

Peter Fitting, docent wiskunde in Moers (D), heeft op het Nijmeegs Colloquium over de didactiek van de wiskunde een vurig pleidooi gehouden om de wiskunde op de middelbare school eerlijk te houden en gebaseerd op de intuïtie van leerlingen. Het wiskundige vuur kan bij komende generaties weer gaan branden als wij, leraren wiskunde, de vlammetjes weer aansteken. Dit is het tweede deel.

De kunst van het draken doden (2)

There once lived a man
who learned how to slay dragons
and who gave all he possessed
to mastering the art.

After three years
he was fully prepared but,
alas, he found no opportunity
to practise his skills. [*Dschuang Dsi*]

As a result he began
to teach how to slay dragons. [*René Thom*]

Elementaire vaardigheden benadrukken en draken vermijden

Idee: Draken doden vereist een uiterst verfijnde motoriek. Daarom moet je eerst een pre-draken-verslaan danscursus aanbieden. Om er zeker van te zijn dat de afgestudeerde leerlingen geen gevaren in het echte leven tegenkomen, stellen we examens in. Deze examens hebben een hoge academische standaard en vereisen speciale scholing voor de docenten. Om de leerlingen te motiveren gaan we vooral vaak naar het natuurhistorisch museum om gedode en opgezette draken te bekijken.

Voordelen: De veiligheid van zowel leerling als docent is verzekerd, want de draken spelen geen rol op school of in de lerarenopleiding. Het uit het hoofd leren van danspasjes beïnvloedt de ontwikkeling van de cognitieve vaardigheden bij leerlingen. Door de logische structuur van anti-draak dansen aan hen uit te leggen, kunnen de leerlingen zelf dansen maken door de regels te volgen. Door danswedstrijden te houden kunnen we een waarderingssysteem afleiden, zodat de examens objectief genoeg worden.

Nadelen: Als een leerling echt een draak tegenkomt dan wordt hij verslonden.

Wiskundige associaties

De trend waar ik op zinspeel lijkt geen essentiële rol meer te spelen in het onderwijzen van wiskunde, maar omdat we allemaal academisch geschoold zijn, hebben we hier

onze zwakheid. Als voorbeeld bekijken we het volgende uit een schoolboek uit de jaren tachtig.

Definitie: Om twee natuurlijke getallen op te tellen stel je die getallen voor door twee eindige disjuncte verzamelingen met overeenkomstig kardinaalgetal. De som van de getallen is de klasse van kardinaliteit van de vereniging van de verzamelingen.

Probleem: Wat is er verkeerd aan de volgende redenering: 'Iedere hond heeft 8 poten: 2 voorpoten, 2 achterpoten, 2 linkerpoten en 2 rechterpoten'?

De wiskundige inhoud van deze definitie is zeer serieus. Het is niet eenvoudig om de verzameling van natuurlijke getallen af te leiden uit de verzamelingenleer en om de *Peano*-axioma's na te gaan. Maar wat leren leerlingen van deze definitie, die overigens voor tienjarigen bestemd was?

Iets soortgelijks zie je in de meetkunde. Natuurlijk, Euclides definieerde nooit wat hij bedoelde met punten, lijnen en hoeken. Hij verklaarde dat alleen. In de jaren tachtig was het in Duitsland in de mode om transformatiemeetkunde te doen zonder veel aandacht te besteden aan de eigenschappen van figuren. Daar is wiskundig iets voor te zeggen: bij het schaken hoeft je niet zozeer te weten wat een koningin is, als je maar weet hoe zij kan bewegen en wat de rangorde ten opzichte van de andere stukken is. Maar de transformatiemeetkunde benadering zorgde er voor dat leerlingen geen driehoeken konden construeren uit gegeven lijnstukken.

In de jaren tachtig is er ook even iets gedaan aan formele logica. De leerlingen leerden bijvoorbeeld dat $A \rightarrow B$ betekent $A \vee (\neg B)$, en dat je $A(x) \Rightarrow B(x)$ kunt schrijven als $\forall x \in V: A(x) \rightarrow B(x)$, hetgeen indirect bewezen kan worden door de regel $[(A \rightarrow B) \wedge (\neg B)] \rightarrow (\neg A)$. De leerlingen konden dit bewijzen door de regels van de Boolese algebra toe te passen. Maar het bewijs dat $\sqrt{2}$ irrationaal is vonden ze helaas nog steeds ingewikkeld.

