

Zeg ‘algebraïsche vaardigheden’ in gezelschap van wiskundeleraren en er ontstaat een levendige discussie. Welke vaardigheden moeten leerlingen beheersen? Konden ze dat vroeger beter? **Paul Drijvers** onderscheidt elementaire vaardigheden en symbol sense en stelt dat het laatste belangrijker wordt door de beschikbaarheid van ICT-hulpmiddelen die het elementaire werk in toenemende mate overnemen.

Algebraïsche vaardigheden, symbol sense en ICT

Inleiding

Onder wiskundeleraren is de beheersing van algebraïsche vaardigheden regelmatig onderwerp van gesprek. Niet zelden wordt dan gesignaleerd dat de algebraïsche vaardigheden van leerlingen afnemen: ‘ze kunnen niet eens meer...’, ‘vroeger deden we dat in de eerste van de HBS’. Met name bij wiskunde B in de tweede fase van HAVO en VWO wordt vaak geklaagd over onvoldoende beheersing van algebraïsche vaardigheden. De Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren heeft op deze signalen uit het veld gereageerd. Een werkgroep over dit onderwerp, die onder meer een toetsenbank over algebraïsche vaardigheden¹ samenstelde, is ingesteld. Ook ontplooiën sommige scholen zelf initiatieven² door bijvoorbeeld oefenmateriaal te ontwikkelen.

De vraag welke algebraïsche vaardigheden de leerling tot op welk beheersingsniveau moet kunnen uitvoeren is om verschillende redenen actueel. Ten eerste heeft de herziening van de algebra in de onderbouw (W12-16) tot een andere aanpak geleid. Ten tweede is ook het karakter van algebra in de tweede fase van HAVO en VWO veranderd. Ten derde vraagt de integratie van ICT in het wiskundeonderwijs (denk ook aan de grafische rekenmachine) om een herbezinning op de rol van algebraïsche vaardigheden.

Wat verstaan we onder algebraïsche vaardigheden? Het uitwerken van $(x+y)^2$ valt eronder, het oplossen van de vergelijking $3x+5=7$, en het herleiden van $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ tot één breuk ook. Het substitueren van een getal voor een variabele en het toepassen van de abc-formule zijn ook vaardigheden die in de twee fase van HAVO en VWO van pas komen.

Maar er is meer. Behalve beheersing van dergelijke basis-algoritmen heeft de leerling een zekere mate van algebraïsche expertise nodig, op grond waarvan hij ziet welke stap verstandig is om te zetten en welke niet, welke termen handig kunnen worden samengepakt en welk deel van een expressie maar beter ongemoeid kan worden gelaten. Dergelijke algebraïsche vaardigheid wordt aangeduid met symbol sense.

In dit artikel wordt eerst het begrip symbol sense besproken aan de hand van enkele artikelen uit de jaren tachtig en negentig. Daarna komt de hernieuwde belangstelling hiervoor in het licht van het gebruik van ICT bij algebra aan de orde. In hoeverre maakt ICT-gebruik algebraïsche vaardigheden overbodig? Verandert de aard van de benodigde vaardigheden onder invloed van ICT? Kan ICT helpen bij het verwerven van symbol sense? De conclusie is dat symbol sense steeds belangrijker wordt, terwijl het uitvoeren van algebraïsche standaardprocedures meer en meer aan technologisch gereedschap kan worden overgelaten.

Symbol sense

Laten we beginnen met twee klassieke voorbeelden. Het eerste betreft de opgave ‘Hoe groot is $\frac{2z+1}{2}$ als $5 \cdot (2z+1) = 10$?’ De meeste leerlingen lossen deze opgave, afkomstig van Wagner en anderen³, op door eerst de haakjes in de gegeven vergelijking uit te werken. Dan lossen ze de vergelijking op naar z en substitueren het resultaat in de gevraagde uitdrukking. Een kwestie van elementaire algebraïsche vaardigheden, al bestaat de kans dat ergens een rekenfoutje wordt gemaakt. Van tevoren nadenken over een handige strategie en daarbij de gemeenschappelijke factor $2z+1$ herkennen, dat is een vaardigheid van een andere orde die deel uitmaakt van symbol sense.

