In de relatie tussen muziek en wiskunde is door de komst van de computer radicaal verandering gekomen. **Rutger Teunissen** laat zien hoe met behulp van wiskunde het geluid van een getokkelde snaar gesimuleerd kan worden. Hij is ook een van de sprekers op het wintersymposium van het KWG, zie de aankondiging op de bladzijde hiernaast.

De snaarplukvergelijking

Hoeveel scholieren zouden er zijn die ‘s avonds op hun zolderkamertje vóór, tijdens en na het huiswerk achter hun PC kruipen, een spelletje spelen en online gaan om te surfen, mailen, chatten en muziek- en videobestanden uit te wisselen? Ik denk dat het er erg veel zijn en dat hun aantal dagelijks groeit; net als het mobieltje zijn de PC en internet deel gaan uitmaken van de persoonlijke standaarduitrusting van de moderne scholier. Al surfend, chattend en uitwisselend maken ze ook spelenderwijs kennis met allerlei software voor de bewerking van beeld en geluid die van het Web te downloaden is of gratis wordt meegeleverd met de scanner, de grafische kaart of de geluidskaart. Software die soms krachtiger en complexer is dan die van de best geoutilleerde professionele studio’s van tien jaar geleden. Inmiddels is specialistisch beeld- en signaalverwerkingsjargon niet verder dan drie of vier muisklikken van de desktop verwijderd. Wat bijvoorbeeld galm-parameters zoals vroege reflecties, diffusie, en hoogfrequente absorbtie betekenen, wordt na een paar minuten van experimenterend muisklikken al een stuk helderder dan na het lezen van een inleidend boek over digitale audio.

Zo is er in vrij korte tijd door de computer een volkomen nieuwe situatie ontstaan. Vaak leren scholieren niet op school, maar thuis omgaan met nieuwe technologie die ze buitengewoon *cool* vinden en waar hun docenten niet eens het bestaan van kennen; technologie die niettemin op den duur voor het onderwijs zowel de noodzaak tot nieuwe aanpassingen inhoudt, als het ontstaan van nieuwe, opwindende perspectieven. Want bijvoorbeeld van het werken met signaalverwerkingssoftware – in de eerste plaats bedoeld voor praktische en creatieve toepassingen – zouden sterke prikkels kunnen uitgaan tot wiskundig en natuurwetenschappelijk denken, als die software tenminste maar niet al te zeer als black box zou worden ontworpen, maar bijvoorbeeld meer als een soort audio-equivalent van de GRM.

Bijna dagelijks kun je het in de krant lezen: het gaat niet zo goed met de belangstelling voor de β-vakken en de wiskunde. Die trend doet zich overal voor, ook buiten het onderwijs. Bij mijn boekhandel daalde in de afgelopen kwart eeuw het aantal boeken over exacte wetenschappen van vier manshoge kasten tot enkele plankjes. Maar er kwam in diezelfde periode wel een heel nieuwe afdeling bij, bestaande uit tientallen kasten gevuld met computerboeken. Ook daar een trend: hoe krachtiger de computer en de software, des te groter de afdeling en ‘dommer’ de literatuur. De belangrijkste aanwinst voor onze taal is het foeilelijke woord gebruikersvriendelijkheid. Daarachter tekent zich onder vele andere ook het drama af van de natuurwetenschappelijke en technologische vervreemding die voor een zeer groot deel het directe gevolg is van het maatschappijbrede computeralibi. Heel geleidelijk begint duidelijk te worden welke aardverschuivingen de computer ook in onze diepgewortelde culturele opvattingen teweegbrengt.

‘Cultuur en Techniek’

Zeker sinds Oresme hebben grafische voorstellingen een belangrijke bijdrage geleverd aan de ontwikkeling van de wiskunde (Dijksterhuis 1950, Doorman 2000). De vraag of ook het auditieve een dergelijke rol zou kunnen spelen werd al veel eerder, eigenlijk sinds het moment dat Pythagoras de met reine intervallen corresponderende, simpele getalsverhoudingen op het monochord ontdekte, bevestigend beantwoord. Dat vanaf Boethius Musica naast Arithmetica, Geometria en Astronomia in het onderwijs deel uitmaakte van het *Quadrivium,* illustreert dat al volgens de antieke en middeleeuwse voorstelling ook in muziek een kosmische, goddelijke wetmatigheid weerklinkt (musica mundana). Voor de scholastische theologiestudent was muziek een verplicht vak ter vergaring van inzicht in de schepping Gods; die (meta)fysische zin gaf de vroege kerkmuziek een klank die nog steeds bekoort als uitdrukking van een inmiddels bijna exotische wereldbeleving.

Geruisloos werd Musica in de Renaissance, de tijd waarin het theocentrisme geleidelijk plaatsmaakte voor een ‘meer menselijke’ maat (humaniora), afgevoerd uit het rijtje van natuurwetenschappelijke quadriviumvakken, en viel uiteen in grofweg twee vakgebieden, enerzijds groeide de musica speculativa uit tot wat inmiddels muziekwetenschappen heet, de studie van muziek als menselijke, taalachtige vorm van zelfexpressie. Anderzijds was muziek tot het begin van de negentiende eeuw zo goed als de enige aanleiding tot akoestisch onderzoek, en vond daarmee een zekere aansluiting bij de Philosophia Naturalis, waarvan Newton de principia mathematica beschreef. In de muziektheorie staat de 'noten-syntax' van ritme, melodie en harmonie centraal; voor het klankkleuraspect is daarin amper plaats; immers afgezien van de instrumentkeuze heeft de componist daarover niet of nauwelijks controle.