Uit de psychologie weten we dat transfer van verworven kennis alleen plaatsvindt als er gezamenlijke structuren ontdekt worden. Het is duidelijk dat er niet genoeg over-

eenkomsten zijn tussen de antidrakendans en het doden van draken.

Onder Duitse wiskundeleraars wordt de grap verteld dat leerlingen van de basisschool, die met een verzamelingenleerbenadering hebben leren rekenen, wel weten te vertellen dat de uitkomst van 8×7 een natuurlijk getal is, maar niet precies welk getal.

Basisvaardigheden versus gissen

Dit behoort lang niet allemaal tot het verleden. Hoe hopelozeler de situatie in scholen lijkt, zeker na het PISA-rapport, hoe meer er weer wordt omgezien naar elementaire algebraïsche en logische vaardigheden. Vreemd genoeg zit er een kloof tussen de officiële leerplanontwikkelingen en het doceren in de praktijk: toen er eindelijk in het leerplan stond dat zelfgekozen oplossingsstrategieën moesten worden benadrukt, net als het vermogen om resultaten kritisch te reflecteren, gingen veel collega's ertoe over om elementaire vaardigheden te oefenen die nodig leken om die oplossingen te vinden. Ik zie nogal wat toetsen op mijn school voorbijkomen waarvoor geen transfer van verworven kennis nodig is, laat staan problemen die een nieuwe strategie vereisen. Het zijn bijna allemaal 'drill and kill' opgaven. En ik hoor collega's vaak zeggen: 'Als ze nog geen breuken kunnen optellen, hoe kunnen ze dan ooit vergelijkingen oplossen?' En natuurlijk hebben ze gelijk. Natuurlijk moet een leerling kunnen berekenen dat

$$\frac{\frac{2}{3} - \frac{5}{7}}{\frac{13}{9} \cdot \left(\frac{5}{7} - 3,75\right)} = \frac{17}{1105}$$

maar hoeveel tijd wil je erin investeren om ze dit te laten oefenen? Ik denk dat het best belangrijk is om iets te weten van gelijknamige noemers en delen door breuken. De leerlingen zouden net zo makkelijk met breuken om moeten kunnen gaan als met gehele getallen, maar hier zijn nogal wat bijkomende vaardigheden voor nodig: het vermogen je te concentreren op saai rekenwerk en koppig doorgaan zonder reden.

Natuurlijk zijn evenveel docenten zich ervan bewust dat ze geen wiskunde doceren als ze alleen de basisvaardigheden overbrengen. Maar ze hopen dat ze daardoor toch, maakt niet uit hoe, een keer toekomen aan het echte werk: interessante problemen oplossen. Zo zijn er nog steeds docenten die hun leerlingen vertellen dat je met de bekende formule kwadratische vergelijkingen kunt oplossen, en vervolgens laten ze hun leerlingen dit zo vaak doen dat ze de formule uit hun hoofd kennen. Dit is de preparateursbenadering van draken of het meenemen van leerlingen naar het museum om opgezette draken te bekijken.

Het probleem is, denk ik, dat leerlingen niet vroeg genoeg kunnen beginnen met in te zien dat wiskunde boeiend is.

G. Polya schreef in zijn boek *Induction and Analogy in Mathematics*, Princeton University Press, Princeton 1954:

Wiskunde wordt gezien als een aanschouwelijke wetenschap. Maar dat is slechts één aspect. Voltooid wiskunde, gepresenteerd in zijn voltooid vorm ziet er aanschouwelijk uit: het bestaat alleen uit bewijzen. Maar wiskunde onder constructie lijkt op iedere andere kennis die nog moet worden. Je moet een stelling gissen alvorens hem te bewijzen, je moet het idee voor het bewijs gissen alvorens het uit te voeren. Je moet waarnemingen combineren en analogieën volgen, je moet blijven proberen, alsmat opnieuw (...) Als het leren van wiskunde op de een of andere manier op het uitvinden van wiskunde lijkt, dan moet er plaats zijn voor gissen.

En hij weet:

Ik geloof niet dat er een foolproof methode bestaat om dat gissen te leren. Het efficiënt benutten van het redeneren is een praktische vaardigheid die je alleen leert door het na te doen en te oefenen.

