Wanneer een kubus om een lichaamsdiagonaal wordt gewenteld, ontstaan er kegels en hyperboloïden. Pierre Germinal Dandelin, een negentiende eeuwse Belgische officier, bewees de stelling van Pascal met behulp van deze hyperboloïden; let wel, zonder ook maar een tekening te maken. Zijn landgenoot **Michel Roelens** maakt de plaatjes en en kleurt het verhaal af.

Lichamelijke wentelingen

– de geschiedenis van de hyperboloïde –

Inleiding

Omwentelingslichamen zijn vertrouwde objecten in ons wiskundeonderwijs, zowel in de lessen ruimtemeetkunde als bij de toepassingen van de integraalrekening. Meestal gaat het hierbij om het wentelen van een vlakke figuur of kromme rond een as die in hetzelfde vlak ligt.
Nog boeiender wordt het wanneer we hele ruimtelichamen beginnen te wentelen …

De wentelende kubus

Dit probleem heb ik enkele keren aan leerlingen en toekomstige leraren voorgelegd.

Een kubus wentelt rond een van zijn ruimtediagonalen (figuur 1) en laat hierbij in de ruimte een ‘spoor’ achter. Beschrijf zo nauwkeurig mogelijk het omwentelingslichaam dat op die manier ontstaat.

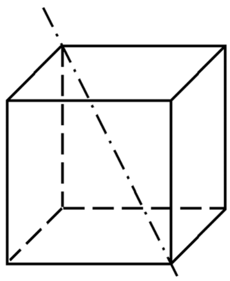

fig. 1 Kubus met ruimtediagonaal

Elk groepje beschikt over een kubusje. Sommige deelnemers gaan op de experimentele toer en laten hun kubus heel snel met één hoekpunt op de tafel rondtollen. Anderen gebruiken de kubus eerder ter ondersteuning van een ruimtelijke redenering. Iedereen is het er vrij snel over eens dat er twee kegels ontstaan door de wenteling van de zes ribben die de wentelas snijden (en die eenzelfde hoek vormen met de wentelas). Eventjes denken sommigen dat het omwentelingslichaam gewoon bestaat uit twee kegels waarvan de grondvlakken samenvallen, maar het experiment wijst uit dat er nog een stuk tussenzit. Het kan even duren voor de leerlingen of studenten beseffen dat het stuk tussen de twee kegels veroorzaakt wordt door de ribben die de wentelas kruisen. Het gaat dus om een stuk van een (eenbladige omwentelings)hyperboloïde. Dit koeltorenvormig ruimtelichaam was in een van de vorige lessen aan bod gekomen.

In figuur 2 zie je enkele beelden van een simulatie in *Doorzien*: links de kubus klaar om te wentelen, met een ruimtediagonaal samenvallend met de z-as, in het midden het verkregen omwentelingslichaam en rechts een loodrecht vooraanzicht van ditzelfde lichaam. Het wentelen is hierbij niet continu gebeurd, maar met schokjes van 5°.

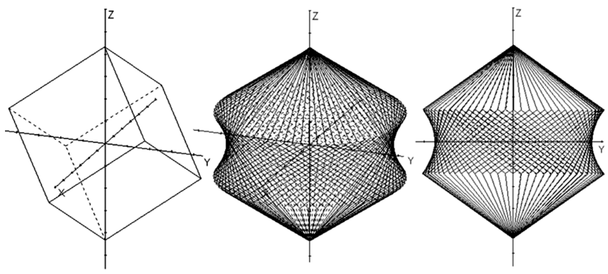

fig. 2 Een kubus wentelen rond een ruimtediagonaal met Doorzien

In de formulering van de opgave stond ‘beschrijf zo nauwkeurig mogelijk …’ Terecht gaan sommige groepjes dan ook op zoek naar de afmetingen van het verkregen lichaam: de straal en de hoogte van de kegels, de hoogte van het stuk hyperboloïde en de straal van haar ‘taille’ (de kleinste draaicirkel).

