel dank verschuldigd.

Ik heb gezegd.

Noten

[1] Multatuli, *Ideeën, tweede bundel*, Uitgevers-Maatschappy Elsevier, Amsterdam 1907.
[2] zie bijvoorbeeld J.M. Aarts, *Meetkunde, facetten van de planimetrie en stereometrie,* Epsilon Uitgaven, Utrecht 2000.
[3] Euclid, *The thirteen Books of the Elements*, in drie delen, vertaald, ingeleid en van commentaar voorzien door T.L. Heath, Dover, Mineola (NY) 1956.
[4] Spinoza, *Ethica*, vertaald en ingeleid door Henri Krop, Prometheus/Bert Bakker, Amsterdam 2002.
[5] Spinoza, *Korte Geschriften*, bezorgd door F. Akkerman e.a., Wereldbibliotheek, Amsterdam 1982.
[6] Wittgenstein, *Tractatus logico-philosophicus*, Suhrkamp, Frankfurt 1984.
[7] *The Geometry of René Descartes*, Dover, Mineola

(NY) 1954.
[8] H. Grassmann. Die Ausdehnungslehre (von 1844) oder Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematiek. In H. Grassmann, *Gesammelte Mathematische und Physikalische Werke*, Band I, p. 53.
[9] J. de Meyere & H. Weijma (1989). *Anamorfosen, Kunst met een Omweg*, Aramith, Bloemendaal.
[10]V.L. Klee (1953). Convex bodies and periodic homeomorphisms in Hilbert space, *Transactions American Mathematical Society 74*, 10 - 43.
[11]R.L. Devaney & M. Krych, *Dynamics of exp(z), Ergodic Theory Dynamical systems 4* (1984), 35-52
[12]J.M. Aarts & L.G. Oversteegen (1993). The geometry of Julia sets, Transactions *American Mathematical Society 338*, 897-918
[13]J.C. Mayer (1990). An explosion point for the set of endpoints of the Julia set of $\lambda\exp(z)$, *Ergodic Theory Dynamical Systems 10* , 177-183
[14]M. Longuet-Higgins (2000). A fourfold point of concurrence lying on the Euler line of a triangle, *The Mathematical Intelligencer 22,* 54 -59
[15]E.J. Dijksterhuis (1950). *De Mechanisering van het Wereldbeeld,* Meulenhoff, Amsterdam.
[16]Thomas Heath (1981). *A History of Greek Mathematics*, Volume II, p. 19, Dover, Mineola (NY).
[17]Hiermee is bedoeld het wiskundeonderwijs door wiskundigen aan studenten van andere studierichtingen.
[18]Maria van der Hoeven, minister van Onderwijs, Cultuur en Wetenschappen en haar staatssecretaris Annette Nijs, *Laat bedrijfsleven onderwijs steunen*, NRC Handelsblad 11 februari 2003
[19]Jos Käfer, student biologie Wageningen, en Janne Kool, student wiskunde Universiteit Utrecht, *De ondraaglijke lichtheid van het onderwijs*, NRC Handelsblad, 29 januari 2003.
[20]Michèle Artigue, *The teaching of learning of mathematics at the university level*, Notices American Mathematical Society 46 (1999), 1377-1385
[21]www.ams.org/mathscinet
[22]Donald E. Knuth, voorwoord in M. Petkovšek, H.S. Wilf, D. Zeilberger, *A=B*, Peters, Wellesley, 1996
[23]verg. Multatuli, *Ideeën, eerste bund*el, Idee 385, Uitgevers-Maatschappy Elsevier, Amsterdam 1907
[24]loc. cit., Idee 397

Illustraties

Figuur 1: Eulerlijn op Ex Libris van Bottema.
Figuur 2: Links: Pieter Saenredam, *De zuidelijke koor-omgang van de Sint Bavokerk te Haarlem*, 1635, Staatliche Museen, Berlin. Rechts: Salvador Dali, *Corpus Hypercubus*, 1954, The Metropolitan Museum of Art, New York.
Figuur 3: Links: Gerrit Dou, *Vrouw aan kaptafel (detail),* 1667, Museum Boijmans van Beuningen. Rechts: vermoedelijk Hans-Heinrich Glaser, *Nar en boerin*, plm. 1650, Historisches Museum, Basel.
Figuur 4: Het vlak V en het vlak V\A.
Figuur 5: uit Robert L. Devaney en Linda Keen, red., *Chaos and Fractals*, Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, Vol. 39, 1989, American Mathematical Society, Providence(RI).
Figuur 6: Erdös-verzameling.
Figuur 7: Stelling van Longuet-Higgins.

Wiskunde A-lympiade en Wiskunde B-dag 2003/2004

In het schooljaar 2003/2004 vindt voor de vijftiende keer de Wiskunde A-lympiade plaats. De voorronde wordt gehouden op vrijdag 28 november 2003. Deze wedstrijd is bedoeld voor leerlingen uit HAVO 5 of VWO 5/6 met wiskunde A1 of A12 in hun profiel. De wedstrijd bestaat uit een voorronde op de scholen en een finaleweekend op de Veluwe.
Op dezelfde dag (vrijdag 28 november) vindt ook de Wiskunde B-dag plaats. Deze wedstrijd, die voor de vierde keer wordt gehouden, is bedoeld voor leerlingen uit HAVO 5 of VWO 5/6 met wiskunde B1 of B12 in hun profiel. Er is slechts één ronde.
Beide wedstrijden zijn bedoeld voor leerlingen die het leuk vinden om in teamverband (drie of vier leerlingen) een uitdagend probleem aan te pakken. De vaardigheden die bij de Wiskunde A-lympiade en de Wiskunde B-dag getest worden, spelen een essentiële rol in de tweede fase, met name bij de praktische opdrachten en de profielwerkstukken.
Op 28 november wordt op de eigen school 's ochtends om 9.00 uur de opdracht uitgereikt, waarna de teams tot 16.00 uur de tijd hebben om het werkstuk te voltooien. Door de beste werkstukken in te zenden, kan een school meedingen naar een van de prijzen.

Meer informatie over de Wiskunde A-lympiade kunt u vinden op http://www.fi.uu.nl/Alympiade
Over de Wiskunde B-dag kunt u informatie vinden op http://www.fi.uu.nl/wisbdag
Aan het begin van het nieuwe schooljaar hebben alle scholen voor voortgezet onderwijs informatie en aanmeldingsformulieren ontvangen.

De Wiskunde A-lympiade en Wiskunde B-dag worden georganiseerd door het Freudenthal Instituut onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde en mede mogelijk gemaakt door een bijdrage van Texas Instruments.
De netwerkbijeenkomst voor deelnemende docenten vindt plaats op 7 november 2003.