Deze eeuwenoude cultureel-wetenschappelijke constellatie, waarin de humanistische menselijke maat als primair ('alfa'), en de natuur als secundair ('beta') wordt beschouwd, is ook terug te vinden in de huidige tweede faseprofielen. Nog steeds zou een mogelijk nieuw profiel *Cultuur en Techniek* daarin detoneren als een bizarre vorm van branchevervaging. Toch is het getij inmiddels totaal gekeerd: voor het eerst in de geschiedenis kan, met de computer, muziek worden gecomponeerd die tot in de subtielste klanknuances wordt uitgedrukt in de taal van de Natuurfilosofie, de wiskunde. Daarmee heeft muziek een hoger quadriviumgehalte gekregen dan ooit tevoren, en is de traditionele, op het nootbegrip gebaseerde muziektheorie in feite op een positie terechtgekomen die wel enigszins doet denken aan die van de mechanica van Newton in het tijdperk van de relativiteitstheorie.

DSP

Deze nieuwe muziek, die men in Amerika zonder omhaal aanduidt met *computer music*, steunt voor wat de klankopwekking betreft volledig op een bredere technologische ontwikkeling, de signaalverwerking, waaraan zij tevens belangrijke bijdragen levert.

In de jaren vijftig vormde de elektrotechniek de belangrijkste aanzet tot het ontstaan van deze nieuwe discipline, die sinds de komst van een sensationeel computeralgoritme voor het razendsnel berekenen van de Fouriertransformatie (de zogenaamde FFT, Fast Fourier Transform, in 1965) en het snel groeiende besef dat de computer manipulaties met signalen kan verrichten die op geen enkele andere manier te realiseren zijn, bijna volledig digitaal is geworden. De techniek is inmiddels ook in ons land beter bekend als DSP, acroniem van Digital Signal Processing.

DSP is te beschouwen als de gemeenschappelijke basis van een omvangrijk netwerk van methoden en technieken die vanuit verschillende gemeenschappen zoals die van de wiskunde, de (statistische) spectraalanalyse, de elektrotechniek en engineering, meet- en regeltechniek, telecommunicatie, grafiek, beeld en geluid, muziek, kunstmatige intelligentie en cognitiewetenschappen, terecht zijn gekomen in elkaars belangstellingssfeer en sinds de jaren zestig bezig zijn aan een indrukwekkend proces van unificerende theorievorming.

Typerend is dat door computerontwikkelingen zoals DSP ook een *Umdenken* in de gedragswetenschappen op gang is gekomen. Was fenomenologie tot eind jaren zeventig in de filosofie en de psychologie nog het buzz-word, sinds de computer is dat vrij snel overgegaan in cognitie. De wiskundig georiënteerde literatuur over de discrete, adaptieve filtertheorie (Haykin) behandelt ook neurale netwerkstructuren, met hun 'mensachtig' vermogen tot abstractie en associatie.

Mathematics from Hell …?

Een van de eerste en meest frappante uitkomsten van de elektronische muziek, die in de naoorlogse jaren langzaam op gang kwam, is dat korte metten werd gemaakt met het nogal platonistische klankideaal dat meer dan tweeduizend jaar had voortbestaan. Achter de antieke uitdrukking 'Ongehoorde muziek is beter dan gehoorde' gaat de gedachte schuil dat er een hemelse schoonheid besloten moet liggen in de volmaaktheid van 'wiskundige' tonen, zoals de sinus. Maar al bij de komst van de eerste analoge, nog relatief onstabiele (dus 'levendige') toongeneratoren bleken die eerder te klinken als 'mathematics from hell', zo akelig strak, kil, saai en zelfs pijnlijk aan je oren. Hoe snel men een illusie armer was, bleek al begin jaren vijftig uit de titel van een van de eerste composities voor elektronica, van de Belg Karel Goeyvaerts: *Kompositie Nr. 4 met dode tonen* (Weiland). Het meest veelzeggende van dit stuk is wel dat het altijd als concept op de plank is blijven liggen. Doder kan niet.

De elektronische muziek vertoont dus een natuurlijke, maar nogal tegenstrijdig klinkende tendentie om zich enorm te interesseren voor de aardsheid en *im*perfectie van niet-elektronische instrumenten, een neiging die men overigens in de modernistische jaren '50 - '70, de hoogtijdagen van de seriële muziek toen een compositie letterlijk *nergens* op mocht lijken, meende sterk te moeten onderdrukken. Toch werd geleidelijk duidelijk dat het muzikale begrip klankexpressiviteit technisch gesproken volledig samenvalt met klankcomplexiteit. Tijdens een lezing, een jaar of tien geleden, over physical modeling synthesizers merkte vakbroeder Ernst Bonis op: 'Mensen denken vaak dat synthesizers vreselijk ingewikkelde apparaten zijn en gewone muziekinstrumenten heel simpel. Maar het is net omgekeerd!' Dit inzicht loopt volkomen synchroon met de 'ontdekking', of liever de erkenning, van het bestaan van chaos, zelfs in eenvoudige, deterministische systemen, een revolte in vooral wiskundige kring, waartoe eveneens de computer zeer veel heeft bijgedragen.