Neem als lengte-eenheid de ribbe van de kubus. De straal r en de hoogte h van de kegel kunnen bijvoorbeeld worden berekend met evenredigheden in de rechthoekige driehoek van figuur 3:

$$r = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \approx 0,82 \text{ en } h = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,58$$

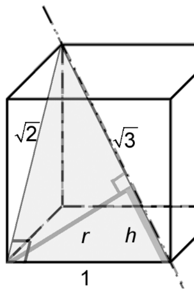

fig. 3 De berekening van r en h

Een leuke vaststelling hierbij is dat de hoogte van de kegel eenderde is van de hele ruimtediagonaal. Anders gezegd: de drie onderdelen van het omwentelingslichaam zijn precies even hoog. Dit kon voorspeld worden: als je de ruimtediagonaal waar rondomheen gewenteld wordt verticaal op de tafel zet, zijn alle ribben even steil ten opzichte van de tafel. De straal *t* van de taille van de hyperboloïde is de kortste afstand tussen de wentelas en een kruisende ribbe, of de afstand van het midden van de wentelas tot het midden van een kruisende ribbe. In figuur 4 zie je duidelijk dat dit de halve lengte is van de diagonaal van een vierkant met zijde 1, dus:

$$t = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,71$$

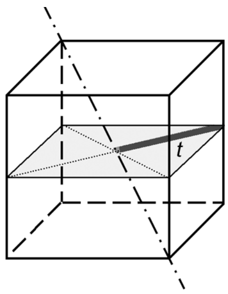

fig. 4 De berekening van de taille t

Met deze gegevens kunnen leerlingen die vertrouwd zijn met de integraalrekening eventueel een vergelijking opstellen voor de doorsnede van de hyperboloïde met een vlak door de wentelas om hiermee het volume van het omwentelingslichaam te berekenen. Ze vinden voor het totale volume:

$$V = 2 \cdot V_{kegel} + V_{hyp} = 2 \cdot \frac{2\pi}{9\sqrt{3}} + \frac{5\pi}{9\sqrt{3}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \approx 1,81$$

Enkele andere wentelende lichamen

Je kunt natuurlijk ook andere ruimtelichamen wentelen. In figuur 5 zie je het omwentelingslichaam dat je verkrijgt door een kubus te laten wentelen rond de diagonaal van een zijvlak. De tailles van de hyperboloïden vallen hier samen met het boven- en het ondervlak. (We laten de lezer zelf ontdekken waarom dit eigenlijk evident is.) De figuren hieronder zijn ontstaan door een draadmodel te wentelen, vandaar dat je binnenin nog een paar kegels ziet.

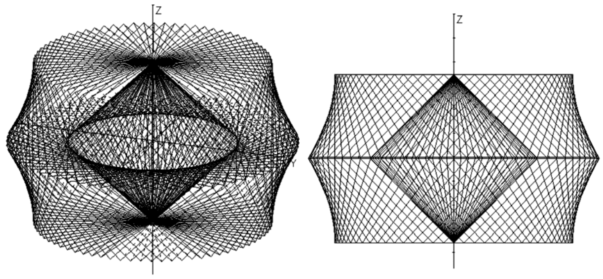

fig. 5 Een kubus wentelen rond een zijvlaksdiagonaal

Een uitdaging voor de lezer: neem een piramide met een vierkant grondvlak en gelijkzijdige zijvlakken, en laat het rond een van de opstaande ribben wentelen. Beschrijf wat je krijgt. Het bepalen van de positie en de straal van de taille is hier een stuk moeilijker!

Drieaanzicht van de hyperboloïde

Deze wentelende lichamen riepen bij mij vragen op over het verband tussen de wentelende rechte en de hyperbool die je ziet in loodrecht vooraanzicht. Is er een eenvoudig verband tussen de helling van de wentelende rechte en de vorm van de hyperbool (vastgelegd door de excentriciteit of door de helling van de asymptoten)?
Om hier helderheid in te krijgen, tekende ik in Cabri een drieaanzicht (vóór-, boven- en zijaanzicht) van een (stuk) hyperboloïde, verkregen door een lijnstuk te wentelen rond een verticale wentelas (figuur 6). De kleine cirkel is de taille. In bovenaanzicht raakt het lijnstuk aan de taille. Door het raakpunt te verplaatsen op de taille, kun je (met de hand of met een animatie) het lijnstuk laten rondwentelen. Als het wentelende lijnstuk een spoor nalaat, zie je een drieaanzicht van een hyperboloïde ontstaan. Deze Cabrifiguur is beschikbaar op www.uitwiskeling.be

