Terwijl de redactie het schaamrood van de kaken probeerde te krijgen wegens het niet voorkomen van de financiële handeling die **Aad Goddijn** in de inleiding beschrijft, is er een nieuwe aflevering van de puzzelrubriek ontstaan.

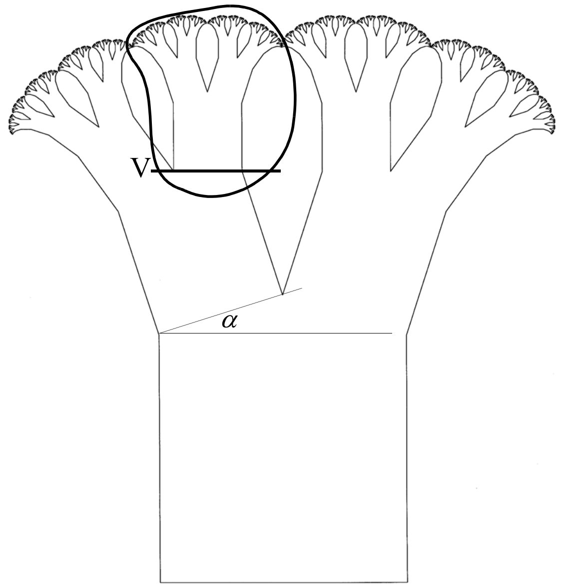
Rechthoekszijde 255255 met autoped

Inleiding

Heeft u wel eens de hoofdprijs van een loterij op het verkeerde gironummer gestort? Ik wel, namelijk bij de vorige recreatierubriek, die van maart jongstleden. Daarin werd in opgave 210 gevraagd naar de geheeltallige verhoudingen van de vierkanten in de figuur op een postzegel. Voor de duidelijkheid had ik de figuur nog eens apart getekend. En jawel: met alle getallen er open en bloot bij. Er kwamen geen reacties; natuurlijk niet, want inzenders op deze rubriek schrijven niet over, die doen het zelf. Ger Blaauw is dus de enige oplosser, hij stuurde mij namelijk de postzegel én een oplossing van het probleem. De zijden van de vierkanten benoemde hij met letters. Zo ontstond een stel lineaire vergelijkingen, allerlei relaties tussen die zijden namelijk, en er werd heel slim een oplossing gevonden in rationale getallen die na opschalen met een gemeenschappelijke factor het plaatje van de vorige keer leverde. Alsnog hulde, want wie het gaat proberen zal zien dat het minder snel gedaan is dan nu verteld.
Op de opgaven over de Pythagorasboom in broccolivorm kwamen geen schriftelijke reacties, maar er waren wel wandelgang-oplossingen, en die vertaal ik in een duidelijke hint voor wie nog eens terug wil kijken.
Er kwamen uitvoerige reacties op opgave 211 over Pythagoreïsche drietallen; die nemen het hoofddeel van deze aflevering in.
Tot slot enkele nieuwe opgaven. Over experimenteren met de autoped, die misschien ongebruikt in uw schuur staat. Maar als de hype over is, begint de wiskunde. Of keert terug: de tractrix of sleepkromme van Huygens.

De hoogte van de broccoli

De hoogte van de broccoli-fractal (zie figuur) moest uitgedrukt worden in de hoek α, uitgaande van een stronkvierkant met zijde 1.
In de tekening heeft de broccoli twee hoofdtakken die verkleiningen zijn van het geheel, zoals dat bij fractals vaak aan de hand is. De verkleiningsfactor f is in α uit te drukken. Het kleine omcirkelde sub-boompje dat staat op het niveau van het lijntje V, is dus f^2 keer zo hoog als het geheel. Nu hebben we op twee manieren de totale hoogte h van de broccoli beschreven: gewoon de hoogte h zelf én de hoogte van niveau V plus f^2 keer h. Einde hint.