Het zijn vooral DSP-ontwikkelingen geweest die hebben laten zien dat er opmerkelijk veel klankrealisme en complexiteit te verwezenlijken valt met zeer eenvoudige wiskundige middelen. Je mag gerust stellen dat de wiskundige basis van de digitale signaalverwerking wordt gevormd door lineaire differentievergelijkingen, die in het wiskundeprogramma van VWO en HAVO aan bod komen bij onder andere discrete dynamische modellen. Met differentievergelijkingen maak je bijvoorbeeld filters, toongeneratoren, zeer realistische galm en spraak. Dat willen

we in de rest van dit verhaal toelichten aan de hand van een paar voorbeelden die tevens verklaren waarom het audioparadigma voor het begrijpen van de wiskundige analyse van differentievergelijkingen zo verhelderend is.
Omdat differentievergelijkingen in het huidige wiskundeonderwijs soms eenzijdig worden geassocieërd met het recursieve type (in Getal en Ruimte staat met vetgedrukte letters: ‘een differentievergelijking is een ander woord voor recurrente formule’), bekijken we eerst een enkelvoudig echo-effect en een zogenaamd moving average filter als voorbeelden van niet-recursieve differentievergelijkingen. Vervolgens maken we een repeterende echo als voorbeeld van een recursieve differentievergelijking, en laten zien dat door gebruik te maken van de complexe notatie, de samenhang tussen het recursieve en niet-recursieve type fraai tot uitdrukking komt.
Tot slot presenteren we de snaarplukvergelijking, die in de computermuziek zeer populair is geworden als algoritme waarmee de klank van een getokkelde snaar op verbluffend realistische en uiterst simpele wijze kan worden gesimuleerd. In de literatuur over computermuziek is de snaarplukvergelijking overigens bekend als het Karplus-Strong Plucked String algorithm (Steiglitz, Moore, Dodge, Roads, 1999).

Echo

Echo is een mix van een direct geluid en een tijdverschoven, meestal verzwakte versie daarvan. Als inputsignaal x_n een gediscretiseerd (‘gesampeld’) geluid voorstelt (bijvoorbeeld een passage van een CD), dan is ax_{n-M} een over M samples verschoven, met factor a verzwakte (of versterkte) versie van x_n, en is outputsignaal y_n te realiseren door een niet-recursieve, lineaire, M^{de}-orde differentievergelijking:

$$y_n = x_n + ax_{n-M} \qquad (1)$$

Een differentievergelijking kun je zien als een signaalverwerkend systeem, een ‘apparaat’ dat in soft- of hardware gestalte krijgt. Er zijn speciale chips ontworpen voor de razendsnelle evaluatie ervan; ze zitten in CD-spelers, zaktelefoontjes en ook op elke grafische kaart en geluidskaart. De werking van een digitaal echo-apparaat wordt door (1) op een operationele wijze beschreven in termen van input en output, en verklaart tegelijkertijd heel helder wat er akoestisch gebeurt (zie figuur 1). Maar ook al worden door (1) alle echo-verschijnselen op impliciete wijze gerealiseerd, toch is daarmee niet elk akoestisch verschijnsel dat zich bij echo voordoet expliciet beschreven en verklaard. De belangrijkste door (1) niet verklaarde effecten treden aan het licht als x_n bijvoorbeeld een toonladder is, gespeeld op een (akoestisch of elektronisch) muziekinstrument. Allereerst blijken sommige tonen sterker, andere zwakker te klinken dan zonder echo. Kennelijk hangt het echo-effect af van de frequentie van een toon en voor die afhankelijkheid wil je natuurlijk graag een wiskundige uitdrukking vinden.

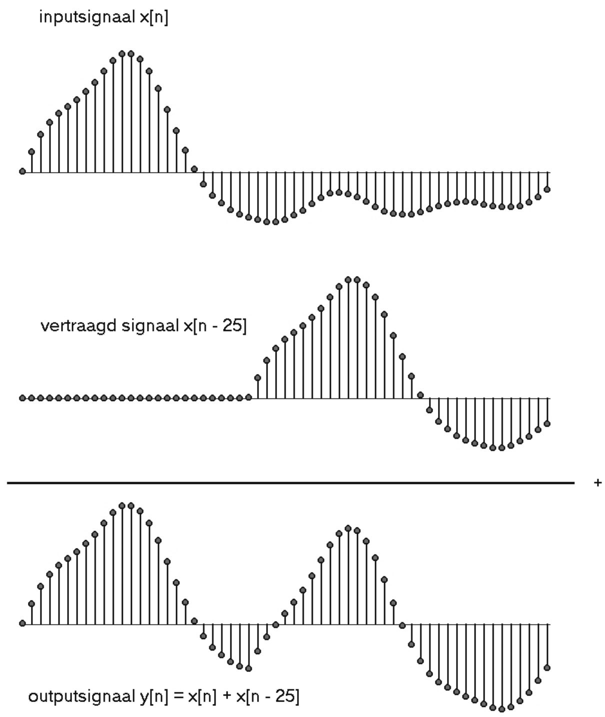


fig. 1 Outputsignaal van een echo-apparaat

Daarnaast blijken sommige tonen ten gevolge van de echo-operatie een wat glazige of neuzige klank te hebben gekregen: hun timbre is veranderd. Dat laatste lijkt misschien een verschijnsel van heel andere orde dan die toonverzwakking- of versterking, maar toch gaat het hier om een en dezelfde frequentie-afhankelijkheid. Want volgens het Fourierprincipe kan elk niet-sinusvormig signaal gerepresenteerd worden als een som van sinussen (‘boventonen’) met verschillende frequenties, amplitudes en fases. (Als zo’n signaal dan ook nog periodiek is, blijken de boventonen frequenties te hebben die veelvouden zijn van die van de grondtoon en spreek je van *harmonischen*.) Timbre, klankkleur, wordt zo goed als volledig bepaald door de sterkteverhoudingen van de boventonen (de faseverhoudingen spelen nauwelijks een rol, want het oor is bijna helemaal ‘fasedoof’). Als dus het timbre wordt gewijzigd door het echo-effect, dan zal dat tot uitdrukking moeten komen in de vorm van wijzigingen in de sterkteverhoudingen van de boventonen.
Dit alles geeft een ijzersterke motivatie om eens te kijken hoe het echo-effect op een sinustoon van willekeurige frequentie f reageert. Daarom substitueren we $x_n = \sin(\omega n)$ in (1), waarbij $\omega = 2\pi f / F_s$ en F_s de samplefrequentie is:

$$y_n = \sin(\omega n) + a\sin(\omega(n-M)) = A\sin(\omega n + \varphi) \qquad (2)$$