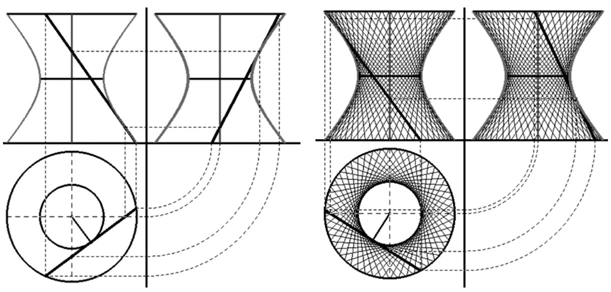

fig. 6 Drieaanzicht omwenteling lijnstuk in Cabri

De hyperbool die je in vooraanzicht ziet, is de omhullende van het vooraanzicht van de wentelende rechte. Anders gezegd: het vooraanzicht van de rechte raakt steeds aan de hyperbool. Nu heeft het vooraanzicht van de rechte de kleinste helling wanneer die rechte frontaal staat. Hieruit volgt dat het vooraanzicht van een frontale stand een asymptoot is van de hyperbool en dat het raken in dit geval op oneindig gebeurt (zie figuur 7). Immers, stel dat het vooraanzicht van de frontale rechte echt ergens zou raken aan de hyperbool, dan zou je rechten kunnen vinden die minder steil zijn en verderop raken aan de hyperbool. De helling van de asymptoten is bijgevolg gelijk aan de helling (ten opzichte een horizontaal vlak) van de wentelende rechte.

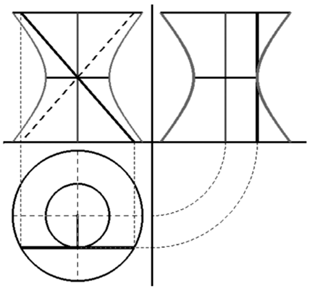

fig. 7 Het wentelende lijnstuk in frontale stand

Met dit drieaanzicht kun je ook goed inzien dat er door elk punt van de hyperboloïde juist twee rechten bestaan die op de hyperboloïde liggen (twee ‘beschrijvenden’). Immers, veronderstel dat je de drie aanzichten hebt van een punt van de hyperboloïde. In bovenaanzicht is dit een punt buiten de taille en binnen de grote cirkel als je wilt dat het een punt van het getekende stuk van de hyperboloïde zou zijn. Uit dit punt kun je, nog steeds in bovenaanzicht, precies twee raaklijnen aan de taille construeren. Door deze lijnen ‘op te halen’ vind je de drie aanzichten van de twee beschrijvenden door dat punt! Een van deze beschrijvenden is onze wentelende rechte wanneer die door dat punt passeert; de andere is een stand van de andere wentelende rechte die dezelfde hyperboloïde genereert. Er zijn dus twee ‘families’ beschrijvenden die overeenkomen met twee mogelijke wentelende rechten.

Wat geschiedenis van de hyperboloïde

In zijn werk *Over conoïden en sferoïden* berekende Archimedes (derde eeuw v. Chr.) reeds het volume van een stuk hyperboloïde. De hyperboloïde ontstond bij hem door een hyperbool te wentelen rond een van zijn assen. Wentelen rond de hoofdas levert een tweebladige hyperboloïde op; wentelen rond de nevenas geeft onze eenbladige hyperboloïde. Hierbij was nog geen sprake van het wentelen van een kruisende rechte rond een as.

In de zeventiende eeuw bewees Sir Christopher Wren (vooral bekend als architect van St. Paul’s Cathedral in Londen) dat er door elk punt van een eenbladige omwentelingshyperboloïde twee rechten bestaan die volledig op de hyperboloïde liggen. Anders gezegd: de hyperboloïde is een (dubbel geregeld) ‘regeloppervlak’.

fig. 8 Pierre Germinal Dandelin

De Belgische officier Pierre Germinal Dandelin (negentiende eeuw) is, samen met Adolphe Quételet, bekend om zijn ‘bollen’, waarmee hij bewijst dat een vlakke doorsnede van een kegel voldoet aan de vlakke definitie van een ellips (respectievelijk parabool of hyperbool). Als je een kegel snijdt met een vlak, zijn er twee bollen die zowel aan het vlak als aan de kegel raken. De raakpunten van deze bollen met het vlak zijn de brandpunten van de kegelsnede. In het geval van een parabool is er maar één bol en brandpunt; de andere bol en het andere brandpunt zijn dan weg ‘op oneindig’. Het bewijs steunt op het feit dat de raaklijnstukken uit een punt aan een bol even lang zijn. Hiermee toont hij aan (voor de ellips) dat de som van de afstanden van een punt van de kegelsnede tot de raakpunten gelijk is aan de afstand tussen de raakcirkels van de bollen aan de kegel, gemeten langs een beschrijvende van de kegel (figuur 9). Enkele jaren later (Dandelin, 1826) veralgemeniseert hij dit resultaat tot een hyperboloïde in plaats van een kegel. De doorsnede van een hyperboloïde met een vlak is eveneens een kegelsnede en het bewijs met de bollen blijft kloppen!