Reacties Pythagoreïsche drietallen

Opgave 211 vroeg naar het vinden van drietallen gehele getallen die de lengtes kunnen zijn van een rechthoekige driehoek. Dat zijn de beroemde Pythagoreïsche driehoeken. Er zijn verschillende methoden om al de drietallen te vinden, verderop in dit artikel geef ik dit klassieke resultaat in een meetkundige vorm.
Maar K. Lingsma stelde het probleem net een slagje anders, hij wilde weten hoe bij een gegeven rechthoekszijde de andere rechthoekszijde en de schuine zijde gevonden kunnen worden. Zijn vraag was in feite:
(Opgave 211) Als ik al een positief geheel getal X heb, hoe vind ik bijhorende gehele positieve getallen Y en Z die aan $X^2 + Y^2 = Z^2$ *voldoen, en hoe vind ik alle mogelijkheden?*

Er kwamen uitvoerige reacties binnen van K. Lingsma zelf, Ger Blaauw, Kees Rijke, Jan Meerhof en H.G. Smida. Sommige inzenders pakken het probleem geheel zelfstandig als nieuw aan, en gaan niet uit van het klassieke resultaat over alle Pythagoreïsche driehoeken.
Ik neem eerst deze inzendingen onder de loep en laat zien dat via hun methode ook voorspeld kan worden hoeveel

oplossingen er bij gegeven X precies zijn.
K. Lingsma (de 86-jarige steller van de vraag) heeft door proberen heel wat deelresultaten bereikt.
Bijvoorbeeld:

- de formules $Y = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}$ en $Z = \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{2}$, geschikt voor oneven X.
- de formules $Y = \frac{1}{4}X^2 - 1$ en $Z = \frac{1}{4}X^2 + 1$, geschikt voor even X.

Dat werd gegeneraliseerd naar:

- de formules $Y = \frac{X^2 - p^2}{2p}$ en $Z = \frac{X^2 + p^2}{2p}$, waarbij p een deler van X moet zijn, en in het geval van even X zelf ook even moet zijn.

We zullen straks zien dat dit bijna perfect is. De uitvoerige correspondentie bevat lijsten met oplossingen voor forse X. Bijvoorbeeld:
$120120^2 + 2504981^2 = 25050169^2$

$255255^2 + 32577557512^2 = 32577557513^2$

Allemaal zonder digitale steun gevonden!

Ger Blaauw neemt direct de stap van $X^2 + Y^2 = Z^2$ naar

$$X^2 = Z^2 - Y^2 = (Z - Y)(Z + Y)$$

Die ontbinding maakt direct duidelijk waarom we met delers van X^2 moeten werken.
Diverse gevallen worden dan onderscheiden, bijvoorbeeld X is een priemgetal, is dubbele van een priemgetal, bestaat uit twee factoren, is een macht van 2. Uiteindelijk wordt bijna dezelfde oplossing als het laatste vermoeden van K. Lingsma gegeven (en bewezen), maar Ger Blaauw ziet dat de deler p alleen een deler van X^2 en niet per se van X zelf hoeft te zijn. Met combinatorische middelen is gezocht naar het aantal van die delers, daar ga ik zo dadelijk even op in.

Nu in het kort de oplossingsmethode in scherper detail, als gezamenlijk resultaat van inzenders en redacteur.

Gezocht: bij gegeven gehele X gehele oplossingen van de vergelijking $X^2 + Y^2 = Z^2$.
Oplossing:
Herleid eerst tot $X^2 = Z^2 - Y^2 = (Z - Y)(Z + Y)$.
Stel nu $p = Z - Y$ en $q = Z + Y$. p is dus een deler van X^2 die kleiner is dan X zelf. $q = x^2/p$.
Omdat $q - p = 2Y$, zijn p en q beiden oneven óf beiden even.
Y en Z kunnen nu in p en q worden uitgedrukt:

$$Y = \frac{q-p}{2}, Z = \frac{q+p}{2}$$

Als X oneven is, zijn p en q dat vanzelf allebei ook en zijn Y en Z geheel.
Als X even is, is $X^2 = p \cdot q$ ook even en moet zeker één van p en q even zijn, maar omdat $q - p = 2Y$, moeten zowel p als q even gekozen zijn.
Dit is even oppassen, bijvoorbeeld bij $X = 40$. Dan is $p = 32$ kleiner dan 40, een deler van 40^2, maar q is dan 25 en het gaat mis.
Handel bij even X als volgt. Gezocht worden even p en q met $p < X$ en $pq = X^2$. Stel $p = 2s$ en $q = 2t$. We hebben nu $s < X/2$ en $st = (X/2)^2$; dus in plaats van X onderzoeken we $X/2$ en doen hetzelfde als bij het geval dat X oneven was.
Door systematisch de juiste delers af te lopen kunnen nu alle oplossingen gevonden worden.
Bijvoorbeeld bij $X = 24$. De even delers van 24^2 die kleiner zijn dan 24 en met even tegenpartij q, zijn 2, 4, 6, 8, 12, 16 en 18. Zie de tabel.

p	q	X	Y	Z
2	288	24	143	145
4	144	24	70	74
6	96	24	45	51
8	72	24	32	40
12	48	24	18	30
16	36	24	10	26
18	32	24	7	25

Maar bij $X = 120120$ en $X = 255255$ zullen dat er veel zijn. Jan Meerhof vond de aantallen 607 en 364 door via een andere methode (zie later) in Excel alle oplossingen te genereren en die te laten tellen.
Kunnen we die aantallen ook direct bepalen zonder alle oplossingen na te gaan?
Kees Rijke doet dat in zijn bijdrage door combinatorisch het juiste aantal delers van een getal te bepalen uit de ontbinding in factoren. Ik pas zijn methode, enigszins aangepast aan het bovenstaande, toe op de twee voorbeelden.
Eerst het oneven voorbeeld, 255255. We moeten de delers p van 255255^2 tellen die kleiner zijn dan 255255. Bij iedere deler p die kleiner dan 255255 is, hoort een q die ook groter dan 255255 is, want $pq = 255255^2$. Verder doet $p = 255255$ zelf natuurlijk niet mee. Hieruit volgt dat het aantal geschikte getallen p, gelijk is aan

(het aantal delers van 255255^2 *minus 1)/2.*

Om dat aantal delers te vinden gaan we ontbinden in factoren. Door eerst 255255 te ontbinden en dan de exponent te verdubbelen:

$$255255^2 = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17^2$$

Een deler van dit getal is uit dezelfde priemfactoren opgebouwd; voor de priemfactor 3 hebben we de keuze uit 3^0, 3^1 of 3^2, en voor 5 uit 5^0, 5^1 en 5^2 enzovoort. We hebben in dit geval voor elke priemfactor drie mogelijkheden en 6 priemfactoren in totaal. Dat geeft 3^6 mogelijkheden. En ja hoor: $(3^6 - 1)/2 = 364$.
Als X even is, zoals bij 120120, moeten we hetzelfde

doen voor $(X/2)$ en $(X/2)^2$. Ook hier is het ontbinden geen probleem:

$$(120120/2)^2 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2$$

Volgens dezelfde combinatoriek heeft dit getal 1215 delers, want $5 \cdot 3^5 = 1215$. En ja, voor $12120^2 + y^2 = Z^2$ zijn er $(1215 - 1)/2 = 607$ oplossingen.
Kees de Rijke drukte de aantallen algemeen uit in de exponenten van de priemfactoren van *X*; na de voorbeelden is wel duidelijk hoe dat voor even en oneven *X* gedaan kan worden.
Als we met $d(n)$ het aantal delers van het natuurlijke getal *n* aangeven, dan kunnen we de resultaten voor opgave 211 zo samenvatten:

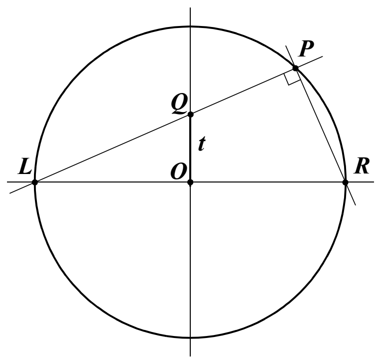
– als X oneven is, zijn er $\frac{d(X^2) - 1}{2}$ oplossingen
– als X even is, zijn er $\frac{d((X/2)^2) - 1}{2}$ oplossingen.