Hierin is amplitude:

$$A(\omega) = \sqrt{1 + a^2 + 2a\cos(\omega M)} \qquad (3)$$

en faseverschuiving:

$$\varphi(\omega) = \arctan\frac{-a \cdot \sin(\omega M)}{1 + a \cdot \cos(\omega M)} \tag{4}$$

$$\left(= \frac{-\omega M}{2} \text{ als } a = 1\right) \tag{4a}$$

Uit (3) blijkt dat de versterking $A(\omega)$ afhangt van de (continue) frequentie. Datzelfde geldt volgens (4) voor de faseverschuiving $\varphi(\omega)$. Een systeem met een dergelijk frequentieselectief gedrag wordt een filter genoemd.

Hoe deze frequentiefuncties met elkaar samenhangen, laat (2) goed zien, maar wordt nog veel duidelijker als je in (1) het inputsignaal complex maakt door de substitutie $x_n = e^{i\omega n}$. Dan krijg je:

$$y_n = e^{i\omega n} \cdot H(\omega) \tag{5}$$

met:

$$H(\omega) = 1 + a \cdot e^{-i\omega M}$$

De uitwerking die (1) heeft op een sinusvormig signaal kan volgens (5) dus worden beschreven als een complexe vermenigvuldiging met een frequentie-afhankelijk getal $H(\omega)$. Gemakkelijk is na te gaan dat $A(\omega)$ de modulus van $H(\omega)$ is en $\varphi(\omega)$ het argument. Het lineaire karakter van zowel (1) als het genoemde Fouriertheorema maakt ook duidelijk waarom $H(\omega)$ als 'antwoord-van-een-lineaire-differentievergelijking-op-een-sinus-met-willekeurige-frequentie' een centraal begrip is geworden in de signaalverwerking.

Men noemt $H(\omega)$ de frequentieresponsie van het systeem. $A(\omega)$ en $\varphi(\omega)$ worden respectievelijk de amplitude- en de faseresponsie genoemd.

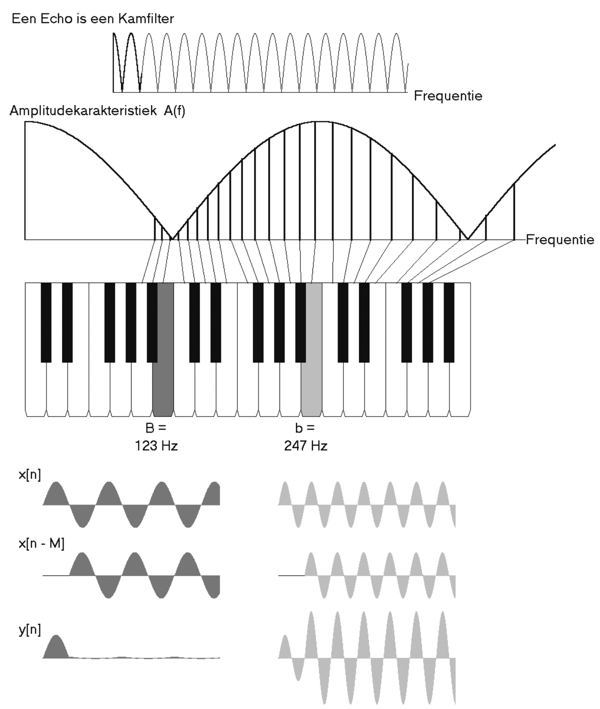


fig. 2 Echo na vier milliseconde

Als voorbeeld is in figuur 2 het effect te zien van een echo, waarbij het tijdverschoven signaal x_{n-M} vier milliseconde na het directe geluid komt. We stellen dat de reflectie even sterk is als het directe geluid; de coëfficiënt a in (1) is dan gelijk aan 1.

Als de samplefrequentie $F_s = 44100$ Hz (zoals bij CD) en $A = 1$, dan moet M gelijk zijn aan 176. In de figuur is een 'sinustoon'-orgeltje getekend waarvan het geluid een echo-effect krijgt.

Als je de toets B in het Groot Octaaf aanslaat (123 Hz), dan hoor je bijna niets: met (3) vind je de factor A waarmee de toon B wordt verzwakt:

$$A_B = \sqrt{2 + 2\cos(2\pi \cdot 123{,}47 \cdot 176/44100)} = 0{,}045$$

Sla je de b uit het Klein Octaaf aan (247 Hz) dan blijkt die bijna tweemaal (1,998) zo hard te klinken als zonder het echo-effect. Het voorbeeld laat zien dat het uit de natuurkunde bekende verschijnsel interferentie door de differentievergelijking op een impliciete wijze wordt gerealiseerd. Boven in de figuur is de zeer regelmatige, kamtandachtige lobbenstructuur van de amplituderesponsie A te zien. Daaraan dankt dit echofilter z'n naam: kamfilter (comb filter).

Moving Average Filter

De moraal van het verhaal over het echo-effect is dus dat je naast het beoogde tijdverschuivende effect ook altijd te maken krijgt met een timbreveranderend effect. In de meeste gevallen leer je filters louter als timbreveranderaars kennen, zoals bij de toonregeling van een versterker. En dan realiseer je je weer niet dat ze ook altijd noodzakelijkerwijs een tijdverschuivend effect hebben, zoals (1) dat zo duidelijk laat horen als $M \gg 1$.