Het lijkt erop dat we onze leerlingen verloren zijn als we bij de creatieve wiskunde aankomen, als we ze niet van tevoren laten redeneren. Formules geven en laten oefenen met het invullen lijkt mij net zo zinloos als het telefoonboek van Nijmegen uit je hoofd leren.

Wat zijn de mogelijkheden om onze leerlingen te leren 'gissen'? (Overigens, gissen is een zwakke omschrijving van wat Polya hier werkelijk mee bedoelt. Het eerste citaat beschrijft nog het beste wat hij met gissen bedoelt.)

Kwadratische vergelijkingen

Stel dat we besloten hadden om eerst met kwadratische vergelijkingen en daarna pas met kwadratische functies aan de gang te gaan. (Zo doe ik het altijd; omgekeerd lijkt het op een didactische inversie waar Freudenthal het over heeft.)

Een mogelijkheid is het serieus nemen van spontane oplossingen van leerlingen. Als een leerling dit doet: $x^2 + 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x = 5 \Leftrightarrow x(x + 4) = 5$ dan hebben we meteen de neiging om hem te verbeteren. Maar waarom moeten we hem of haar meteen het gevoel geven dat dit spontane idee geen waarde heeft? Omdat de twee factoren in de linkerkant zo weinig met elkaar te maken hebben. Het zou kunnen helpen om het gemiddelde te bepalen en te kijken hoever ze van dat gemiddelde af liggen:

$$\mu = x + 2 \Rightarrow x = \mu - 2 \wedge x + 4 = \mu + 2$$

Dit substitueren geeft dan:

$$(\mu - 2) \cdot (\mu + 2) = 5 \Rightarrow \mu^2 - 4 = 5 \Rightarrow \mu^2 = 9 \Leftrightarrow$$

$$\mu = -3 \vee \mu = 3$$

en dat is makkelijk op te lossen.

Een andere manier zou het duidelijk stellen van een doel kunnen zijn: 'we proberen de x maar één keer voor te laten komen in de vergelijking, want dan kunnen we de vergelijking oplossen'. Laat de leerlingen uitzoeken welke manieren ze kennen om kwadratische vergelijkingen zo te vereenvoudigen en ze komen vanzelf uit bij binomiale

formules! En dan lijkt me dit:

$$x^2 + 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x =$$

$$5 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = 5 + 4 \Leftrightarrow (x + 2)^2 = 9$$

een stuk beter dan:

$$x^2 + 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 - 4 + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 2)^2 - 9 = 0$$

Beide ideeën laten ontstaan en ze vergelijken kan een bijdrage aan het ‘gissen’ leveren. De leerlingen beide ideeën laten generaliseren en te laten zien dat ze uiteindelijk hetzelfde resultaat opleveren, geeft ze de mogelijkheid eerder verworven algebraïsche vaardigheden toe te passen en oefent hun vermogen tot wiskundige deductie zoals Polya bedoelt.

En nog veel meer concepten zouden hieraan gerelateerd moeten zijn:

De grafiek van een kwadratische functie met een positieve coëfficiënt voor de kwadratische term is een dalparabool. Wanneer de top onder de as ligt, mag je veronderstellen dat de grafiek twee nulpunten heeft. Maar waar ligt die top dan? Die top zou de volgende eigenschap moeten hebben:

$$(x_0 + h)^2 + 4(x_0 + h) - 5 > x_0^2 + 4x_0 - 5 \text{ voor alle } h \in \mathbb{R}^{>0}$$

en deze ongelijkheid kan worden vereenvoudigd tot:

$$2x_0h + h^2 + 4h > 0 \text{ voor alle } h \in \mathbb{R}^{>0}.$$

en dit betekent weer dat:

$$\forall h \in \mathbb{R}^{>0}: x_0 > -2 - h \wedge \forall h \in \mathbb{R}^{>0}: x_0 < -2 - h$$

Het enige getal dat hieraan voldoet is $x_0 = -2$.