Alle drietallen vinden

De klassieke vraag is het vinden van *alle* geheeltallige oplossingen (a, b, c) van de Pythagoras-relatie
$$a^2 + b^2 = c^2$$
Vaak worden die gevonden via nogal wat algebraïsch rekenwerk. Ik geef hier een benadering die wat meetkundiger is, en daardoor het werkelijke rekenwerk beperkt, terwijl ook nog een paar mooie bloempjes langs de kant van de weg worden geplukt.
We gaan daarbij de eenheidscirkel gebruiken met de vergelijking $x^2 + y^2 = 1^2$ en daartoe brengen we de Pythagoras-relatie in de vorm:

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$

De vraag naar de geheeltallige drietallen verandert nu van vorm; het is nu de vraag geworden naar de punten met rationale coördinaten op de eenheidscirkel.
Laat in de figuur hieronder *P* zo'n punt zijn.



P is verbonden met het meest linkse punt van de eenheidscirkel, het punt $L(-1,0)$. *Q* is het snijpunt met de *y*-as; de *y*-coördinaat, aangegeven met *t,* is ook een rationaal getal, dat we uit de rationale coördinaten van *P* kunnen afleiden. De spannende vraag gaat over de andere richting: als *t* rationaal is, heeft *P* dan ook rationale coördinaten? Als dat zo is, hebben we bij elk rationaal getal een punt *P* op de eenheidscirkel gevonden met rationale coördinaten. Het antwoord is: ja. We komen daar vanzelf wel achter door de coördinaten van *P* in *t* uit te drukken. (Er is ook een slimme redenering mogelijk die zonder rekenwerk dit feit aantoont!)

De vergelijking van *LQ* is niet zo moeilijk te vinden:
$$y = t \cdot (x + 1)$$

We gaan niet snijden met de cirkel, maar met de lijn *RP*. Die staat loodrecht op *LP*, omdat *LR* middellijn van de cirkel is. Zo gebruiken we toch een eigenschap van de cirkel, maar vermijden kwadratische formules. Dit fragmentje meetkunde - de stelling van Thales - en enige basiskennis over richtingscoëfficiënten, helpt ons direct aan de vergelijking voor de lijn *RP*:
$$y = -\frac{1}{t} \cdot (x - 1)$$
Delen van de twee vergelijkingen op elkaar elimineert *y*, scheiden van *x*-en en *t*-en leidt vlot tot:
$$-\frac{1}{t^2} = \frac{x + 1}{x - 1}$$

Formeel omwerken naar *x* = .. is niet moeilijk, maar er is een leuk trucje dat hier bij toeval past. Te aardig om te laten glippen. Daar gaat-ie ...

De grafiek van:
$$u = \frac{x + 1}{x - 1}$$
is een orthogonale hyperbool met als asymptoten de lijnen $x = 1$ en $u = 1$ en is dus *symmetrisch om de lijn* $u = x$. De inverse functie heeft dus 'dezelfde' formule, namelijk
$$x = \frac{u + 1}{u - 1}$$
en zo wordt zonder vuile handen bereikt dat:
$$x = \frac{(-1/t^2) + 1}{(-1/t^2) - 1} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$
Daarmee is de *x*-coördinaat van *P* in *t* uitgedrukt. Voor de *y*-coördinaat vinden we ook een uitdrukking in *t,* via de lijn *LQ* bijvoorbeeld. Samengevat:
$$P = \left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \frac{2t}{1 + t^2}\right)$$
Als *t* rationaal is, zijn de coördinaten van *P* dat dus ook. Maar we zochten eigenlijk naar formules voor *a*, *b* en *c* die evident gehele waarden geven. Daartoe stellen we nu $t = n/m$, met *n* en *m* gehele getallen. Invullen:
$$\frac{a}{c} = \frac{1 - (n/m)^2}{1 + (n/m)^2} \qquad \frac{b}{c} = \frac{2(n/m)}{1 + (n/m)^2}$$
En bijschaven:
$$\frac{a}{c} = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2} \qquad \frac{b}{c} = \frac{2nm}{m^2 + n^2}$$