Een zeer veel voorkomend filter in alle vormen van signaalverwerking krijg je als je in (1) $M = 1$, $a = \frac{1}{2}$ kiest en de input opschaalt:

$$y_n = \tfrac{1}{2}x_n + \tfrac{1}{2}x_{n-1} \tag{6}$$

Hier is output y_n het gemiddelde van twee opeenvolgende waarden van de input, vandaar de naam lopend-gemiddelde filter (Moving Average).

De timbreveranderende werking ervan kun je weer met (3) bepalen:

$$A(\omega) = \tfrac{1}{2}\sqrt{2 + 2\cos(\omega)}$$

en is bovenin figuur 3 te zien. Aan de vorm van de grafiek is af te lezen waarom dit filter een laagdoorlaatfilter wordt genoemd.

De faseverschuiving is nu $\varphi(\omega) = -\frac{1}{2}\omega$. Zoals gezegd heeft deze faseverandering niet of nauwelijks een hoorbaar effect. Dat wordt heel anders als je dit filter gaat opnemen in een grotere structuur waarin sprake is van feedback.

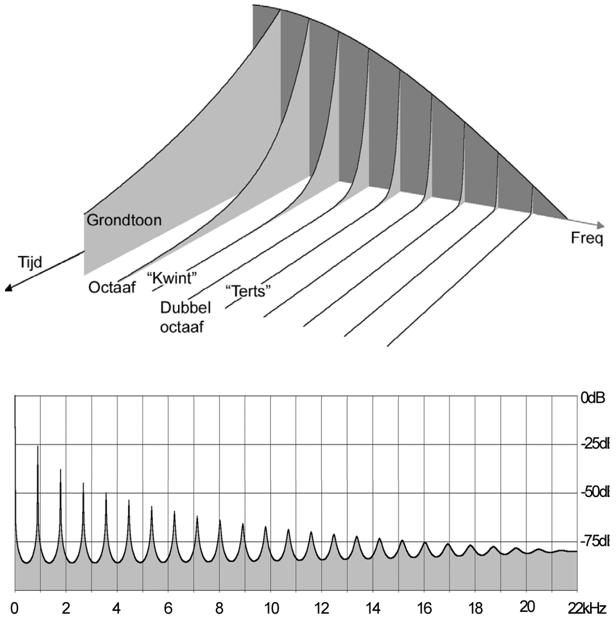


fig. 3 De timbreveranderende werking

We zullen zien dat de snaarplukvergelijking niet alleen het laagdoorlatend karakter van (6) illustreert, maar ook een toonsverhogend effect tengevolge van de faseverschuiving.

Echo-feedback

Met name bij allerlei bouwwerken komt het vaak voor dat er een reflectiepatroon ontstaat van een repeterende echo. Zo'n reflectiepatroon kan zowel eindig als oneindig zijn. Een mooi voorbeeld van een eindig patroon is het Waterlabyrinth aan de Nijmeegse Waalkade (figuur 4); als je precies in het middelpunt in je handen klapt, hoor je tengevolge van de periodieke reflecties tegen de acht muurtjes een kort toontje van ongeveer 120 Hz. Dat verschijnsel is gemakkelijk te beschrijven met een differentievergelijking van het hierboven besproken niet-recursieve type.
Anders is het gesteld met reflecties tussen twee parallelle oppervlakken, zoals onder bruggen en in trappenhuizen, die in principe oneindig lang heen en weer blijven kaatsen, waarbij de geluidsenergie exponentieel wordt gedempt. Dergelijke reflecties kun je beschrijven met de recursieve differentievergelijking:

$$y_n = x_n + b y_{n-M} \qquad \text{voor } b \le 1 \qquad (7)$$

Ook hier krijg je naast het evidente tijdseffect te maken met timbreveranderingen. Voor de analyse daarvan maken we gebruik van de complexe notatie. We substitueren $x_n = \exp(i\omega n)$ in (7) en vinden na wat handwerk en de toepassing van de oneindige somformule:

$$y_n = \frac{e^{i\omega n}}{G(\omega)} \qquad (8)$$

met $\quad G(\omega) = 1 - b \cdot e^{-i\omega M}$

Dus ook de responsie van een recursief systeem op een sinusvormig signaal is als een complexe vermenigvuldiging uit te drukken. Bovendien zie je dat voor $b = -a$ een recursief systeem de inverse is van een niet-recursief systeem; filter je x_n achtereenvolgens met (1) en met (7) dan krijg je x_n weer terug:

$$z_n = \frac{y_n}{G(\omega)} = \frac{x_n H(\omega)}{G(\omega)}$$
$$= x_n \frac{H(\omega)}{H(\omega)} = x_n$$

fig. 4 Het Waterlabyrinth in Nijmegen

Deze reciproque relatie tussen beide systemen wordt zichtbaar in figuur 5 als resonantiepieken bij recursieve en antiresonantiedalen bij niet-recursieve systemen.
De inverteerbaarheid van niet-recursieve en recursieve filters wordt in de statistische signaalverwerking gebruikt bij methodes voor onder andere de analyse en simulatie van spraak en muziekinstrumenten, zoals Linear Predictive Coding (LPC) waarbij een analysefilter de inverse is van een synthesefilter (Markel & Gray, Haykin, Teunissen 1996).
Ook de Discrete Fourier Transformatie (DFT, waarvan de al genoemde FFT de snelle implementatie is), is te beschouwen als een lineaire, niet-recursieve, complexe differentievergelijking, en dus als een filter dat je gebruikt om de frequentiecomponenten ('sinussen', 'boventonen') van een signaal van elkaar te scheiden. Omdat elk van die frequentiecomponenten zowel een onbekende fase als een onbekende amplitude heeft, is de DFT gedefiniëerd als een complexe differentievergelijking. De output van dit DFT-dubbelfilter is daarmee eveneens een complex getal, waarvan de poolcoördinaatvorm de gevraagde amplitude en fase van een frequentiecomponent geven. De inverse van de DFT, de IDFT, is weliswaar net als de DFT een niet-recursieve differentievergelijking, maar heeft coëfficiënten die de inversen zijn van die van de DFT. De IDFT wordt gebruikt om signalen te synthetiseren.