Het enige dat deze redenering aantoont is, dat *als* er een minimum is, dat het dan bij $x_0 = -2$ ligt. De gebruikelijke technieken laten de omgekeerde implicatie zien:

$$f(-2 + h) > f(-2) \Leftrightarrow 4 - 4h + h^2 - 8 + 4h - 5 > (-9) \Leftrightarrow h^2 > 0 \quad [\forall h \in \mathbb{R} \neq 0]$$

Klopt het dat deze waarde ook de positie aangeeft van de symmetrieas van de grafiek?

Symmetrie is als volgt gedefiniëerd:

$$\forall h \in \mathbb{R}: f(x_1 - h) = f(x_1 + h)$$

en je vindt $x_1 = -2$ als een voorwaarde waarvan je makkelijk kunt aantonen dat die voorwaarde genoeg is.

Terug naar de nulpunten: vanwege de symmetrie is het gemiddelde van de twee oplossingen van de kwadratische vergelijking de x -coördinaat van het minimum. En als de y -coördinaat van het minimum negatief is, dan heb je twee oplossingen.

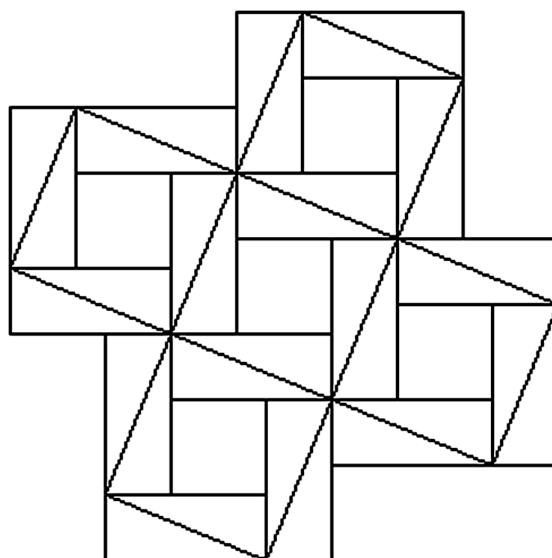
Algebraïsche ontdekkingen hebben hun meetkundige analogieën. Fundamentele inzichten bewijzen vaak hun waarde door in meerdere contexten bruikbaar te zijn. Ze wervelen door alle wiskunde heen en kunnen op hogere niveaus steeds weer worden herontdekt. Voor mij is dat het kenmerk van een écht fundamenteel inzicht.

Maar dat kost allemaal tijd, waarvan we vinden dat we die niet hebben. Een paar maanden geleden hoorde ik een interview met de pianist Claudio Arrau dat hij twee weken voor zijn dood in 1992 gaf. Hij zei dat de belangrijkste

ste pijlers van zijn kunst waren: eerbied voor de creatie van de componist, technische virtuositeit als basis waarop creativiteit kan gedijen, en toewijding. Ik denk dat dat ook voor wiskunde geldt. De schoonheid van de wiskunde ontstaat door het beoefenen van deze deugden.

Dit inzicht leidt tot een andere manier om leerlingen te motiveren om hun eigen vermoedens te maken en hun intuïtie te vertrouwen. Een ervaren collega op een lerarenopleiding in Keulen zei eens: ‘Wanneer er in de meetkunde iets moois verschijnt, dan zou je in staat moeten zijn daar een stelling over te bedenken’.

Een voorbeeld. Deze collega liep ergens in België tegen een tegel op een haard aan. Een gedetailleerde blik leert dat je hier verschillende bewijzen voor de stelling van Pythagoras in kunt zien, iets dat leerlingen die alleen maar inproducten bij vectormmeetkunde geleerd hebben niet zullen zien.



De politiek wijst ons er voortdurend op dat het niet het doel van de schoolwiskunde is om virtuositeit in de wiskunde voort te brengen, zoals Arrau piano speelt. Elementaire wiskunde, toepasbaar in dagelijkse situaties is toch genoeg en zelfs veel belangrijker? Voor sommige leerlingen klopt dat. Maar ik ben ervan overtuigd dat als we de iets begaafdere leerlingen de kans ontnemen om wiskunde als een uitdaging te ervaren, we ze uiteindelijk alleen angst aanjagen en ze stierlijk vervelen. En dat daardoor het aantal studenten in exacte vakken nog verder terugloopt. Maar alleen de toevlucht zoeken tot formele wiskunde deugt ook niet. Dat blijkt al uit de citaten van Polya. Daarover dit: allereerst wil ik beweren dat exactheid een communicatieve functie heeft. Dit slaat zowel op definities als op bewijzen. Iets definiëren betekent letterlijk het beschrijven van een concept door de eigenschappen te noemen waarin het concept verschilt van een gerelateerd concept. De noodzakelijkheid daarvan hangt af van het standpunt van degene die met zo'n concept moeten werken. Ik geloof niet in het geven van volledige formele definities bij het introduceren van onderwerpen.

