Op de NWD van 2003 gaf **Jan Aarts** een workshop over de snelheidsbepaling van een auto aan de hand van videobeelden. Met behulp van dit artikel en enige inventiviteit, wellicht geprikkeld door het lezen van *Over het laatste nieuws* in deze wiskrant, kunt u als docent een realistisch experiment opzetten met de leerlingen.

Hoe hard rijdt de auto op de video?

Inleiding

Kun je aan de hand van video-opnamen de snelheid van een auto bepalen?
Onder bepaalde voorwaarden kan dat. De eerste voorwaarde is dat de beweging van de betreffende auto in werkelijkheid rechtlijnig is. Verder zijn er ten minste drie punten, de ijkpunten, langs de bewegingslijn nodig waarvan de onderlinge afstanden bekend zijn. Om de snelheid van de auto te bepalen moeten we beschikken over een serie frames van de video, met bekende tussentijden bij de opeenvolgende frames. Er is verder geen informatie nodig; evenmin is het nodig dat de positie van de videocamera bekend is, of dat deze een vaste positie heeft.
Ik heb de hier beschreven methode samen met Robbert Fokkink ontwikkeld. We lichten de methode toe aan de hand van de opnamen die gemaakt zijn bij de reconstructie van een verkeersongeluk. Bij de reconstructie bewees deze methode zijn nut. Hoe zit het vervolg van dit artikel in elkaar? Nadat we een tamelijk gedetailleerde beschrijving van de reconstructie-opnamen hebben gegeven, vertellen we iets over de dubbelverhouding; die vervult een sleutelrol in de beschreven methode. Vervolgens laten we zien hoe de berekening van de snelheid kan worden uitgevoerd.
Het hoeft geen commentaar dat de hier beschreven methode heel goed bruikbaar is om samen met een groep leerlingen een realistisch experiment op te zetten, dat aanleiding kan zijn tot een aantal interessante en leerzame wiskundige beschouwingen.

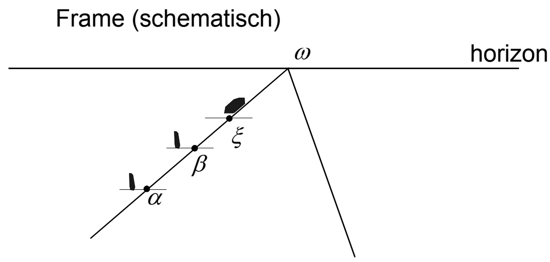
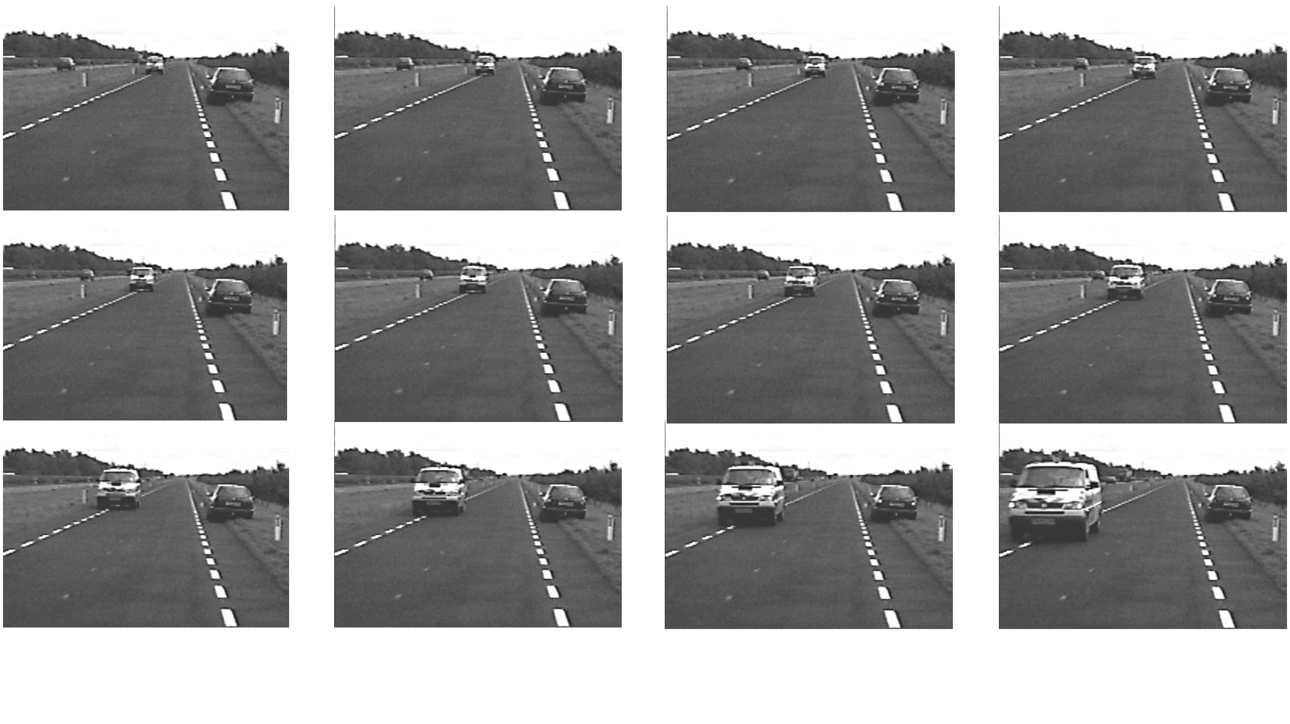