Een goed voorstel is dus:

$$(a, b, c) = (m^2 - n^2, 2nm, m^2 + n^2)$$

We willen eerst de onderling ondeelbare tripels (a, b, c) vinden. Dus moeten zeker niet *n* en *m* beide oneven zijn, want in dat geval dient zich ook een factor 2 aan in zowel *a* als *c*. Als we *m* en *n* nu verder onderling ondeelbaar nemen, dus $t = n/m$ in onvereenvoudigbare vorm, dan zijn *a, b* en *c* ook onderling ondeelbaar. Immers, een priemdeler van *b* is het priemgetal 2 of een deler van *n* óf *m*, maar niet van beide. 2 is al buitengesloten, de andere delen, zeker $m^2 - n^2$ en $m^2 + n^2$, niet.
We hebben inderdaad alle onvereenvoudigbare Pythagoreïsche tripels (a, b, c) gevonden. Andere drietallen worden gevonden door op te schalen met een factor, zeg *k*, van (a, b, c) naar (ka, kb, kc).

Andere resultaten en aanvullingen

De uitzonderingsregel dat *m* en *n* niet beide oneven mogen zijn, wekt mogelijk de vrees dat we zo toch geschikte drietallen van tafel vegen.
Een voorbeeld van het uitgesloten geval is $n = 5$, $m= 9$.

$$(a, b, c) = (56, 90, 106)$$

Deel door 2, en zorg door verwisselen dat het tweede getal het even getal is:

$$(a', b', c') = (45, 28, 53)$$

Dit tripel wordt gegenereerd door $n' = 2$ en $m' = 7$, er is dus niet echt iets verloren gegaan. Zou dat altijd zo lukken? Een leuke oefenopgave algebra in ontbinden in factoren:

Opgave 211a
Ga algemeen uit van $n = 2p + 1$ en $m = 2q + 1$. Druk de voortbrengers van het op de zojuist gegeven wijze vereenvoudigde tripel uit in p en q.

Jan Meerhof en Kees Rijke vonden de oplossingen voor opgave 211 door uit te gaan van het hun bekende resultaat over Pythagoreïsche drietallen in het algemeen. Jan Meerhof was juist bezig geweest met vinden van geheeltallige oplossingen bij de vergelijkingen:

$$Y^2 = X(X-a) \text{ en } Y^2 = 2X(X-a)$$

De eerste vergelijking heeft oplossingen die samenhangen met Pythagoreïsche drietallen en probleem 211; door de vergelijking om te werken naar:
$(a/2)^2 + Y^2 = (X - a/2)^2$ wordt dat duidelijk en ook dat er inderdaad eindig veel oplossingen zullen zijn.

De tweede vergelijking heeft volgens Jan Meerhof oneindig veel oplossingen die samenhangen met Fibonacci-achtige rijen. Ik kan me daar wel wat bij voorstellen, we komen hier in de buurt van vergelijkingen als:

$$Y^2 = 2X^2 \pm 1 \text{ en } Y^2 + XY - X^2 = \pm 1$$

die respectievelijk bekende rationale benaderingen voor $\sqrt{2}$ en de gulden snede leveren; beide hebben oplossingsreeksen die met recurrente betrekkingen kunnen worden beschreven. Nader onderzoek voor de lezer!