Het tweede voorbeeld betreft de vergelijking $v\sqrt{u} = 1 + 2v\sqrt{1+u}$. Wenger⁴ beschreef hoe leerlingen en studenten van verschillende niveaus deze niet naar v konden oplossen – dus schrijven als $v = \dots$ – hoewel die toch van de gedaante $v \square = 1 + 2 \cdot v \cdot \bigcirc$ is, dus lineair in v . In deze laatste vorm zijn ingewikkeld ogende wortelvormen, die de aandacht van de lineaire structuur afleiden, ‘afgedekt’ met tegels of bordjes. Deze bordjesmethode, al aangeduid door Freudenthal⁵, is opgenomen in diverse schoolmethodes en gepropageerd door het Team W12-16⁶. Gravemeijer⁷ stelt dan ook dat je om deze vergelijking op te kunnen lossen in staat moet zijn om deel-expressies als gehelen te beschouwen zonder je verder

om de inhoud te bekomen. Om te weten of die inhoud ertoe doet, moet je de vergelijking en de deelexpressies snel kunnen scannen op het voorkomen van de onbekende, in dit geval v . De verleiding om een wortel weg te werken moet hierbij worden weerstaan. Ook dit type vaardigheden maakt deel uit van symbol sense.

In 1994 beschreef Arcavi het begrip symbol sense als het geven van betekenis aan algebraïsche expressies: 'Symbol sense is the algebraic component of a broader theme: sense-making in mathematics'⁸ (p. 32). Ook de recentere definitie van symbol sense van Zorn⁹ verwijst naar betekenis en structuur:

By symbol sense I mean a very general ability to extract mathematical meaning and structure from symbols, to encode meaning efficiently in symbols, and to manipulate symbols effectively to discover new mathematical meaning and structure. (Zorn, 2002, p. 4)

Symbol sense is voor algebra wat number sense is voor rekenen: een veelzijdig 'gevoel' voor symbolen, formules en expressies. Denk bijvoorbeeld aan het doorzien van de structuur van een formule, aan het plaatsen van 'bordjes' op delen van formules zoals in de vergelijking van Wenger hierboven en aan het geven van de betekenis aan symbolen in de context. Ook de flexibiliteit om een handige strategie te kiezen (zoals in de vergelijking van Wagner) en om expressies op een andere, equivalentere manier te schrijven is een kenmerk van symbol sense. Symbol sense slaat dus niet alleen op (letter-)symbolen, maar omvat ook de algebraïsche expertise om de structuur, syntax en betekenis van algebraïsche expressies en formules te doorzien.

Een Nederlandse vertaling voor symbol sense ken ik niet. 'Symboolgevoel' is wat te beperkt en 'gevoel voor symbolen, expressies en formules' is te lang. 'Schattende algebra', zoals Martin Kindt¹⁰ de algebraïsche variant van schattend rekenen noemt, is wel een onderdeel van symbol sense, maar dekt ook niet de gehele lading. Ik houd het maar bij de Engelse term. In het Engels wordt overigens ook wel van 'structure sense'¹¹ gesproken, en misschien zou 'algebraic literacy' nog wel duidelijker zijn.

Algebraïsche vaardigheden en ICT

Binnen het brede scala van algebraïsche vaardigheden onderscheiden we dus elementaire vaardigheden, zoals het uitwerken van haakjes en het oplossen van eenvoudige vergelijkingen, en symbol sense, dat de algebraïsche expertise omvat om handig naar symbolen, formules en expressies te kijken en daarin structuur en betekenis te herkennen. Dit onderscheid is vergelijkbaar met het verschil tussen algebraïsch rekenen en algebraïsch redeneren zoals Kemme dat beschrijft¹. Zijn algebraïsch redeneren en symbol sense niet wat we nastreven in ons wiskunde-onderwijs?

