

'Minnaert revisited' kopte de *Nieuwe Wiskrant* in juni. Jan van de Craats toonde aan dat het geen gezichtsbedrog is dat de maan scheef staat. **Piet Lemmens** nam het voor Minnaert op en laat zien dat hij toch gelijk had. **Jan van de Craats** revisited dus, maar wel met een sportief naschrift ...

De horentjes van de maan: perspectivische vertekening

Het klopt wel

In de *Nieuwe Wiskrant* van juni jl. trof ik een artikel aan van Jan van de Craats getiteld *De maan en de regenboog*, met daarin onder andere een beschouwing over de stand van de maan, refererend aan een opmerking van Minnaert in zijn *De natuurkunde van 't vrije veld*.

Het gaat erom dat de stand van de niet volle maan aan de hemel niet schijnt te kloppen met de richting naar de zon. Wanneer zon en maan beide aan de hemel te zien zijn, verwacht men aan de hand van de schijngestalte van de maan een veel hogere stand van de zon.

Minnaert merkt op dat dit 'hoe onwaarschijnlijk het eerst leek' toch wel blijkt te kloppen als we de richting maan-zon vastleggen door een touwtje voor ons oog te spannen. Van de Craats schrijft dat dit 'gewoon niet waar is' en dat het verschijnsel wel degelijk reëel is en geen gezichtsbedrog.

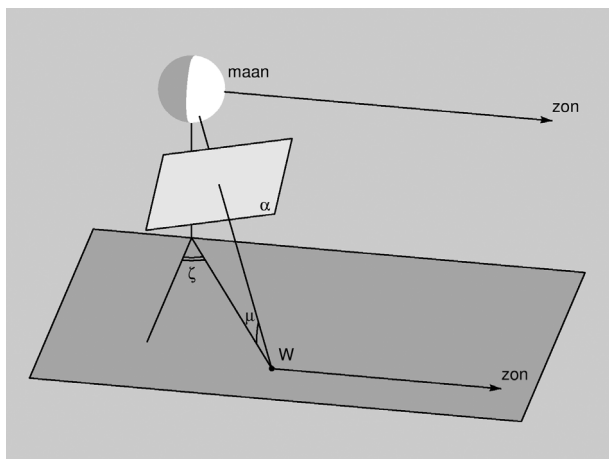


fig. 1 De oorspronkelijke figuur 5

De tekeningen van Van de Craats zijn erg duidelijk, en uit zijn figuur 5 blijkt (zie figuur 1) dat wat wij zien invariant is onder loodrechte spiegeling ten opzichte van het vlak

door W (= aarde), maan en zon. Maar dit betekent dat in het projectievlak α de verbindingslijn tussen de horens van de maan wel loodrecht staat op de projectie van de verbindingslijn maan-zon! Nemen we aan dat we het hemelgewelf ervaren als een halve bol (van de binnenkant bekeken), dan is de projectie van de verbindingslijn maan-zon op dat hemelgewelf een stuk van een grote cirkel. Alleen als de maan in het zuiden staat zal deze cirkel ter plaatse van de maan evenwijdig aan de horizoncirkel verlopen. Het is dus niet moeilijk om het verschijnsel van de 'scheefstaande' maan kwalitatief te verklaren.

Het experiment met het touwtje

Wat nog in het vat zit, is het experiment met het touwtje dat Minnaert noemt. Het verwondert mij vooral dat Minnaert het experiment niet uitvoerig beschrijft, zoals hij dat wel doet bij veel van zijn andere experimenten. Theoretisch moet het kloppen dat een touwtje vanuit een vaste oogpositie (1) bekeken met het ene uiteinde op de lijn oog-zon (2) en met het andere uiteinde op de lijn oog-maan (3) tegen het hemelgewelf projecteert langs voor-noemde grote cirkel. Wanneer men het experiment daadwerkelijk uitvoert, blijkt het uitermate lastig te zijn om de randvoorwaarden (1), (2) en (3) te realiseren zonder hulpmiddelen te gebruiken. Heel goede resultaten kunnen worden bereikt met een camerastatief dat met een kogelgewricht in allerlei posities te stellen is. Op het statief wordt een dun plankje bevestigd, en het geheel wordt zo ingesteld dat het vlak van het plankje zowel door de zon als door de maan gaat. Scherend over het plankje kijkend ziet men dan de projectie van de lijn maan-zon op het hemelgewelf, en wordt Minnaerts beschrijving bewaarheid! Wel is het nodig dat de maan niet al te dicht bij volle of nieuwe maan staat, want in die gevallen is de stand van het plankje erg gevoelig voor instelfouten.

Veel sneller en gemakkelijker werkt men met een rechte stok, bijvoorbeeld een bezemsteel, die men eerst op de zon richt en dan *evenwijdig* verplaatst tot hij door de maan gaat. Het is onmiddellijk evident dat deze methode juist is, want de werkelijke richting maan-zon wijkt maar heel weinig af van de richting oog-zon. Maar misschien

bedoelde Minnaert dat wel met zijn touwtje. We kunnen het hem niet meer vragen, maar zeker was het niet Minnaerts stijl om iets te beweren zonder referenties en zonder het zelf geprobeerd te hebben.

In de situatie die Van de Craats bekijkt, waarin de zon aan de horizon staat, hebben we op de plaats van de maan twee horizontale richtingen: die van de stok en van de horizon loodrecht onder de maan. Omdat we er scheef tegenaan kijken, lijkt de richting van de stok niet horizontaal. Het is vergelijkbaar met de richting van de dakgoot van een huis in een perspectivische tekening.