fig. 1 Een frame, schematisch weergegeven



Aanpak

Bij nauwkeurige beschouwing van een van de frames van de video zien we dat de auto op een rechte weg rijdt. Op de weg zien we twee nagenoeg parallelle (onderbroken) strepen. Verder zien we links van de weg (voor de bestuurder rechts) twee paaltjes, A en B. De afstand tussen de paaltjes is 42 meter; dit is gemeten bij de reconstructie. De auto rijdt boven de linker streep; we zullen die gebruiken voor onze metingen. Als eerste ijkpunt gebruiken we het snijpunt ω van de twee strepen; dat ligt op de horizon. Als we de lens van de videocamera opvatten als centrum van de centrale projectie van de buitenwereld op het frame, dan heet het beeld van dat snijpunt op de horizon het vluchtpunt van de beelden van de lijnen. Alle lijnen die in werkelijkheid onderling evenwijdig zijn, krijgen op het frame hetzelfde vluchtpunt.

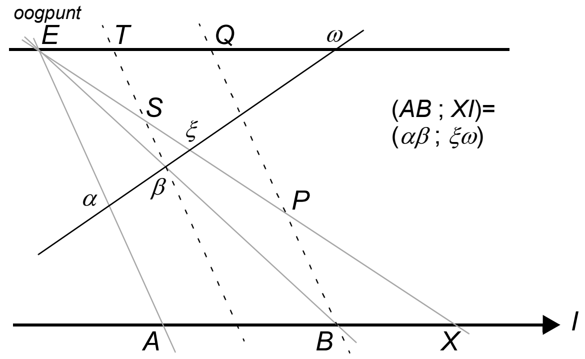


fig. 2 Dubbelverhouding invariant I

Zowel hier als verderop in dit verhaal gebruiken we enkele eigenschappen van de projectieve meetkunde en de beginselen van het perspectieftekenen. Dit wat betreft het eerste ijkpunt.
De twee andere ijkpunten zijn de punten op de linker streep die ter hoogte van de twee paaltjes A en B liggen. De juiste positie van de ijkpunten α en β die we, gemakshalve doch slordig, weer met α en β aanduiden, vinden we door lijnen evenwijdig aan de horizon (horizontaal dus), door de onderkant van de paaltjes A respectievelijk B, te tekenen en deze te snijden met de linker streep. De positie van de auto in het frame bepalen we als snijpunt van de verbindingslijn van de onderkant van de voorwielen en de linker streep; dit levert het punt ξ. We hebben zo op de linker streep de punten ω, α, β en ξ. Hieruit kunnen we de werkelijke afstand van de auto tot het punt op de weg bij paaltje A bepalen. Door dit voor ieder frame te doen, kunnen we een grafiek maken van het verband tussen de tijd en de afgelegde weg, en daaruit de snelheid bepalen, zie figuur 1.