De laatste jaren is ICT in toenemende mate een rol in het algebra-onderwijs gaan spelen. Denk aan de grafische rekenmachine, aan applets die zich richten op het ontwik-

kelen van algebraïsche vaardigheden en aan software zoals VU-Grafiek die exploratie van grafische gevolgen van algebraïsche variaties mogelijk maakt. In de toekomst ligt mogelijk de integratie van symbolische rekenmachine en computeralgebra in het verschiep.

De discussie over algebraïsche vaardigheden in het algemeen en symbol sense in het bijzonder, heeft door deze integratie van ICT een nieuwe impuls gekregen. Welke invloed heeft ICT-gebruik op het ontwikkelen van algebraïsche vaardigheden? Moet je nog wel nadenken als het ICT-gereedschap het werk doet? Of is een andere soort van algebraïsche expertise vereist? In discussies over de invloed van ICT op algebraïsche vaardigheden komen vaak de volgende vragen naar voren:

- Maakt ICT de beheersing van elementaire algebraïsche vaardigheden overbodig?
- Vraagt zinvol ICT-gebruik om een ander type algebraïsche vaardigheden zoals symbol sense?
- Kan ICT het verwerven van symbol sense ondersteunen?

Deze drie vragen komen achtereenvolgens aan de orde.

Maakt ICT vaardigheden overbodig?

Als de leerling bepaalde elementaire algebraïsche vaardigheden kan overlaten aan een ICT-omgeving, lijkt de beheersing daarvan met de hand of uit het hoofd inderdaad minder belangrijk te worden.

We zien hier een parallel met de gewone rekenmachine: waar cijferen in het verleden een belangrijke vaardigheid was, is het nu normaal dat een leerling 16×23 uitreken met de calculator. Evenzo zullen docenten uit de tweede fase HAVO-VWO niet verbaasd zijn dat hun leerlingen de functiewaarde van y_1 met $y_1(x) = x^2 + x - 12$ in $x = 7$ uitrekenen door in hun grafische rekenmachine $y_1(7)$ in te typen. In de toekomst zal mogelijk hetzelfde gebeuren met een vergelijking als $x^2 + 3 \cdot x + 1 = 0$, die leerlingen op een symbolische rekenmachine met een solve-opdracht kunnen oplossen.

Soms is het werk dat aan ICT wordt uitbesteed wel érg elementair. Iedereen kent wel leerlingen die bij wijze van spreken voor 3×2 de rekenmachine te voorschijn halen. Zo zullen er ook leerlingen zijn die in bovenstaand voorbeeld $y_1(0)$ met de grafische rekenmachine zullen berekenen, terwijl dat antwoord ook zo wel te zien is. In de toekomst zullen mogelijk ook vergelijkingen als $3x + 5 = 7$ met de symbolische rekenmachine worden opgelost. In een uitvoerende fase zou ik daar niet al te zwaar aan tillen: soms is het meer werk om te bedenken of de ICT-methode of de met-de-hand manier het handigst is, dan om de procedure door de machine te laten uitvoeren.

Dat ligt anders als het gaat om de aanleerfase, waarin het inzicht in de oplossingsprocedure door de leerling nog moet worden ontwikkeld. Zoals de leerlingen in groep 3 van het basisonderwijs bij de eerste rekenlessen geen rekenmachine gebruiken, zo ligt het ook voor de hand om

terughoudend te zijn bij het gebruik van ICT voor de uitvoering van algebraïsche bewerkingen waarmee de leerling nog weinig ervaring heeft. Wat een geschikt moment is om de overstap van pen-en-papier naar ICT te maken, is een vraag waarop het antwoord vermoedelijk per onderwerp gevonden zal moeten worden en dat zal ook niet voor alle groepen leerlingen hetzelfde zijn.