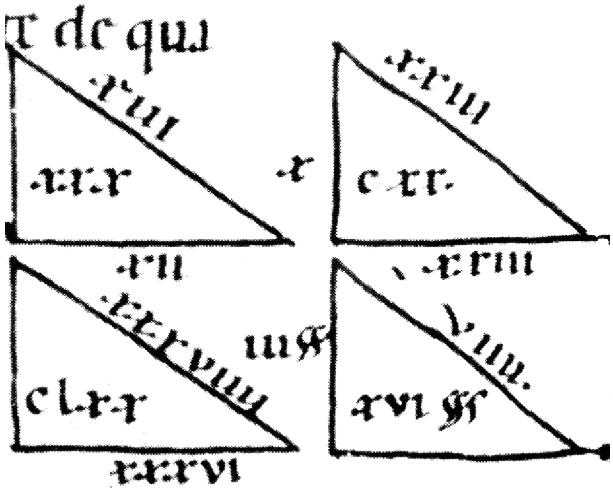
Een andere aanvullende opgave ontleen ik aan de bijdrage van Kees Rijke.
Een *Pythagoreïsche hoek* noemen we een hoek die hoort bij een Pythagoreïsche driehoek. Bijvoorbeeld de hoeken met een tangens van $3/4$ of van $5/12$, maar niet die met een tangens van $5/7$. De opgave kan op zichzelf opgelost worden, maar ook zeer direct met behulp een resultaat uit de vorige paragraaf.

Opgave 211b
Toon aan dat de som en verschil van twee Pythagoreïsche hoeken Pythagoreïsche hoeken zijn.

H.G. Smids uit Apeldoorn meldt al vijfendertig jaar geleden een computerprogramma te hebben geschreven dat Pythagoreïsche drietallen, gesorteerd naar kleinste getal, afdrukte. Dat moet nog wel in het ponsbandentijdperk zijn geweest! Hij deed enkele observaties die ik in de vorm van een opgave voorleg, die met behulp van het voorgaande op te lossen is.

Opgave 211c
Stel a, b en c vormen een Pythagoreïsch drietal.
Toon aan:
Als p een priemgetal ongelijk 2 is, dan is er slechts een Pythagoreïsch drietal met a = p. Er geldt dan ook noodzakelijk b + 1 = c en b eindigt op 0 of 4 in het tientallig stelsel. Het geval 5-12-13 is daarop de enige uitzondering.

Gerbert van Aurillac



De benedictijner monnik Gerbert van Aurillac (945 - 1003) schreef een Isagoge Geometriae, gebaseerd op zijn studie van de Arabische wiskunde in het klooster van San Maria van Ripoll, waar Arabieren en Christenen samenwerkten. In een 12^e^ eeuwse kopie van dat werk staat de bovenstaande illustratie.
Pythagoreïsche driehoeken, met Romeinse cijfers! De

oppervlakte is in de driehoeken aangegeven. De figuren zijn niet op schaal getekend.
Linksboven staat de 13-12-5 driehoek (de 5 is niet te zien). Rechtsboven staat de 23-23-10 driehoek, met oppervlakte 120.
Ja, daar is iets misgegaan. De schuine XXIII moet XXVI zijn en de horizontale XXIII zal wel XXIV moeten zijn, dan klopt het namelijk wel. De Romeinse cijfers zijn veel gevoeliger voor overschrijffouten dan de Arabische. Dat dit nu net Gerbert van Aurillac moet overkomen, die zich inzette voor de invoering van de Arabische cijfers!