Met (5) en (8) zijn de differentievergelijkingen getransformeerd tot algebraïsche vergelijkingen met een continue variabele: de frequentie. Dat is een meer wiskundig-analytische zin van de Fouriertransformatie (en, algemener, van som- en integraaltransformaties zoals de Z- en Laplacetransformatie).

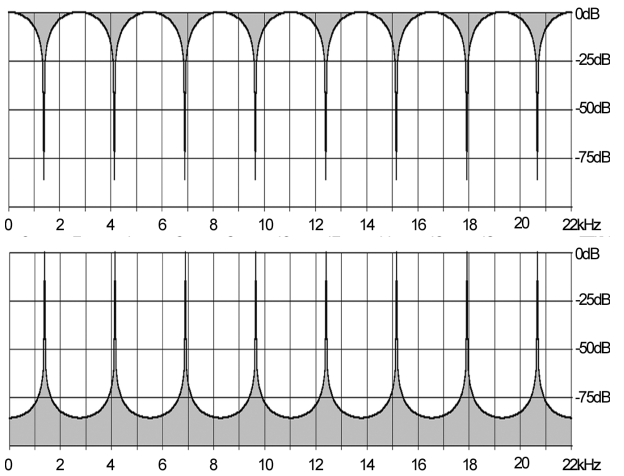


fig. 5 Resonantiepieken en anti-resonantiedalen

Het bijzondere van het audioparadigma is dat ook het oor een dergelijke transformatie uitvoert voor frequenties boven ongeveer 20 Hz. Daarom zou je kunnen zeggen dat we beschikken over gehoorzintuigen 'aan weerszijden van de Fouriertransformatie': met het ene hoor je tijdsequenties (zoals echo's, zinnen en melodieën) en tegelijkertijd frequentieverschijnselen (zoals klinkers en timbres) met het andere. Je auditieve systeem eist als het ware een dubbele beschrijving ter verklaring van audio-effecten. En precies die tweevoudigheid is ook nodig voor de wiskundige analyse van de digitale simulatie ervan.

De Snaarplukvergelijking

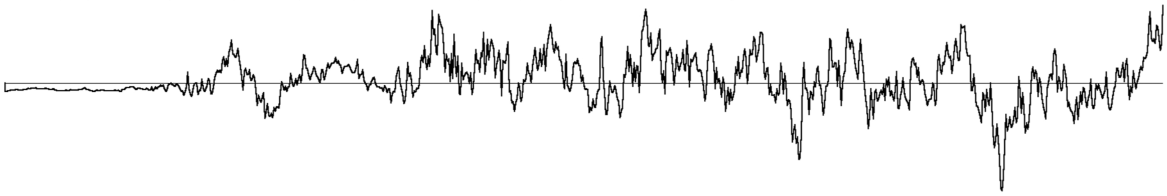
Wat maakt de klank van een getokkelde snaar muzikaal zo aantrekkelijk? Let wel, we hebben het uitsluitend over het trillingsgedrag van de snaar zelf, niet over de meestal meeresonerende klankkast of zangbodem die ook bepalend is voor de klank – en die ook uitstekend door een differentievergelijking van het hier besproken lineaire type gemodelleerd en aangekoppeld kan worden! (Kahrs en Brandenburg, Roads, De Poli, 1997). De belangrijkste redenen:

- De aanzet (attaque) verloopt op een karakteristieke wijze chaotisch; zowel het herkenbare 'tokkelkarakter' als het individuele van elke aanslag komt tot uitdrukking (figuur 6 boven).
- Om akkoord- en samenspel binnen ons toonsysteem mogelijk te maken moet de toon over harmonische boventonen beschikken; zo niet, dan worden akkoorden als 'onsamenhangend' ervaren en gaat het meest karakteristieke van (vooral Westerse) muziek, de tonaliteit, goeddeels verloren. Vandaar dat klokken en bellen, met hun inharmonische spectra, in onze muziek een nogal specifieke rol vervullen.
- Het toonverloop is dynamisch: al uitklinkend wordt de toon niet alleen zachter, maar ook het timbre vertoont een 'vloeiende beweging' van briljant naar dof. Bij een statisch timbre zijn de sterkteverhoudingen van de boventonen constant; dat is de voornaamste reden waarom (primitieve) elektronische klanken 'doods' worden genoemd.
  Bij het uitklinken van een snaar echter blijkt dat elke boventoon z'n eigen dempingstijd heeft (Morse); naarmate een boventoon hoger is, verloopt die (exponentiële) demping sneller. Dus hoe langer de snaar doorklinkt, des te meer de toon z'n brillantie (= boventoonrijkheid) verliest en des te 'grondtoniger', doffer, het timbre wordt.

In het digitale domein kunnen deze drie klankeigenschappen tegelijkertijd worden verwezenlijkt door slechts één simpele bewerking: het herhaald filteren van een ruisfragment!