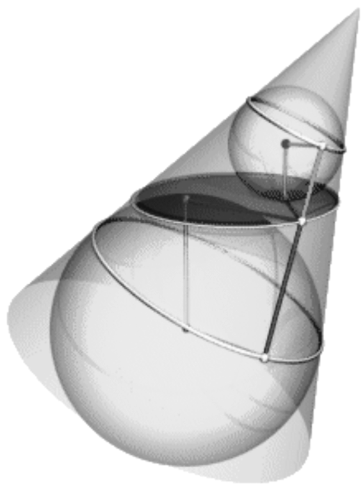

fig. 9 Het bewijs met de bollen van Dandelin voor de ellips

Hij gaat zelfs een stap verder: aan de hand van een hyperboloïde geeft hij een ruimtelijk bewijs voor de stellingen van Pascal en Brianchon in verband met zeshoeken die ingeschreven, respectievelijk omgeschreven zijn aan een kegelsnede. In het Vlaamse onderwijs komen deze stellingen soms aan bod bij de projectieve studie van kegelsneden in de analytische meetkunde (enkel in richtingen met acht uur wiskunde per week). Stelling van Pascal (figuur 10): als je zes punten *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, en *F* van een kegelsnede verbindt tot een (niet noodzakelijk convexe) zeshoek *AECFBD*, dan liggen de snijpunten *S*, *T* en *U* van de overstaande zijden steeds op één rechte lijn.

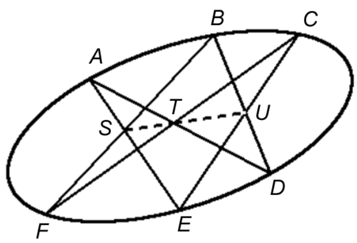

fig. 10 Stelling van Pascal

De stelling van Brianchon (figuur 11) is hiervan de 'duale' eigenschap. Dit wil zeggen dat je die uit de stelling van Pascal kunt verkrijgen door de punten *A*, *B*, … van de kegelsnede te vervangen door raaklijnen *a*, *b*, … aan de kegelsnede; de verbindingslijnen van de punten *A*, *B*, … te vervangen door de snijpunten van de corresponderende raaklijnen; de snijpunten *S*, *T*, *U* van verbindingslijnen door verbindingslijnen *s*, *t*, *u* van snijpunten en ten slotte de collineariteit van de punten *S*, *T*, *U* door de concurrentie van de lijnen *s*, *t*, *u*. Dit geeft: als je met zes raaklijnen *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* aan een kegelsnede een (niet noodzakelijk convexe) zeshoek vormt, dan gaan de verbindingslijnen *s*, *t* en *u* van overstaande hoekpunten steeds door één punt.

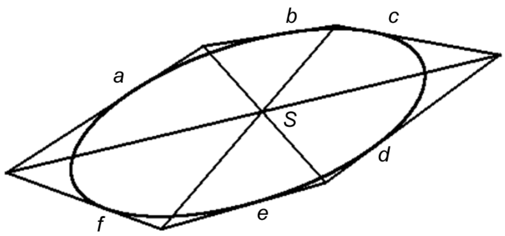

fig. 11 Stelling van Brianchon

Deze eigenschappen zijn projectieve eigenschappen: ze blijven kloppen wanneer bepaalde (snij)punten 'op oneindig' liggen. Vlakke bewijzen en (veel) meer informatie over deze stellingen vind je bijvoorbeeld in Kindt, 1993a.