Dubbelverhouding

Hoe vinden we nu uit de onderlinge positie van de punten ω, α, β en ξ de werkelijke afstand tussen paaltje A en auto X? Het sleutelwoord is hier 'dubbelverhouding'. Zoals we allemaal weten is de gewone verhouding van lengten niet invariant onder centrale projectie: bij het perspectieftekenen wordt een bepaald voorwerp op de voorgrond groter getekend dan een even groot voorwerp op de achtergrond. De *dubbelverhouding* echter is wel invariant onder centrale projectie. We zullen dit iets nauwkeuriger bekijken. Als P, Q, R en S vier punten zijn op een rechte lijn m, dan is de dubbelverhouding (PQ; RS) het getal:

$$\frac{RP}{RQ} : \frac{SP}{SQ} = \frac{RP}{RQ} \times \frac{SQ}{SP}$$

In de formule is RP de afstand van R tot P, dat is de lengte van het segment RP, en analoog voor RQ, SP en SQ. Als nu S op de lijn naar buiten beweegt in de richting van 'oneindig', dan nadert het quotiënt SP/SQ naar 1. Als S het punt op oneindig I is van de lijn m, dan definiëren we derhalve $(PQ; RI) = RP/RQ$.

Heel vaak worden in de definitie van dubbelverhouding *gerichte* lijnstukken gebruikt en worden de afstanden ook van een teken voorzien. Wij zullen dat echter niet doen.
Dat de dubbelverhouding invariant is onder centrale projectie, kan op verschillende manieren worden bewezen. In *Lessen in projectieve Meetkunde* (Kindt, 1996) gebeurt dit via dubbelverhoudingen van sinussen.

We geven hier een bewijs via gelijkvormigheid. In de figuur wordt een lijn l met daarop de punten A, B en X vanuit het punt E geprojecteerd op de lijn π met daarop de punten α, β, ξ en ω. Zie figuur 2. Je kunt hierbij denken aan de paaltjes A en B op de weg (of beter, de daarmee corresponderende punten op de linker streep op de weg) en auto X. De punten A, B en X worden afgebeeld op de punten α, β respectievelijk ξ in het frame. Het punt ω is het verdwijnpunt en correspondeert met het punt op oneindig I van de lijn l; merk op dat l evenwijdig is met de lijn $E\omega$.

We zullen eerst bewijzen dat $(AB; XI) = (\alpha\beta;\xi\omega)$. Daartoe tekenen we twee hulplijnen, namelijk door β en B, elk evenwijdig aan de lijn door E, α en A. Nu is $\Delta XPB \sim \Delta XEA$ en dus $XA/XB = EA/PB$. Verder is $1 = IA/IB = EA/QB$, want $EABQ$ is een parallellogram.

Dus is:

$$(AB; XI) = \frac{XA}{XB} : \frac{IA}{IB} = \frac{EA}{PB} : \frac{EA}{QB} = \frac{QB}{PB}$$

Op analoge wijze vindt men:

$$(\alpha\beta; \xi\omega) = \frac{\xi\alpha}{\xi\beta} : \frac{\omega\alpha}{\omega\beta} = \frac{E\alpha}{S\beta} : \frac{E\alpha}{T\beta} = \frac{T\beta}{S\beta}$$

Maar met gelijkvormigheid vinden we $PB/S\beta = EP/ES = EQ/ET$ en $QB/T\beta = EQ/ET$. Dus $QB/PB = T\beta/S\beta$, waaruit de gelijkheid van de dubbelverhoudingen volgt.

Voor het algemene geval projecteren we de lijn π op

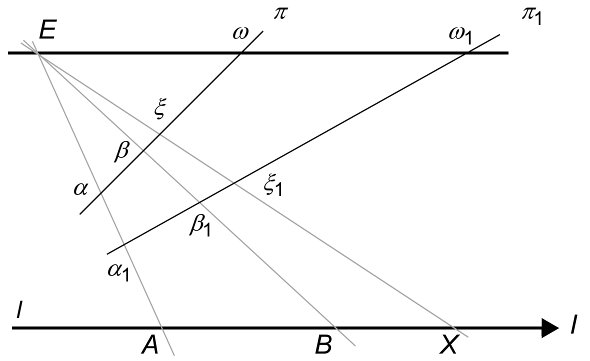


fig. 3 Dubbelverhouding invariant II

π_1 vanuit het punt E. Zie figuur 3. Om te bewijzen dat $(\alpha\beta;\ \xi\omega) = (\alpha_1\beta_1;\ \xi_1\omega_1)$ trekken we de lijn l evenwijdig aan $\omega\omega_1$. Met hetgeen zojuist is gevonden komt er:

$$(\alpha\beta;\ \xi\omega) = (AB;XI) = (\alpha_1\beta_1;\ \xi_1\omega_1)$$

Rekenwerk

Met behulp van de dubbelverhouding zullen we de afstanden tussen de punten in het frame koppelen aan de werkelijke afstanden. Omdat we met ongerichte lijnstukken werken, moeten we drie gevallen onderscheiden. Eerst bekijken we het geval dat X tussen I aan de ene kant en A en B aan de andere kant ligt; de auto komt van verre en is nog niet in B. Met behulp van de invariantie van de dubbelverhouding vinden we dan uit de figuur

$$d = \frac{XB}{XA} = (BA;XI) = (\beta\alpha;\xi\omega) = \frac{\xi\beta}{\xi\alpha}\frac{\omega\alpha}{\omega\beta}$$