Het chaotische karakter van de toonaanzet is te modelleren met witte ruis, die je opwekt door de computer een aantal random getallen te laten genereren, waarvan het gemiddelde nul is (figuur 6a). Dit ruisfragment gaat over in een zuiver periodieke (en dus harmonische) toon door het simpelweg onafgebroken te herhalen. Dat is te realiseren met echo-feedbacksysteem (7) door $b = 1$ te stellen en het ruisfragment als inputsignaal x_n te nemen. Wil je een constante toon hebben waarvan de periode gelijk is aan L samples, dan heb je L random getallen nodig en substitueer je $M = L$ in (7) (figuur 6b). Inmiddels kennen we systeem (7) al onder drie verschillende namen: echo-feedback, filter en toongenerator.
Het zachter maken is kinderspel: kies voor b een waarde (iets) kleiner dan *1* en de toon wordt op een heel natuurlijke, exponentiële wijze gedempt. Voor een pianosnaar, met een lange uitklinktijd, zal b groter zijn dan voor een vioolsnaar (denk aan het snel wegstervende pizzicato). Ook de geleidelijke klankkleurovergang van briljant naar dof is te realiseren met de feedbackstructuur (7), alleen moet nu in elke herhalingslus, naast vermenigvuldiging met die factor b voor de overall demping, tevens een simpel filtercircuit worden doorlopen dat een laagdoorlatende karakteristiek heeft.
Het Lopend Gemiddelde filter (6) is daarvoor uitermate geschikt. Hiermee wordt het spectrum bij elke iteratie langs een 'timbrale kaasschaaf' gehaald: elke harmonische k krijgt door de herhaalde filtering z'n eigen exponentiële demping; als k aanvankelijk een sterkte V_k heeft, dan is die na de p-de filteriteratie gelijk aan $V_k A(\omega k)^p$.
Het volumeverloop van elke harmonische is dus te schrijven als een recursieve differentievergelijking:

$$(V_k)_p = A(\omega k)(V_k)_{p-1}$$



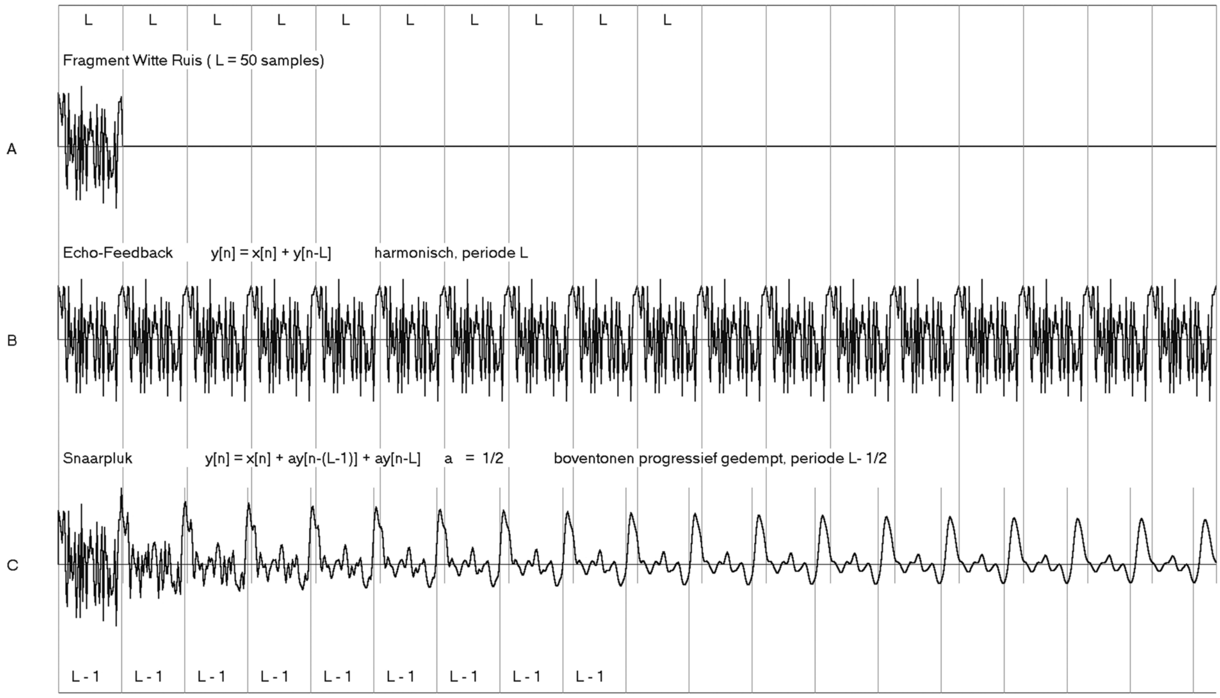


fig. 6 Het chaotische karakter van een snaarpluk

waarin ω de frequentie van de grondtoon voorstelt.
In figuur 6 boven is dat te zien voor een toon waarvan de periode $L = 20$ is en waarvan alle harmonischen voorafgaand aan de filteriteraties even sterk waren. Dit iteratieve filtersysteem is te realiseren door (7) eerst te schrijven als:

$$y_n = x_n + by'_{n-M} \qquad b \le 1 \qquad (9a)$$

waarin y'_n de output is van een Moving Average systeem:

$$y'_n = ay_n + ay_{n-1} \qquad a \le \tfrac{1}{2} \qquad (9b)$$

De combinatie van (9a) en (9b) levert dan, met $L = M + 1$, de snaarplukvergelijking:

$$y_n = [x_n] + cy_{n-L+1} + cy_{n-L} \qquad c = ab \qquad (10)$$

De input x_n is tussen haken geplaatst omdat die van maximale tijdsduur L is en alleen maar dient om de snaar ‘aan te slaan’. In figuur 6c is het resultaat afgebeeld. Het blijkt dat de periodeduur niet gelijk is aan L, maar aan $L - \frac{1}{2}$. Dit is het gevolg van de lineaire faseverschuiving $\varphi(\omega) = -\frac{1}{2}\omega$ die bij elke filtering weer plaatsvindt, wat als een soort dopplereffect tot toonsverhoging leidt.