Dandelin's bewijs van de stelling van Pascal

Dandelin (1826) toont de vlakke stellingen van Pascal en Brianchon aan via een redenering in de driedimensionale ruimte, een procédé dat Martin Kindt ooit een 'ruimtevisioen in Platland' heeft genoemd (zie Kindt, 1993b). Hoe visueel de redenering ook is, Dandelin maakt er geen enkele tekening bij (waagt hij zich niet aan het tekenen van hyperboloïden?). Bij het lezen van deze negentiende-eeuwse tekst, waarvan de Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres mij een kopie had toegestuurd, moest ik echter wel allerlei schetsen maken om de draad te kunnen volgen. Hieronder beschrijf ik het bewijs van de stelling van Pascal, maar dan met tekeningen.
Dandelin vertrekt van zes punten op een kegelsnede (wij nemen het geval van een ellips) die hij *D*, *I*, *D'*, *I'*, *D''*, *I''* noemt (figuur 12). Hij wil aantonen dat de snijpunten van *DI* met *D''I'*, van *D'I* met *D''I''* en van *DI''* met *D' I'* door één punt gaan.

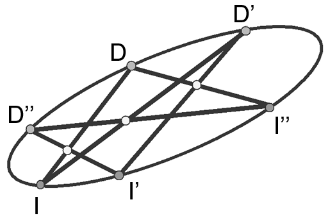

fig. 12 Stelling van Pascal

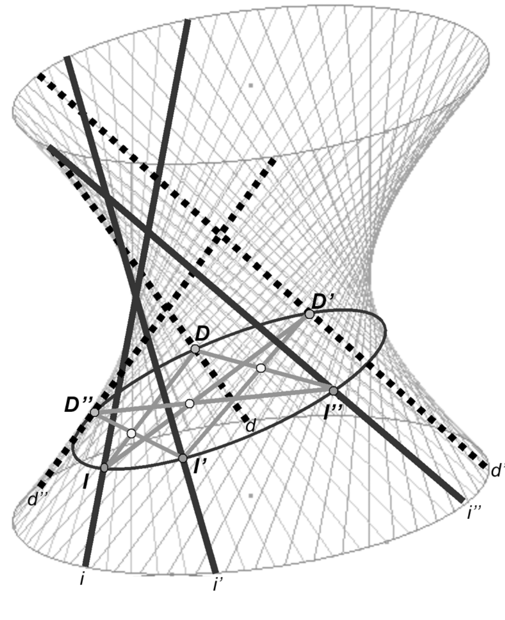

fig. 13 Directe en indirecte beschrijvenden

Eerst toont hij aan dat er een omwentelingshyperboloïde bestaat waarvan de gegeven ellips een vlakke doorsnede is. Vervolgens neemt hij door de punten *D*, *D'* en *D''* een beschrijvende van de ene familie, die hij 'direct' noemt, en door de punten *I*, *I'* en *I''* een beschrijvende van de andere familie, die hij 'indirect' noemt (figuur 13). Deze beschrijvenden noemt hij *d*, *d'*, *d''*, *i*, *i'* en *i''*.

Elke beschrijvende van de directe familie snijdt elke beschrijvende van de indirecte familie, desnoods op oneindig. Je kunt immers nagaan dat er voor elk 'gemengd' paar beschrijvenden (eentje uit elke familie) een vlak bestaat ten opzichte waarvan ze elkaars spiegelbeeld zijn!

Bijgevolg snijden ze elkaar in dit spiegelvlak, tenzij ze met dit vlak evenwijdig zijn maar dan moeten ze ook onderling evenwijdig zijn. Bovendien kun je nagaan dat twee beschrijvenden van eenzelfde familie elkaar nooit snijden.
De beschrijvende *d* (door *D*) snijdt dus de beschrijvende *i* (door *I*) zodat *d* en *i* één vlak bepalen. Ook *d''* en *i'* bepalen een vlak. De snijlijn van de vlakken *vl*(*di*) en *vl* (*d''i'*) bevat de punten *U* (snijpunt van *d* met *i'*) en *V* (snijpunt van *d''* en *i*), zie figuur 14.

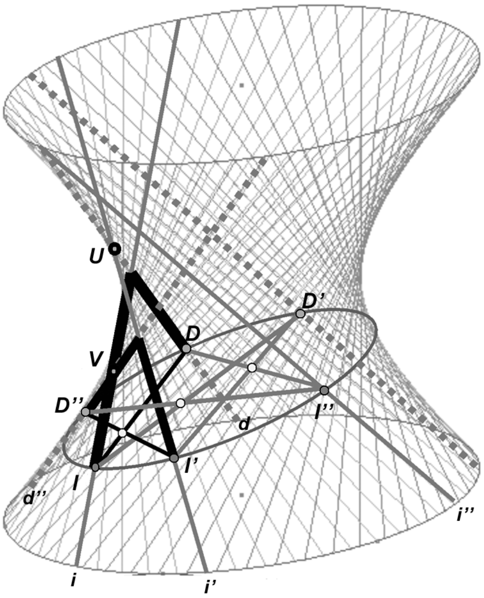

fig. 14 Vlakken door d, i en door d'', i'

Op dezelfde manier bevat de snijlijn van vl(*d'i*) en vl(*d''i''*) de punten *V* en *W*, zie figuur 15. En bevat de snijlijn van *vl*(*di''*) en *vl*(*d'i'*) de punten *U* en *W*, zie figuur 16. Al deze snijlijnen liggen bijgevolg in één vlak, het vlak bepaald door de drie punten *U*, *V* en *W*.