Nu is $XB = XA - AB$ en dus $d = 1 - AB/XA$. Het resultaat is:

$$XA = \frac{1}{1+d}AB$$

Het tweede geval is dat de auto X tussen B en A is. Dan vinden we op bijna dezelfde wijze:

$$XA = \frac{1}{1+d}AB$$

Als ten slotte X ook A gepasseerd is, komt er:

$$XA = \frac{1}{1-d}AB$$

In elk van de frames kunnen we d bepalen uit de (met een gewone liniaal) gemeten afstanden $\xi\beta$, $\xi\alpha$, $\omega\beta$ en $\omega\alpha$. Dit heeft tot resultaat een afstand-tijd-diagram, waaruit de snelheid kan worden afgelezen.

Tijdens de workshop werd in vijftien groepjes van drie door elk groepje de afstanden in één frame gemeten en XA berekend. Zo kwam de workshop tot een snelheid van de auto van 108 km/uur. Dit was, vergeleken met de snelheid van 112 km/uur zoals bij de reconstructie gevonden, geen slecht resultaat. De in de workshop gevonden standaarddeviatie was kleiner dan de geschatte fout bij de reconstructie.

Ook interessant: de berekende afstanden XA waarbij auto X nog ver weg en dus dichtbij de horizon is, vertonen de grootste onnauwkeurigheid. Dat viel (achteraf) te verwachten: een kleine meetfout in het frame bij de horizon correspondeert met een grote fout in werkelijkheid.

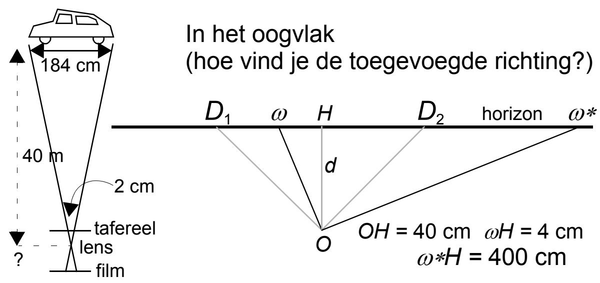


fig. 4 Het vinden van de toegevoegde richting

Rechtvaardiging

Er is een puntje dat we nog niet voldoende hebben toegelicht. In paragraaf 2 hebben we gezegd dat de ijkpunten α en β gevonden werden door vanuit de onderkant van de paaltjes A, respectievelijk B, horizontale lijnen te tekenen en deze te snijden met de linker lijn. Wat we natuurlijk willen bereiken is dat de lijnen vanuit A en B loodrecht staan op de linker lijn. Met andere woorden, we willen de lijnen tekenen in de richting die loodrecht staat op de richting van de weg. In boekjes over perspectieftekenen kun je vinden hoe dit moet. We illustreren dit met een voorbeeld. Zie figuur 4. We gebruiken het extra gegeven dat de afstand van de videocamera tot het eerste paaltje A ongeveer 40 meter is en de breedte van de auto ongeveer 2 meter. Als in de fotoafdruk van het frame waarin de auto bij het paaltje A is, de auto 2 cm breed is, dan is bij de fotoafdruk het oogpunt op 40 cm van de fotoafdruk; immers, dan hebben we zowel bij de afstand als bij de afmeting dezelfde schaal, namelijk 1:100. In de foto zien we dat ω ongeveer 4 cm uit het hoofdpunt ligt. (Zie figuur 4; de foto op ware grootte kunt u downloaden van de wiskrantsite). Merk op dat men vanuit het oogpunt O de hoeken ziet zoals ze in werkelijkheid zijn, dus ω loodrecht op ω^*.

Voor het verdwijnpunt ω^* van de lijnen loodrecht op de bundel door ω geldt $\omega\omega^* = 1600$, het kwadraat van de afstand. De afstand van ω^* tot het hoogtepunt is dus gelijk aan 400 cm. Deze berekening is niet erg nauwkeurig, maar laat wel zien dat de lijnen door ω^* bijna evenwijdig aan de horizon lopen.

J.M. Aarts, Technische Universiteit Delft