

# Boekbespreking

Titel: *Learning algebra in a computer algebra environment*. Dissertatie  
Auteur: P. Drijvers  
Uitgever: CD-beta Press, Utrecht 2003  
ISBN: 90-73346-55-X  
Prijs: € 20,00

Voelt u ook wel eens iets van wanhoop wanneer u een leerling probeert te helpen, terwijl deze absurde wegen inslaat om uit een opgave te komen, of alleen maar met berusting of wanhoop naar de opgave zit te staren?

Vaak lijken de wezenlijke problemen dan veel verder terug te grijpen dan naar de actuele stof; het zit veel dieper. Een belangrijke oorzaak is gebrek aan 'symbol sense': zo'n leerling raakt geblokkeerd bij het zien van zo'n vreemd rijtje symbolen of gaat met weinig of geen begrip er maar wat mee goochelen.

Paul Drijvers heeft onderzoek gedaan op het terrein van de fundamentele van het leren omgaan met algebra. Vanuit theoretische overwegingen heeft hij experimentele leerpakketten ontwikkeld, getest en geëvalueerd.

De ideeën, uitwerkingen, ervaringen en conclusies bespreekt hij in bovengenoemd boek, waarop hij onlangs gepromoveerd is.

Om een idee te geven van de problematiek zoals die door de auteur van het boek wordt aangepakt, geef ik hier een paar voorbeeldopgaven, aansluitend bij theorie en voorbeelden uit het boek:

- Voor welk getal geldt dat het tienvoud ervan honderd meer is dan het drievoud ervan?
- Los  $v$  op uit  $10v = 100 + 3v$
- Los  $v$  op uit  $uv = 1 + (3u + 1)v$

De tweede vergelijking is slechts een algebraïsche formulering van de eerste; de oplossing ervan kan sprekend lijken op de natuurlijke en voor de hand liggende manier waarop de eerste vergelijking zonder formele algebra kan worden aangepakt.

De derde vergelijking is van hetzelfde elementaire type: eerstegraads. Toch vinden leerlingen deze echt moeilijker. Waarom?

Eerst moet het patroon worden herkend; daarbij spelen  $u$  en  $3u+1$  de rol van gegeneraliseerde getallen. De parameter  $u$  moet hier dus niet als een plaatsvervanger voor een getal worden gezien.

De expressie  $3u+1$  moet hier eveneens als zo'n object worden gezien; dat is wezenlijk anders dan de manier waarop leerlingen aanvankelijk expressies leren zien, na-

melijk als een algoritme, in dit geval het algoritme dat bij een gegeven getal  $u$  dit met 3 vermenigvuldigt en bij het resultaat 1 optelt. Ook de oplossing kan door leerlingen als vreemd of zelfs onacceptabel worden ervaren:

$$v = -\frac{1}{2u+1}$$

'Maar dat is toch geen oplossing als je  $u$  niet weet?!'

Bij de moeilijkheden in het oplosproces kunt u zich vast ook wel wat voorstellen; ook die zijn niet alleen reken-technisch van aard, maar doorgaans in wezen conceptueel. Bovendien lijkt de oplossingsweg vreemd, verduisterd door manipulaties (het buiten en binnen haakjes brengen), en is het voor leerlingen vaak niet meer duidelijk wat het verband is met die natuurlijke weg voor het oplossen van een eerstegraads vergelijking, die ze in de eerste twee opgaven wel kunnen zien.

d. Los  $v$  op uit  $v\sqrt{u} = 1 + 2v\sqrt{1+u}$

Bij deze vergelijking, een famous voorbeeld van Wenger, treden vaak Pavlov-achtige reacties op: schrik voor de worteltekens, neiging om te gaan kwadrateren. Bovendien komen de typische fouten van onjuiste verwisselingen van de worteloperatie met optellen en aftrekken te voorschijn; dat gebeurt wellicht mede onder invloed van het gebrek aan herkenning van expressies als objecten, in het bijzonder als gegeneraliseerde getallen, en de wens iets overzichtelijks te verkrijgen.

e. Voor welke  $u$  heeft de vergelijking in  $v$ :

$$uv = 1 + (3u+1)v$$

geen oplossing?

Bij deze vergelijking treedt gemakkelijk verwarring op door de rolverwisseling van de variabelen: enerzijds moet  $u$  gezien worden als een gegeneraliseerd getal, anderzijds als een onbekende in een vergelijking.

f. Los  $v$  op uit  $\begin{cases} u+v = 100 \\ u-v = 6 \end{cases}$

g. Los  $v$  op uit  $\begin{cases} uv = 4 \\ u+v = 6 \end{cases}$

Hier staan twee stelsels vergelijkingen, waarin ook die rolwisseling problemen kan leveren: bijvoorbeeld eerst uit een vergelijking  $v$  oplossen met als oplossing een expressie in  $u$  (met  $u$  als gegeneraliseerd getal); die invullen voor de  $v$  in de andere vergelijking; nu  $u$  op gaan vatten als een onbekende en de vergelijking in  $u$  oplossen; tenslotte nog even daarmee  $v$  'echt' berekenen.