Al met al is de verwachting dat de leerling door de beschikbaarheid van ICT minder afhankelijk zal worden van de beheersing van elementaire algebraïsche vaardigheden, die dus wat aan belang zullen verliezen.

Is een ander type vaardigheden vereist?

Als het gebruik van ICT de beheersing van elementaire algebraïsche vaardigheden minder belangrijk maakt, dan lijkt dat het leven van de leerling gemakkelijker te maken. Zo eenvoudig is het echter niet. Zorn⁹ stelt bijvoorbeeld dat het hoger niveau denken door het uitbesteden van elementaire operaties belangrijker wordt:

On the contrary, as machines do more and more lower-level symbolic operations, higher-level thinking and deeper understanding of what is really happening become more, not less, important. (Zorn, 2002, p. 1)

In dezelfde lijn betoogt Heck¹² dat werken met een computeralgebrapakket, dat een compleet repertoire van algebraïsche procedures biedt, een kwestie is van 'brains-on computing', waarbij de gebruiker zich goed rekenschap moet geven van de te zetten stappen en de oplossingsstrategie:

With a powerful repertory of tools at hand, it becomes even more important for the user to realise what goals s/he has, what results already have been obtained in this direction, and what steps can come next. Stated simply in a one-liner: computer algebra is not hands-on, but brains-on computing. (Heck, 2001, p. 212 - 213)

Ook Pierce & Stacey¹³ wijzen erop dat het gebruik van computeralgebra een beroep doet op algebraïsche vaardigheden zoals het doorzien van de structuur van formules en het herkennen van belangrijke kenmerken daarin. Ze spreken over 'algebraic expectation', zeg maar schattende algebra, waarover een leerling moet beschikken om fouten bij het werken met ICT te kunnen signaleren. Als een leerling bijvoorbeeld met een grafische rekenmachine of VU-Grafiek de parabool tekent met vergelijking $y = x^2 + x - 12$ en de grafiek is een rechte lijn, dan is het wel van belang dat hij ziet dat er iets mis is, bijvoorbeeld omdat niet x^2 maar $x2$ is ingevoerd.

Kennelijk is men het erover eens dat het gebruik van ICT een beroep doet op hogere algebraïsche vaardigheden, zeg maar symbol sense. Terwijl elementair werk kan worden uitbesteed aan ICT, lijkt symbol sense belangrijker te worden.

Een voorbeeld hiervan is het invoeren van formules en expressies. In veel ICT-omgevingen gaat dat met een formule-editor. Het gebruik daarvan is echter niet vanzelf-

sprekend en vraagt inzicht in de structuur van de in te voeren uitdrukking. Wanneer een leerling bijvoorbeeld de formule voor een halve cirkel, $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, wil invoeren, is het niet ondenkbaar dat er op het scherm $\sqrt{a^2 - x^2}$ of $\sqrt{a^2} - x^2$ verschijnt. Dat kan te maken hebben met een gebrekkige technische beheersing van de formule-editor, maar het heeft ook een inzichtelijke component: zolang de leerling zich niet bewust is van de reikwijdte van het wortelteken in de formule, zal dit soort fouten blijven voorkomen. Wanneer de ICT-omgeving geen 'pretty print' formule-editor biedt, moet de formule eendimensionaal met haakjes worden ingevoerd, wat evenmin eenvoudig is:

$$y = \sqrt{(a^2 - x^2)}$$

Als tweede voorbeeld verwijs ik naar een eerder nummer van de Wiskrant¹⁴. Het laat zien dat het uitwerken van $(x+y)^3+1$ in een computeralgebra-omgeving een koud kunstje is. De andere kant op, $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3+1$ herleiden tot $(x+y)^3+1$, is helemaal niet zo eenvoudig. Het vraagt om inzicht in de symmetrie of herkenning van de coëfficiënten uit de driehoek van Pascal.