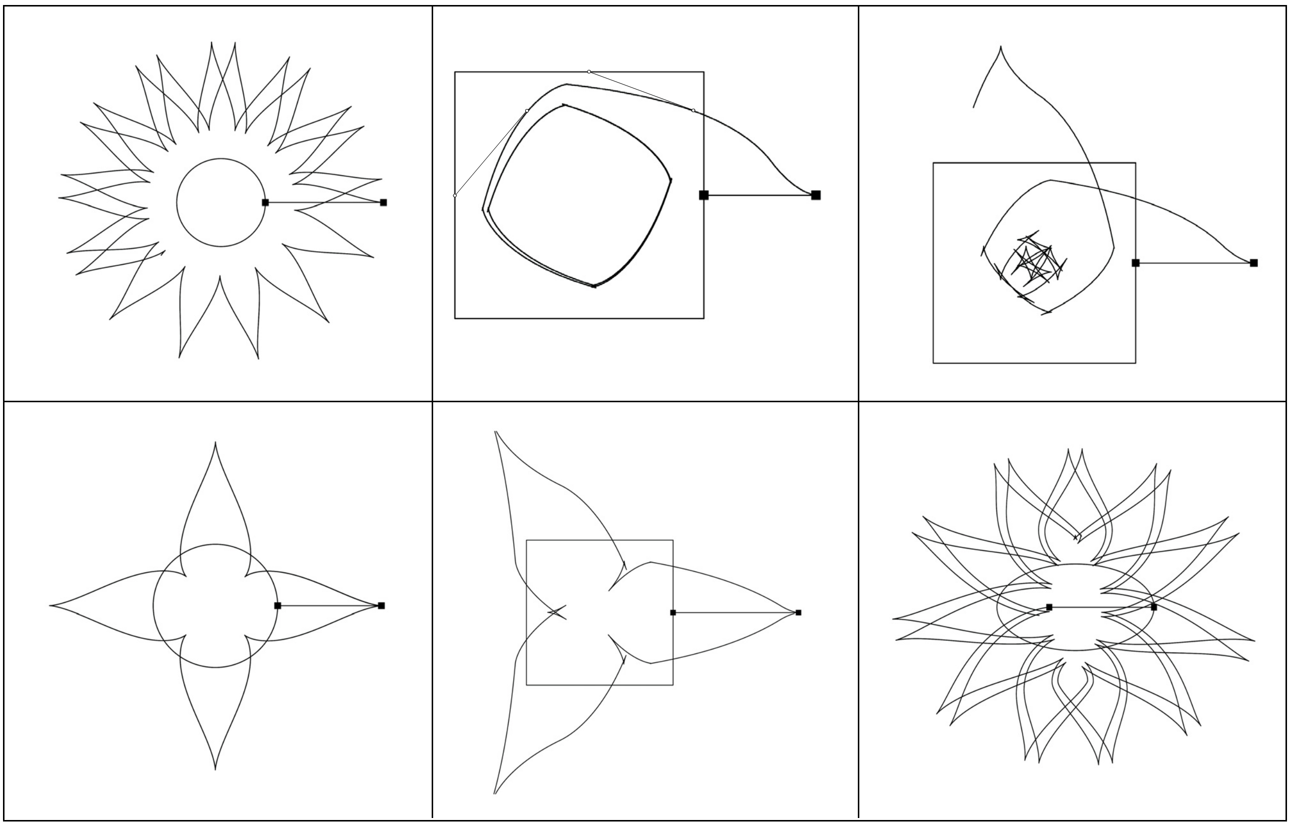
Gerbert van Aurillac werkte ook in het beroemde klooster van Cluny en werd zelfs paus, onder de naam Sylvester II (999-1003). Hij is waarschijnlijk wel de enige paus die een wiskundige verhandeling schreef!

Nieuw probleem: achterwiel autoped

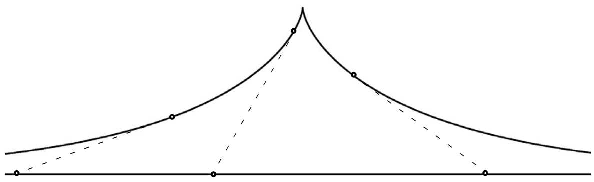
Je ziet ze weer wat minder, die kleine autopedjes waarmee mensen over de perrons van stations raasden, door de kantoorgebieden van grote steden en vast ook in de gangen van de ministeries in Den Haag.
Pak zo'n ding nog eens even vast, al is het maar in gedachten, en zet het voorwiel op een rechte lijn op het asfalt en het achterwiel naast die lijn. Rijd nu voorzichtig het voorwiel over de lijn, het beste is met de hand op het stuurtje zonder op het ding zelf te gaan staan. Het achterwiel volgt, het staat altijd gericht op het voorwiel. De baan van het achterwiel is een vloeiende lijn, en op elk moment is het stuk van de raaklijn aan de baan van het

achterwiel dat tot de lijn van het voorwiel loopt even lang, namelijk gelijk aan de vaste afstand van voor- en achterwiel. De baan is de bekende *tractrix* of sleepkromme, al bestudeerd door Christiaan Huygens. U tekent ook een tractrix door een gewichtje aan een touw over het strand mee te slepen, waarbij u over een rechte lijn loopt en het gewicht zich aanvankelijk naast de lijn bevindt. U vermoedt terecht dat het gewichtje (of het achterwiel van de step) nooit écht op de lijn komt, maar dat de lijn wel een soort limiet is, een asymptoot.