Ik geloof dat de definitie van een onderwerp kan bestaan uit een proces van steeds verdere verfijningen. Een voorbeeld: een meetkundige punt kan best geïntroduceerd worden als een stip, kleiner dan die met het scherpste potlood kan worden getekend. Zolang het maar duidelijk is dat twee punten elkaar niet kunnen overlappen en dat er door ieder puntenpaar een lijn gaat. De verschillen tussen punten en stippen, tussen lijnen en snelwegen moeten wel duidelijk worden gemaakt en daar komt de wiskunde om de hoek kijken. Een functie kan best worden geïntroduceerd als een relatie waarbij ieder element van het domein een unieke koppeling heeft, zonder al te veel tijd te verspillen aan deelverzamelingen van het Cartesisch product van domein en bereik.

Limieten

Met ingewikkeldere concepten wordt het wat lastiger. Ik kan me niet voorstellen dat je zonder een goed limietbegrip kunt werken: dan zal iedere leerling zich blijven verbazen over wat nu allemaal wel en niet mag bij het bepalen van zo'n limiet. Een aantal zaken zal toch goed moeten worden uitgelegd, iets dat verder gaat dan het vaak gehoorde: $\lim_{h \rightarrow 0}$ betekent zoiets als: doe iets algebraïsch,

waardoor er zich geen catastrofes als verdwijnende noemers meer voordoen, en vul dan voor $h \rightarrow 0$ in. Het is bijvoorbeeld essentieel dat de limiet een lokale eigenschap is die niet afhangt van de functiewaarde die je ergens bepaalt. Je moet ook duidelijk maken dat limieten gebruikt worden om reële getallen te beschrijven en dat in veel gevallen de limiet niet met een decimaal getal kan worden weergegeven. En ook in dat geval moet je op de een of andere manier het bestaan van die limiet kunnen aantonen. Ofwel, wat de meeste VWO-leerlingen nu over limieten weten is niet bepaald Cauchy's formele definitie:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{>0} \exists \delta \in \mathbb{R}^{>0} \\ \forall x \in D(f) \setminus \{x_0\}: |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

maar meer dit:

je kunt limieten berekenen met de volgende eigenschappen:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0; \lim_{x \rightarrow x_0} C = C$$

als C onafhankelijk is van x :

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) * g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) * \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$\text{d) als } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$$

$$\text{dan } \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$$

Maar dit is in die zin geen definitie, dat er geen verschil wordt gemaakt tussen de functiewaarde in een punt en de limiet in dit punt. Iedere regel werkt perfect voor een leerling met de misconceptie dat $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ niets anders is

dan chic docententaalgebruik voor $f(x_0)$.

Aan de andere kant is Cauchy's definitie net zo moeilijk te begrijpen als in te typen. En hebben bovendien Newton en Leibnitz de differentiaalrekening ook niet uitgevonden zonder formele limietdefinitie? En houden leerlingen zich niet voornamelijk bezig met functies waar de regels werken en voldoende zijn? U ziet: we zijn weer op het pad van het herdefiniëren van de draken. Het concept van de limiet kan niet op deze manier verkregen worden, maar als je het formeel doet, dan ontnem je een leerling de kans er ook maar iets van te begrijpen.

Het gaat hier te ver om een fundamentele benadering te laten zien zonder in Cauchy's hel te geraken. Ik verwijs graag naar William Priestley's boek: *Calculus: An Historical Approach*, Springer-Verlag New York, Heidelberg, Berlin, 1979.