Voorbeelden als deze geven aan dat ICT wel het elementaire algebraïsche rekenwerk kan uitvoeren, maar dat het gebruik daarvan vaak een beroep doet op andere vaardigheden, die onder de noemer van symbol sense kunnen worden samengevat.

Symbol sense verwerven met ICT?

Kennelijk doet effectief ICT-gebruik minder beroep op de beheersing van elementaire algebraïsche vaardigheden dan op symbol sense. De vraag is nu of het gebruik van ICT ook kan bijdragen aan de ontwikkeling van dit type algebraïsch inzicht? Is symbol sense aan te leren door het werken met ICT? Laten we wat voorbeelden bekijken, die eerst het gebruik van applets betreffen die met een didactisch doel zijn ontwikkeld, en vervolgens het gebruik van een a-didactische computeralgebra-omgeving.

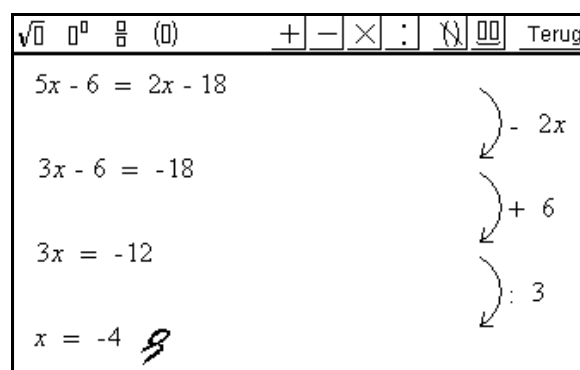


fig. 1 Het applet Vergelijkingen oplossen

Met het applet Vergelijkingen oplossen¹⁵ (zie figuur 1) kan de leerling stap-voor-stap vergelijkingen oplossen volgens de weegschaalmethode zonder het bijbehorende rekenwerk te hoeven uitvoeren. Het idee, al eerder uitge-

werkt in het DOS-programma VU-Losop, is dat hij zich kan concentreren op de oplossingsstrategie zonder zich te hoeven laten afleiden door het rekenwerk inclusief eventuele rekenfouten. Dit applet beoogt dus het globaal kijken naar de vergelijking en het bepalen van de volgende strategische stap. Dat betekent werken aan de ontwikkeling van symbol sense. Hoewel applet en bijbehorend lesmateriaal nog in ontwikkeling zijn, zijn de eerste ervaringen positief.

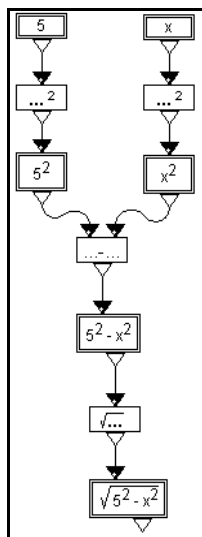


fig. 2 Het applet Algebra expressies

Het applet Algebra expressies¹⁵ (zie figuur 2) kent eveneens een didactisch doel. Het gaat hier om het beeld van een formule als boom van rekenoperaties. Bij het maken van zo'n boom speelt de volgorde van de bewerkingen een grote rol. Door zo'n boom op te bouwen realiseert de leerling zich de structuur van de formule. Een dergelijk inzicht valt ook weer onder de verzamelnaam symbol sense. Ook hiervoor geldt dat de eerste ervaringen met dit applet in de klas optimistisch stemmen.