Nog meer gezichtsbedrog

Voor de aardigheid wil ik hier een totaal ander experiment beschrijven dat te maken heeft met gezichtsbedrog en projecties van rechte lijnen. Men gaat op een zonnige dag met de zon in de rug staan in de nabijheid van een kort verticaal paaltje. Men ziet dan de eigen schaduw en het paaltje met zijn schaduw. Volgens de wetten van de centrale projectie moet de verbindingslijn tussen de top van het paaltje en de top van zijn schaduw door de schaduw van ons hoofd lijken te gaan. Het is een leuke oefening om dit eerst theoretisch te bewijzen. (Projectie op het grondvlak.)

Op het eerste gezicht, zonder hulpmiddelen, lijkt dit helemaal niet te kloppen. Gebruikt men echter een recht stokje of een touwtje dat men zo houdt dat het door de top van het paaltje en de top van de schaduw ervan lijkt te gaan, dan blijkt dat het wel degelijk door de schaduw van ons hoofd lijkt te gaan!

Ik denk dat dit gezichtsbedrog ontstaat omdat men zich zonder hulpmiddelen eenvoudig niet kan voorstellen dat de werkelijke lijn tussen de top van het paaltje en de top van de schaduw ervan door het hoofd gaat (en dat doet die lijn natuurlijk ook niet).

Naschrift van Jan van de Craats

Ook Aad Goddijn wees me direct na het verschijnen van mijn artikel al op de gedachtenfout die ik maakte, toen ik schreef dat we de verbindingslijn van de horens van de maan meestal niet loodrecht zien op de zonsrichting. Ik beweerde dat we een rechte hoek alleen als rechte hoek zien wanneer het vlak ervan loodrecht staat op onze blikrichting, maar dat is onjuist: het is voldoende als een van de benen van de rechte hoek loodrecht op de blikrichting staat, en dat is hier precies het geval met de verbindingslijn van de horens.

Piet Lemmens geeft, verwijzend naar mijn figuur 5, een kort en overtuigend bewijs van het feit dat de projectie van de zonsrichting in het projectievlak α wel degelijk altijd loodrecht staat op de verbindingslijn van de horens. Ik buig deemoedig het hoofd.

Wel voel ik me gesterkt door het feit dat ook Lemmens Minnaerts beschrijving erg summier en weinig helder vindt. Minnaert schrijft: ‘Leg de richting maan-zon ech-

ter vast door een touwtje voor uw oog te spannen: hoe onwaarschijnlijk het eerst leek, toch zult u nu waarnemen dat aan de loodrechtheid inderdaad voldaan is!’

Ik had niet begrepen hoe Minnaert dat touwtje wilde spannen. Ook op dit punt zijn Lemmens’ verklaringen duidelijk.

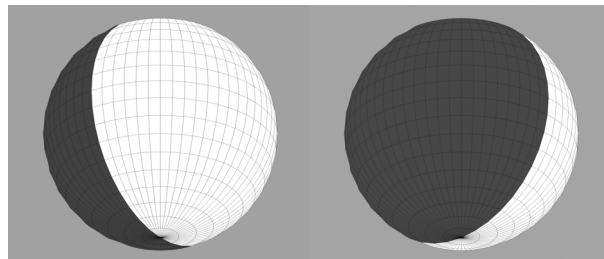


fig. 2 De oorspronkelijke figuur 6

Ik eindig met een variant op figuur 6 van mijn artikel waarin twee projecties bij zonsondergang te zien waren op vlak α , gemaakt met behulp van een bolcoördinaten-net op het maanoppervlak dat past bij het cartesische coördinatenstelsel van de waarnemer op aarde.

Daarin is de begrenzing van het door de zon beschenen deel een stel ‘maanmeridianen’ die samen een grote cirkel vormen loodrecht op de zonsrichting. Als we nu vanuit het middelpunt van de (doorzichtig gedachte) maan in de zonsrichting een pijl tekenen naar het maanoppervlak, dan zal die de ‘maanevenaar’ precies treffen op de meridiaan die 90° verder staat. In de figuur is die pijl getekend, en inderdaad, hij staat loodrecht op de verbindingslijn van de horens!

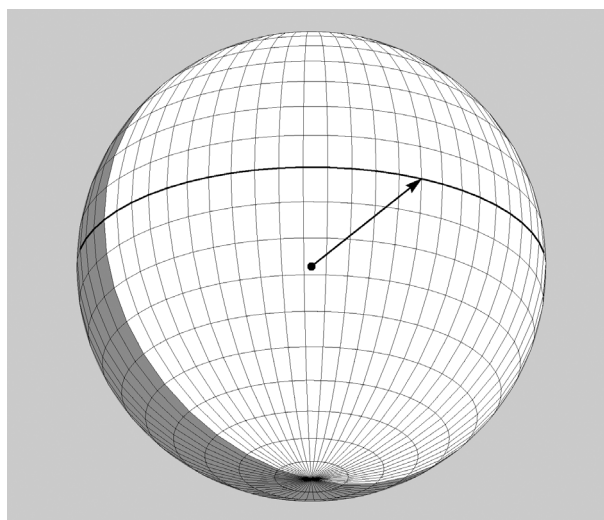


fig. 3 Een variant op figuur 6

*Piet Lemmens, Mathematisch Instituut, Utrecht
Jan van de Craats, KMA, UvA, OU*