Toepassingsgerichte vraagstukken

Nadat ik de rol van de definitie besproken heb wil ik duidelijk maken dat vaardigheden geen doel op zich zijn, maar alleen zin hebben als je ze kunt gebruiken. Duitse leerlingen doen aan 'functie-onderzoek': gegeven een functie, wat is het domein, wat zijn de maxima en minima, daalt of stijgt het ding monotoon, zijn er buigpunten, asymptoten, en uiteindelijk wordt de grafiek getekend. Een nutteloze bezigheid, maar traditioneel zo gegroeid omdat de leerling al zijn vaardigheden kan laten zien in deze context. Duitse docenten zijn er uitermate bekwaam in geworden om behoorlijk pathologische functievoorschriften te bedenken. Toen drie jaar geleden het nieuwe curriculum werd ingevoerd, werden deze opgaven verbannen uit de examens. Nee, er moesten relevante toepassingen komen. In Duitsland moeten docenten opgaven aanleveren voor de examens. En er werd besloten dat er nascholing moest komen voor het vervaardigen van opgaven volgens het nieuwe curriculum. Tijdens een van die bijeenkomsten stelde een wat oudere collega zich gerust dat het niet zo'n vaart liep: tenslotte beschrijft iedere functie wel een of andere kostprijs van een of ander product. Ik vertel dit omdat het maar al te vaak gebeurt dat de toepassing bij de vaardigheid wordt bedacht en niet andersom. En tenzij de kustlijn van Nederland echt een rechthoekig veelvlak is lijkt me dit probleem niet alleen typisch Duits, een Nederlands examen gezien hebbende. Nog zo'n juweel: deze vind ik bijzonder aardig omdat het een opgave is die daadwerkelijk in het examen terecht kwam:

In een vlakke woestijn die beschreven kan worden met Cartesische coördinaten is een ongeluk gebeurd in punt $A(3, 4, 0)$. Een

reddingshelicopter vliegt langs de lijn met

$$\text{vergelijking: } \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

In welk punt zat de reddingshelicopter het dichtstbij de plaats van het ongeval? Bereken die afstand!

Zelfs de leerlingen vonden deze opgave belachelijk. Maar waarom is het dan zo moeilijk om niet gekunstelde toepassingen te vinden? Waarom lijken toepassingen zo vaak op aangeklede kale sommen? Een reden is de opleiding van de docenten en de invloed van Bourbaki's structuralisme. In Bonn heb ik destijds nooit een toepassing gezien en Hilbert's uitspraak dat de werkelijkheid zo onbelangrijk is dat je op ieder moment een bierpul een punt kunt noemen, bepaalde het karakter van mijn opleiding. Toen de axiomatische benadering zijn intrede deed verloor de wiskunde zijn ambitie om de werkelijkheid te beschrijven. We gingen ons richten op deductie uit axioma's, het bewijzen van existenties, of het bewijzen dat een stelsel van afgeleide stellingen niet strijdig was. Ik, noch mijn collega's, hebben ooit iets geleerd over toepassingen. Echte, authentieke toepassingen hebben de neiging nogal ingewikkeld te zijn.

Dan denk je aan het oude verhaal dat je de aardstraal kunt bepalen uit de hoogte van de mast van een schip en de afstand tot een waarnemer op het moment dat die het topje van de mast boven de horizon uit ziet komen. En dan zit je zelf al gauw de waarde van de sinus voor kleine hoeken te bepalen en je vraagt je af hoe men dat vroeger deed zonder Taylorreeksen of rekenmachines.

Deze complicaties lijken in schril contrast te staan met de algemene opinie dat de algebraïsche vaardigheden van onze leerlingen lijken te zijn verdwenen. Maar er zijn zoveel docenten die de lat laag leggen, alleen maar naar elementaire toepassingen kijken of eerdergenoemde pseudotoepassingen construeren. Door het nobele streven de leerling te willen behoeden voor ingewikkelde berekeningen en redeneringen, loop je wel het risico je eigen vak belachelijk te maken. De wiskunde laat zo niet zijn kracht, maar zijn onvermogen zien om grip te hebben op de werkelijkheid. En ik zie ook niet in waarom deze schijn-toepassingen motiverend zouden moeten werken. Wat zou een remedie tegen deze nonsens kunnen zijn?