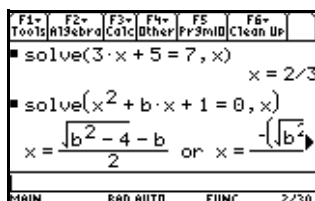


fig. 3 Vergelijkingen oplossen met de TI-89

Een ander type ICT zijn computeralgebra-omgevingen, die in het algemeen niet met een dergelijk specifiek didactisch doel zijn ontwikkeld. Wel kan de leerling bij het werken met computeralgebra worden geconfronteerd met fenomenen, die slechts met behulp van symbol sense te begrijpen zijn. Voorbeelden hiervan zijn het oplossen van vergelijkingen en de equivalentie van algebraïsche expressies. Het oplossen van vergelijkingen in een computeralgebra-

omgeving lijkt een eenvoudige zaak: je hoeft alleen maar de opdracht 'solve' te geven. Nader onderzoek in de klas¹⁶ wijst echter uit dat dit voor leerlingen met een beperkte algebra-achtergrond niet het geval is. Wanneer de vergelijking $3x + 5 = 7$ moet worden opgelost, vereist de symbolische rekenmachine TI-89 dat de onbekende wordt gespecificeerd (figuur 3, bovenste regel). Dat kan als een onhebbelijkheid van deze machine worden beschouwd, maar het besef dat een vergelijking altijd naar een onbekende wordt opgelost, zal toch helpen om deze syntax niet te vergeten. Nog moeilijker wordt het wanneer een vergelijking als $x^2 + b \cdot x + 1 = 0$ moet worden opgelost (figuur 3, tweede regel). Dan ligt het specificeren van de onbekende meer voor de hand, maar de leerling moet zich wel realiseren dat het oplossen van een vergelijking meer is dan het berekenen van een numeriek antwoord: ook het uitdrukken van één variabele in één (of meer) andere valt onder oplossen; het resultaat is dan een expressie en niet een getal. Het gebruik van de solve-opdracht doet dus een beroep op algebraïsche inzichten die bij het oplossen met de hand vaak impliciet blijven, al vraagt het oplossen van de vergelijking van Wenger met de hand een soortgelijk symbol sense.

Bij het interpreteren van uitvoer van computeralgebra komt regelmatig een equivalentieprobleem naar voren. De computeralgebra-omgeving geeft de antwoorden niet altijd in de gedaante die de leerling het eenvoudigst vindt of verwacht. De vraag is dan of het gegeven antwoord en het verwachte antwoord wel equivalent zijn, dus of het gaat om een representatieverschil of een echt andere uitkomst. Hieronder staan enkele voorbeelden van dergelijke equivalentieproblemen.

| Verwachte gedaante | Gedaante op de TI-89 |
|-------------------------------|-----------------------------|
| $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$ | $\frac{x}{2} + \frac{y}{2}$ |
| $x \cdot (40 - x)$ | $-x \cdot (x - 40)$ |
| $\sqrt{\frac{1}{4}s^2 - p}$ | $\frac{\sqrt{s^2 - 4p}}{2}$ |
| $b - \sqrt{b^2 - 4}$ | $-(\sqrt{b^2 - 4} - b)$ |

Dit verschijnsel is voor de leerling aanleiding om de uitdrukkingen in linker- en rechterkolom globaal te vergelijken en na te gaan hoe de ene vorm uit de andere valt af te leiden, wat hopelijk bijdraagt aan de ontwikkeling van symbol sense.

Deze voorbeelden geven aan dat het werken met ICT aanleiding kan zijn om de structuur en betekenis van formules en expressies nader te onderzoeken, en op die manier de ontwikkeling van symbol sense lijkt te kunnen bevorderen.

Het effect hiervan zal niet alleen afhangen van de ICT-omgeving, maar ook van de didactische uitwerking in opgaven en de begeleiding van de docent.

Conclusie

Samengevat lijkt het met het oog op het toenemende ICT-gebruik goed om aandacht te besteden aan de ontwikkeling van symbol sense, desnoods ten koste van elementaire algebraïsche vaardigheden. Dat kan gebeuren met pen en papier¹⁷, maar de voorbeelden hierboven suggereren dat ook het gebruik van ICT-omgevingen zelf daaraan kan bijdragen. Deze conclusie verdient enige nuancering. De scheidslijn tussen elementaire algebraïsche vaardigheden en symbol sense is natuurlijk niet altijd helder.