Het hierboven afgebeelde model heeft helaas een motortje en accu's. De prijs is € 279 en daarom het volgende: Een latje met een spijkertje aan de ene kant om vast te houden en een bolletje aan de andere kant (opgerold elastiek is goed genoeg) en een glad gestreken zandplekje is ook prima voor de experimenten.



Zoek ook de tractrix op in de *Famous Curves Index* op internet: http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Curves/Curves.html. Daar staat een figuur als deze:



De gestippelde raaklijnstukjes zijn even lang. Maar wat is die spits? Probeer het volgende eens met de step: rij een stukje vooruit met het voorwiel over de lijn. Neem de baan van het achterwiel waar, bijvoorbeeld door het wiel van tevoren even nat te maken. Rijdt nu voorzichtig achteruit over de lijn. Het achterwiel gaat juist weer terug over de afgelegde weg, want duwen kan ook. De snavel in de afgebeelde kromme ontstaat op het moment dat de autoped dwars op de lijn staat en duwen vanzelf in trekken overgaat. Gebruik verder maar het goedkopere latje, dan is er geen probleem met het doordraaien van het stuur en dat is hard nodig bij de volgende opgaven.
In de opgaven onderzoeken we varianten van de tractrix; het voorwiel beweegt over andere lijnen dan de rechte.

Opgave 214
Teken een cirkel met een straal van 2 meter op de grond en onderzoek de baan van het achterwiel van de step als het voorwiel over de cirkel rijdt.
Ontstaat er weer een limietfiguur waar het achterwiel toe nadert? Welke figuur is dat dan? De voorwielcirkel zelf? Hangt het af van de beginpositie van het achterwiel, bijvoorbeeld of die binnen of buiten de cirkel ligt?

Opgave 215
Breid het onderzoek uit door ook met cirkels te werken waarvan de straal kleiner en zelfs veel kleiner is dan de afstand tussen voorwiel en achterwiel. Bloemachtige vormen ontstaan. Wanneer treedt sluiting van de figuur op?

Opgave 216
Probeer het ook met een vierkante baan voor het voorwiel. Als de step korter is dan de zijden van het vierkant ontstaat een limietfiguur. Hoe is die opgebouwd? Heeft die alleen hoeken van 90 graden?

Enkele van de mogelijkheden zijn op de vorige bladzijde aangegeven. De cirkel, vierkant, ellips is de baan van het voorwiel, de beginstand van de step is met het rechte lijntje en twee stippen aangegeven.

Natuurlijk heeft dit stukje meetkunde zijn speciale toepassingen. Vandaar de volgende praktijkoefening.

Opgave 217
Teken een cirkel met een doorsnede van 1 meter op een lege parkeerplaats. Plaats het rechtervoorwiel van een auto midden in de cirkel. Draai de auto nu 360 graden om, terwijl het voorwiel niet uit de cirkel gaat.

De praktijk bij de laatste opgave wijst uit dat het handig is ook twee lijnen van ongeveer 10 meter als een kruis door de cirkel te tekenen; ter oriëntatie, omdat de cirkel van achter het stuur niet zichtbaar is. Uw puzzelredacteur deed het binnen enkele minuten met een fiets.

Het Rekenweb

Op het Rekenweb van het Freudenthal Instituut (www.rekenweb.nl) staat intussen een mooie stepsimulator waarmee veilig geoefend kan worden. Voor de basisschoolleerlingen die het rekenweb gebruiken zijn er in september behendigheidsoefeningen én nadenkopgaven; dan is de step het probleem van de maand, maar later vindt u de step daar vast ook nog wel.

Inzendingen

Graag met tekeningen (maar zonder schadeclaims n.a.v. opgave 217) als vanouds naar:

Aad Goddijn, Freudenthal Instituut, Utrecht.
E-mail: a.goddijn@fi.uu.nl