Remedie

Laten we de CAS, Computer Algebra Systemen er eens bij halen. Met behulp van Derive kon ik een groot aantal complexe berekeningen toegankelijk maken voor mijn leerlingen. Zo kon ik bijvoorbeeld het oplossen van kwadratische vergelijkingen op een *eerlijke* manier leren, dat wil zeggen, niet alleen de formules voor de oplossingen geven en die zonder na te denken overal op loslaten. Zodra dat gedaan was hoefde ik geen tijd meer te verspil-

len aan het oplossen van vergelijkingen als $-(x^2 + 20x + 10) - 1,0039 + 2x + 20 = 0$. Dat lieten we over aan Derive.

Ik leer mijn leerlingen hoe je stelsels van vergelijkingen moet oplossen, zonder beperkingen: Derive lost ook 61 vergelijkingen met evenzoveel onbekenden op. Deze benadering maakt het mogelijk om vanuit de toepassingen te gaan reflecteren en over de gevolgde methode te praten, in plaats van rond te dolen in de elementaire algebra. Wanneer wiskundigen zich met de werkelijkheid bezig gaan houden, wordt er eerst een model gemaakt. De verkregen resultaten zijn afhankelijk van het binnen bepaalde grenzen arbitrair gekozen model. Binnen dat model kan logisch geredeneerd worden. De resultaten moeten altijd kritisch beschouwd worden, maar dan wordt dat nog steeds binnen dat model gedaan. Daarbuiten zouden de resultaten wel eens waardeloos kunnen zijn.

In Oostenrijk wordt Derive veelvuldig in de wiskundeles gebruikt. Oostenrijkse docenten waarschuwen dat de kloof tussen begaafde leerlingen en leerlingen die alleen maar de algebraïsche vaardigheden kunnen uitvoeren steeds groter wordt: de laatsten wordt datgene waar ze goed in zijn juist ontnomen door Derive in te zetten. Het is een fascinerende taak om een manier te vinden waarop een vruchtbare interactie tussen leerlingen kan ontstaan met het gebruik van een CAS en complexere toepassingen.

Ten slotte een paar beschouwingen over bewijzen. Ik wil benadrukken dat een stelling bewijzen voornamelijk een kwestie is van het overtuigen van een logisch denkend hypothetisch persoon dat er geen bezwaar tegen die stelling in te brengen is. Dus: ook bewijzen is een vorm van communicatie, en een bewijs ontwikkelt zich vaak uit vage redeneringen via een stadium van overtuigend verhelderende details tot een, vaak onleesbare, uiteindelijke vorm.

Om de noodzaak van een bewijs te kunnen waarderen, moet een leerling af en toe zien dat een intuïtieve redenering kan falen. Ik zie niet in hoe tweehonderd keer de hoeken van een driehoek opmeten kan dienen als bewijs voor het feit dat de som van de hoeken 180° is, zoals je wel eens in leerboeken en in lessen ziet gebeuren, zonder ook maar een woord te wijden aan de beperkingen van deze methode. Ik laat leerlingen daarom in een vroeg stadium kennismaken met het verschijnsel twijfel. Op elfjarige leeftijd laat ik ze $n^2 + n + 41$ uitrekenen voor $n = 0, 1, 2, 3 \dots$. Dat levert eigenlijk allemaal priemgetallen op. Veel leerlingen raken ervan overtuigd dat dit altijd een priemgetal oplevert. Totdat je 41 invult:

$41^2 + 41 + 41 = 43 \cdot 41$ en dat is zeker geen priemgetal! De leerlingen zien dat een stelling waar kan zijn voor heel veel voorbeelden, maar dat er toch ineens een tegenvoorbeeld opduikt. Dit inzicht maakt het lastiger om deze leerlingen iets te leren, maar ze leren wel een bewijs te waarderen! Later laat ik ze zien dat je heel voorzichtig moet zijn met bewijzen wanneer je iets aan de vooronder-

stellingen verandert. U kent vast het bewijs dat $\sqrt{10}$ geen rationaal getal is:

Noem $N(x)$ het aantal nullen aan het eind voor iedere x , bijvoorbeeld: $N(10300) = 2$.

Het is duidelijk dat $N(10x) = N(x) + 1$ en dat $N(x^2) = 2N(x)$. Stel: $10p^2 = q^2$ dan zou gelden: $2N(p) + 1 = 2N(q)$. En dat kan niet, want links staat een oneven getal en rechts een even getal.