Een groot verschil tussen beide stelsels is natuurlijk dat

de eerste door interpretatie als ‘De som van twee getallen is 100 en het verschil is 6; welke getallen zijn dat?’ gemakkelijk zonder dit alles is op te lossen, wellicht met steun van visualisatie; de tweede vraagt voor een exacte oplossing echter om een formele aanpak, waarin leerlingen gemakkelijk de draad kwijt kunnen raken.

Het moge duidelijk zijn dat er een heel complex van conceptuele moeilijkheden in zelfs maar dit kleine stukje van de algebra verscholen zit. De auteur heeft zich dan ook beperkt, en het onderzoek gericht op het omgaan met parameters.

#### ***Wat verstaat de auteur hier onder ‘parameter’?***

In de eerste vijf voorbeelden is steeds  $v$  de variabele (waarnaar opgelost moet worden) en  $u$  de parameter.

Bij een functie zoals  $x \rightarrow (x - a)^2 + a$  wordt  $x$  de (functie)variabele genoemd en  $a$  de parameter. Hier is die parameter  $a$  in feite variabele van een hogere orde functie: bij iedere  $a$  hoort een functie; eigenlijk staat hier dus een functie van de reële getallen naar een verzameling van functies op de reële getallen. Het is dus geen wonder dat leerlingen daar wat moeilijk tegenaan kijken.

Daarmee is tevens duidelijk dat omgaan met parameters rijker is aan moeilijkheden dan omgaan met variabelen, maar dat je uit die moeilijkheden ook kunt leren over de moeilijkheden van het leren omgaan met variabelen. De auteur licht zijn keuze voor het thema parameters toe in paragraaf 4.2; het blijkt daar dat dit onderwerp met heel wat aspecten (en moeilijkheden) van de algebra verbonden is.

Zoals uit de titel al duidelijk is, heeft de auteur computeralgebra als centraal didactisch hulpmiddel ingezet en gekeken naar voor- en nadelen daarvan. Met zo’n systeem kunnen bijvoorbeeld vergelijkingen worden opgelost, maar er moet wel worden aangegeven naar welke variabele opgelost moet worden, dus wat de ‘onbekende’ is. Ook substituties kunnen worden uitgevoerd. Telkens moet de leerling aangeven wat de (volgende) benodigde stap is, de rekenmachine voert die taak uit met behulp van symbolische algoritmen en de leerling moet het resultaat interpreteren. Dat moge dan niet veel helpen de rekenvaardigheid te vergroten, in het kader van het leren omgaan met parameters is het een interessante aanpak. Dat blijkt inderdaad uit de ervaringen in het onderzoek, hoewel de auteur ook heel zorgvuldig en kritisch naar de beperkingen en bezwaren ervan kijkt.

Een duidelijk bezwaar van deze aanpak is het feit dat de leerlingen moeten leren omgaan met de nieuwe gereedschappen, vooreerst een grafische rekenmachine uitgebreid met een computeralgebrasysteem, de TI-89. Dat vergt in feite extra (voorbereidende) lessen en bijbehorend lesmateriaal. Theorie over het leren omgaan met zo’n systeem, de ontwikkeling van bijbehorend lesmateriaal, ervaringen hiermee en evaluatie hiervan vormen een interessante component van dit boek. Er wordt daarin

onder andere aandacht besteed aan het verband tussen conceptuele leerproblemen in de algebra en de moeilijkheden bij het gebruik van het computersysteem. Dat maakt dit deel ook nog interessant voor wie belangstelling heeft voor de conceptuele obstakels bij het leren van algebra, maar niet zo voor het inzetten van computeralgebra.

## **Overzicht van de inhoud**

‘*Learning algebra in a computer algebra environment*’ is, zeker relatief gezien het feit dat het een proefschrift is, goed en prettig leesbaar; bovendien is het heel goed selectief te lezen.

In hoofdstuk 1 geeft de auteur een smaakmakende introductie van de centrale ideeën (1.2) en formuleert in het vervolg de vragen van het onderzoek.

Hoofdstuk 2 behandelt de onderzoeksmethodologie van het ontwikkelingsonderzoek en de opzet van de experimenten, vooral interessant voor de evaluatie van de wetenschappelijke waarde van de experimenten.