De drie punten waar het in de stelling van Pascal over gaat, liggen ook in dat vlak *UVW*, en bovendien liggen ze in het vlak van de ellips. Ze liggen bijgevolg op de snijlijn van twee vlakken en dus zijn ze collineair!
Hiermee is de stelling van Pascal bewezen. En hiermee is ook duidelijk waarom Dandelin een hyperboloïde gebruikt en geen kegel: de punten *U*, *V* en *W* zouden bij een kegel uiteraard samenvallen met de top van de kegel.

Deze tekst is de neerslag van een lezing, opgedragen aan Martin Kindt, op het symposium 'Wiskunde blijft' op 6 december 2002 te Utrecht en van een workshop op de Nationale Wiskundedagen 2003. Een deel van de tekst verscheen ook in *Uitwiskeling* (Roelens, 2002).

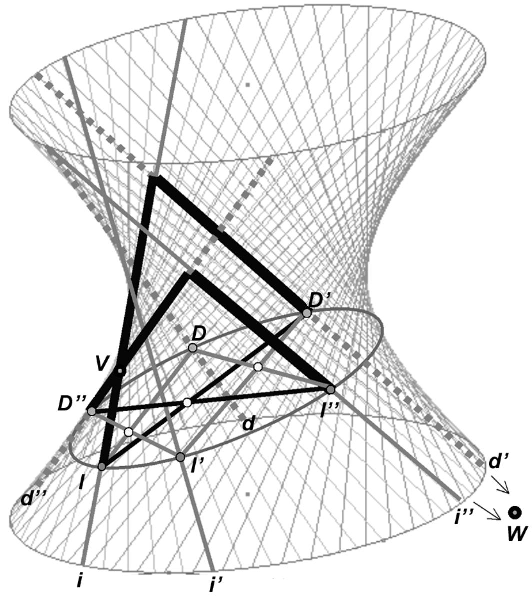

fig. 15 Vlakken door d', i en door d'', i''

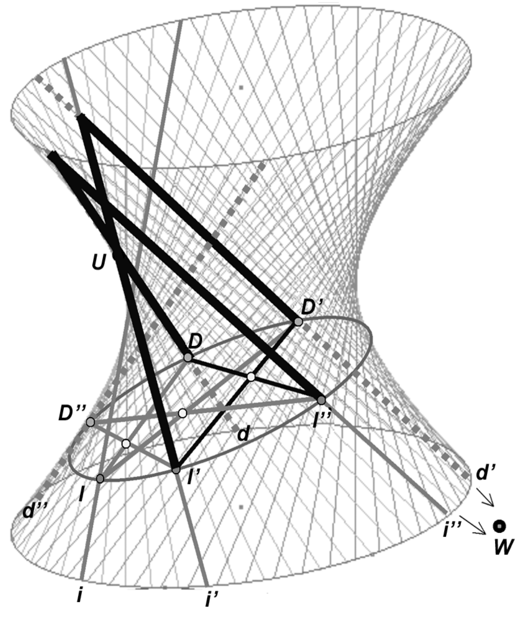

fig. 16 Vlakken door d, i'' en door d', i'

Ik verkeerde in de waan dat de negentiende-eeuwse 'Belgische' bewijzen van Dandelin voor de stellingen van Pascal en Brianchon relatief onbekend waren, zeker buiten België, tot ik achteraf, lange tijd na hogergenoemde lezing en workshop, ontdekte dat ze ook uiteengezet worden in het themanummer 'Een eeuw Bottema' van het Nederlandse tijdschrift *Euclides* (Pijls & van der Slot, 2002).

Michel Roelens, Lerarenopleiding secundair onderwijs groep 1, Katholieke Hogeschool Limburg, Diepenbeek
Michel.Roelens@ler.khlim.be