Het inzicht dat $b - \sqrt{b^2 - 4}$ en $-(\sqrt{b^2 - 4} - b)$ equivalent zijn, getuigt van symbol sense, maar zal zonder beheersing van elementaire vaardigheden moeilijk bereikt worden.

Verder is de precieze afstemming van handwerk en machinewerk, zodat de leerling voldoende ervaring en symbol sense heeft om een ICT-omgeving op een verstandige manier voor algebra te gebruiken, een cruciaal punt. Deze afstemming zal op basis van ervaringen voor de verschillende onderwerpen binnen de algebra en de diverse groepen leerlingen nog nader moeten worden bepaald.

Paul Drijvers, Freudenthal Instituut, Utrecht

Noten

- [1] Kemme, S. (2002). Welke algebra is nodig voor klas 4? *Nieuwe Wiskrant, Tijdschrift voor Nederlands Wiskundeonderwijs*, 21(3), 29-31.
Zie ook www.educadv.nl/opgaven/opgaven.asp
- [2] Zie bijvoorbeeld de site van Christelijke Scholengemeenschap Het Noordik: www.noordik.nl/vakken/oefenopgaven/
- [3] Wagner, S., S. Rachlin & R. Jensen (1984). *Algebra learning project, final report*. Athens GA: University of Georgia.
- [4] Wenger, R.H. (1987). Cognitive science and algebra learning. In A. Schoenfeld (Ed.) *Cognitive science and mathematical education*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- [5] Freudenthal, H. (1962). Logical analysis and critical survey. In H. Freudenthal (Ed.) *Report on the relations between arithmetic and algebra* (pp. 20-41). Groningen: J.B. Wolters.
- [6] Team W12-16 (1992). *Achtergronden van het nieuwe leerplan wiskunde 12-16. Band 1*. Utrecht: Freudenthal Instituut.
- [7] Gravemeijer, K. (1990). Globaal kijken, een kenmerk van algebraïsche deskundigheid. *Nieuwe Wiskrant, Tijdschrift voor Nederlands Wiskundeonderwijs*, 10(2), 29-33.
- [8] Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 14(3), 24-35.
- [9] Zorn, P. (2002). *Algebra, computer algebra and mathematical thinking*. Contribution to the 2nd international conference on the teaching of mathematics, 2002, Hersonissos, Crete.
www.stolaf.edu/people/zorn/
- [10] Goddijn, A. & M. Kindt (2001). Knelpunten en toekomstmogelijkheden voor wiskunde in het VO. *Tijdschrift voor Didactiek der β -wetenschappen*, 18(1), 59-94.
- [11] Hoch, M. (2003). *Structure sense*. Contribution to the CERME3 conference, 2003, Bellaria, Italy.
www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/WG6/
- [12] Heck, A. (2001). Variables in computer algebra, mathematics and science. *International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education*, 8, 195-221.
- [13] Pierce, R.V. & K.C. Stacey (2002). The algebra needed to use computer algebra systems. *The Mathematics Teacher*, 95, 622-627.
- [14] Drijvers, P. (2002). Wiskunde leren in een computeralgebra omgeving: obstakels en kansen. *Nieuwe Wiskrant, Tijdschrift voor Nederlands Wiskundeonderwijs*, 22(1), 36-41.
- [15] De applets zijn gemaakt door Peter Boon en te vinden op www.wisweb.nl
- [16] Drijvers, P. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment*. Utrecht: Freudenthal Instituut.
- [17] Kindt, M. (2003). *Algebra oefeningen*. Utrecht: Freudenthal Instituut.

Dit artikel komt voort uit het onderzoek 'Algebra leren in een computeralgebra-omgeving' dat mogelijk is gemaakt door NWO, projectnummer 575-36-003E.