Hoofdstuk 3 is een heel interessante uiteenzetting van het leren van algebra. Met name de boeiende paragrafen 3.3, 3.4 en 3.5 over leermoeilijkheden zijn een wezenlijke achtergrond voor volgende hoofdstukken. Vanaf halverwege paragraaf 3.5 wordt de theorie wel wat meer abstract, maar van daaraf doorgaan met het volgende hoofdstuk hoeft niet desastreuus te zijn.

Hoofdstuk 4 bespreekt de keuze voor het onderwerp parameters en een historisch perspectief op het onderwerp. Daarop volgen twee zeer heldere paragrafen (4.4 en 4.5) over de verschillende rollen die een parameter kan spelen, zoals gegeneraliseerd getal, onbekende in een vergelijking en formeel algebraïsch symbool.

Tevens wordt hier verband gelegd met niveau-theorieën van het leren van wiskunde. Deze paragrafen geven wezenlijke ideeën voor de opzet van de experimentele leerstof en voor de analyse van leerlingwerk in het vervolg.

Hoofdstuk 5 bespreekt het didactisch gebruik van computeralgebra in dit kader, de geboden kansen en de te verwachten voor- en nadelen; deze laatste worden overzichtelijk besproken in paragraaf 5.4. Verder komt het leren omgaan met zo’n systeem als gereedschap aan de orde.

De hoofdstukken 6, 7 en 8 bespreken de drie experimentele lessenseries, die plaatsvonden in VWO-3 en VWO-4 klassen. Het concrete materiaal is te vinden op [www.fi.uu.nl/~pauld/dissertation](http://www.fi.uu.nl/~pauld/dissertation)

Fascinerend is hier allereerst te zien hoe in dit geval nu eens niet een stuk wiskundige theorie en bijbehorende rekentechniek, maar meer fundamentele zaken de lijn van de leerstof gaan bepalen. Daarop volgen protocollen van gesprekken van observators met leerlingen met verhelde-

rende analyses, resultaten van tests en evaluatie van het geheel met ideeën over verbeteringen. Leuke hoofdstukken, waarin je desgewenst ook kunt grasduinen. Hoofdstukken 9, 10 en 11 bespreken de resultaten, waarbij de conclusies vaak geïllustreerd worden door mooie protocollen uit de lessen. Het strekt de auteur tot eer dat hij op een kritische wijze naar de resultaten kijkt en niet alleen jubelt over de positieve resultaten. Dat maakt met name hoofdstuk 9 over het leren omgaan met parameters

tot een zeer lezenswaardig stuk, ook voor wie niet zo'n belangstelling heeft voor het inzetten van computeralgebra als didactisch hulpmiddel.

Na het lezen van dit boek kijk ik met meer begrip naar de problemen waar leerlingen mee worstelen bij het ploeteren met wiskundeopgaven.

*Ernic Kamerich, Radboud Universiteit, Nijmegen*

---

## HKRWO SYMPOSIUM 2004

Symposium X van de Historische Kring Reken- en Wiskunde Onderwijs

### **van OUDE MATEN en het NIEUWE METEN Elementen uit de geschiedenis van het meetonderwijs in Nederland en Engeland**

15 mei 2004, Hogeschool Domstad te Utrecht 10.15 - 16.00 uur  
(Koningsbergerstraat 9)

Danny Beckers – Katholieke Universiteit Nijmegen

#### **Van oude maten, de dingen die voorbijgaan**

De introductie van het metrieke stelsel in het Nederlandse onderwijs, 1820-1850

\*

Edu Wijdeveld – oud-directeur IOWO

#### **Heb de natuur lief**

Over leven en werk van Marcel Minnaert (1893-1970)

naar aanleiding van diens biografie van Leo Molenaar

\*

Iris Gulikers – Rijksuniversiteit Groningen

#### **De 17<sup>e</sup>-eeuwse Nederlandse landmeter: vroeger en nu**

Leerlingen van nu worden landmeter van toen

\*

Ed de Moor – Freudenthal Instituut Utrecht

#### **Freudenthal's opvattingen over meetonderwijs**

Metten in het basisonderwijs sinds 1970, leerlijnen en doelen anno 2004

\*

Peter Ransom – The Mountbatten School and Language College, Romsey, UK

\*

#### **A Metre of Mars – how does the Metric System Measure up?**

Measuring in old English text books and recent classroom activities

\*

Tentoonstelling van oude boeken en materialen over het meetonderwijs.

Eenieder is uitgenodigd om een poster op te hangen en/of iets te exposeren.

**Deelname: maak € 22,- over op giro 4657326 tnv HKRWO te Amsterdam**

(koffie, thee en lunch inbegrepen).

HKRWO: Freudenthal Instituut, Postbus 9432, 3505 GK Utrecht, tel: 030-2635555.

Inlichtingen: e.demoor@fi.uu.nl, d.beckers@inter.nl.net, s.eerhart@fi.uu.nl

of Ed de Moor: 020-6121382