Dit bewijs is interessant: is het niet zo dat 2 in het binaire stelsel als 10 geschreven wordt en kun je niet op dezelfde manier aantonen dat $\sqrt{2}$ irrationaal is? Maar: 4 wordt in het viertallig systeem geschreven als 10 en waarom is $\sqrt{4}$ dan niet irrationaal? Leerlingen kunnen dit zelf ontdekken! En ze vinden dat de wortel van een geheel getal ofwel een geheel getal, ofwel een irrationaal getal is.

Het werkt allemaal heel simpel: als de noodzaak om stellingen te bewijzen is aangetoond, dan lijkt het moeilijk om voorbeelden te vinden waar het waar zijn van de stelling in zekere zin voor de hand liggend is. Vragen als: 'We hebben nu voor 200 driehoeken gezien dat de som 180° is; hoe zou dat zijn voor de 201^e?' zijn wiskundig correct, maar naar mijn gevoel meer vervelend dan intellectueel uitdagend.

Mijn persoonlijke conclusies:

Definities moeten in ieder stadium helder zijn voor de leerlingen: ze moeten het concept verhelderen en het onderscheiden van vergelijkbare concepten. Ze moeten de com-

municatie bevorderen. Het nastreven van compleetheid en het te vroeg formaliseren maakt definities waardeloos voor communicatie en het beperkt de intellectuele mobiliteit, die juist gestimuleerd moet worden. Verfijningen van de definities kunnen later worden aangebracht, als de noodzaak daartoe aangetoond is.

Bewijzen zijn ook functioneel: ze moeten overtuigend zijn. Bewijzen kan leuk zijn; als de indruk wordt gewekt dat het nu eenmaal een noodzakelijk kwaad is, of als er alleen dingen bewezen worden die toch al duidelijk zijn, dan neemt de interesse in wiskunde af. Bewijzen ontwikkelen: in het begin kunnen ze gaten hebben die later pas opgevuld worden. De strekking van de argumentatie zou door inzicht geleid moeten worden in plaats van door formele manipulaties.

Toepassingen zouden niet gekunsteld en gemaakt voor de zojuist geleerde wiskunde moeten zijn. Echte toepassingen zijn ingewikkeld en het zou verstandig zijn om met collega's van andere vakken daarover samen te werken. Wiskunde geeft niet altijd bruikbare resultaten. Technische handelingen hoeven niet altijd door de leerlingen zelf uitgevoerd te worden. Een CAS maakt complexe toepassingen toegankelijker en helpt om in te zien waar wiskunde nu precies om gaat.

Carl Peter Fitting, Geschwister Scholl Gesamtschule Moers, Duitsland. e-mail: cpfitting@aol.com

Vertaling: Tom Goris.

Expositie Geometrische kunst met Lesbrieff ckv/Wiskunde

Van 6 september tot en met 23 november is in het Mondriaanhuis in Amersfoort de tentoonstelling 'De Bomen van Pythagoras, Geconstrueerde Groei' te zien. Speciaal bij deze tentoonstelling is een **lesbrief** gemaakt voor bovenbouw HAVO/VWO voor CKV en/of wiskunde.

Het Mondriaanhuis, het Amersfoortse Museum voor Constructieve en Concrete Kunst, toont werk van ca. 35 constructieve en concrete kunstenaars uit binnen- en buitenland. De werken zijn geconstrueerd op wiskundige basis en brengen tegelijk begrippen als groeien, krimpen, groter en kleiner worden, seriële verandering of vormverandering tot uitdrukking.

Deze tentoonstelling is in een samenwerking van het

Mondriaanhuis met de Stichting Ars et Mathesis tot stand gekomen.

De **lesbrief** biedt 11 verschillende wiskundig/kunstzinnige thema's waaruit gekozen kan worden. Per thema wordt extra informatie gegeven en worden kijk-suggesties gedaan, waarmee leerlingen gericht in het museum aan de slag kunnen. De bijbehorende website biedt voldoende materiaal om na een bezoek aan de tentoonstelling een werkstuk te maken: documentatie, toelichtingen en 46 foto's van tentoongestelde werken.

De Lesbrieff is op te halen op twee websites:

- de Stichting Ars et Mathesis: www.arsetmathesis.nl
- het Mondriaanhuis: www.mondriaanhuis.nl

Adres museum: Kortegracht 11, 3811 KG Amersfoort