Tot slot heel kort nog een tweetal verschijnselen die respectievelijk de effectiviteit en de opmerkelijke akoestische interpretatie van differentievergelijkingen laten zien. Met name bij hogere tonen leidt de snaarplukvergelijking in de hier gepresenteerde vorm tot stemmingsproblemen, omdat L een geheel getal is. Dit probleem is gemakkelijk op te lossen door nog een ander filtertje in (10) in te bouwen, dat de faseverschuiving, en daarmee de toonhoogte, heel nauwkeurig regelt zonder de amplitudes te veranderen (daarom heet zo’n filter All Pass).
Als je de frequentieresponsie van (10) wiskundig formuleert zoals we met (1) en (7) deden, en die vervolgens numeriek evalueert (figuur 3 onder), dan blijken de pieken niet exact op gelijke afstanden van elkaar te liggen. Dat heeft vooral bij hogere boventonen een inharmoniciteit tot gevolg die evenwel te gering is om te kunnen horen. Dit verschijnsel heet dispersie. Het doet zich in nog veel sterkere mate bij echte snaren voor, omdat die niet oneindig elastisch zijn en zich dus enigszins als een staaf gedragen. Met name bij dikkere, omwonden snaren, zoals bij de piano, is dit effect muzikaal gesproken het zout in de pap. Je kunt leuk met dispersie- en timbre-effecten experimenteren door in (10) voor c twee verschillende getallen te nemen (met som ≤ 1).

Tot zover enkele audiovoorbeelden van simpele, lineaire differentievergelijkingen.
Misschien is het er impliciet ook wat meer voorstelbaar door geworden dat experimenten met (daarvoor geschikte) audio-signaalverwerkingssoftware, waarbij zulke verschillende 'faculteiten' als zintuiglijke waarneming, muzikale productiviteit en wiskundig denken hand in hand gaan, enorm veel kunnen bijdragen aan het vergroten van de belangstelling voor de wiskunde.

Conclusie

- De toepassingen van de Digitale Signaalverwerking (DSP) zijn inmiddels zo talrijk en veelzijdig, en hebben zoveel impact op wetenschappelijke, kunstzinnige en maatschappelijke ontwikkelingen, dat aandacht voor de wiskundige basis ervan in het wiskundeprogramma voor VWO en HAVO meer dan wenselijk is.
- Door de komst van de computer kan muziek eindelijk haar eeuwenoude positie als natuurwetenschappelijk 'quadriviumvak' met recht opeisen. Dat betekent voor het onderwijs verrassende, nieuwe perspectieven en uitdagingen. Een profiel Cultuur en Techniek is niet langer als een categoriale vergissing te beschouwen en zou wel eens erg veel kunnen betekenen voor de verbetering van het imago van de exacte vakken.

Met dank aan Pieter van de Zwaart (SLO) voor zijn waardevolle opmerkingen naar aanleiding van de proefversie van dit artikel.

Rutger Teunissen, Nijmegen

De Wiskunde Scholen Prijs 2004

Ook als u zelf denkt dat u 'niets bijzonders' doet op school, kan uw school in aanmerking komen voor het winnen van de 'Wiskunde Scholen Prijs'. Deze prijs is ingesteld om scholen te stimuleren met hun sterke punten op het gebied van wiskundeonderwijs naar buiten te treden.
Alle scholen voor voortgezet onderwijs kunnen meedingen naar deze prijs.
Er zijn drie categorieën waarin een school een prijs kan winnen:
- basisvorming (klas 1 en 2)
- bovenbouw VMBO (klas 3 en 4)
- HAVO/VWO (de klassen 3 tot en met 6)

Voor elke categorie is een prijs van € 1000,- beschikbaar.

In januari wordt naar alle scholen een folder met nadere informatie gestuurd. Heeft uw school belangstelling om mee te doen, meldt u dan vrijblijvend aan door een e-mail met uw naam en de adresgegevens van uw school te sturen naar wiskids@fi.uu.nl U ontvangt dan het aanmeldingsformulier met nadere instructies.

De Wiskunde Scholen Prijs is ontstaan uit het WisKids project, een gezamenlijk initiatief van wiskundig Nederland.
Doelen van WisKids zijn: het bevorderen van enthousiasme bij jongeren, het imago van wiskunde verbeteren, jongeren uitdagen via de wiskunde, belangstelling voor de exacte vakken bevorderen.

Zie ook: www.wiskundescholenprijs.nl

Nascholing Rijksuniversiteit Groningen

Wiskundeonderwijs, een historische opgave

Omschrijving: In de afgelopen tien jaar is in het wiskundeonderwijs de belangstelling voor de geschiedenis van de wiskunde opmerkelijk. Sla de vakbladen maar open. Tegelijkertijd blijft onder docenten de klacht bestaan dat ze te weinig geschoold zijn op dit gebied. Het ontbreekt zowel aan globale kennis over de ontwikkelingsgang van de wiskunde als aan de vaardigheid om zelf oude bronnen op te sporen en daar eventueel in het onderwijs gebruik van te maken. In de bijeenkomsten werken we aan beide thema's.

Doelgroep:	Docenten wiskunde HAVO/VWO
Plaats:	Instituut voor Wiskunde en Informatica, Blauwborgje 3, 9747 AC Groningen; zaal RC63 (begane grond).
Data en tijden:	donderdag 5 februari 2004, dinsdag 9 maart 2004, en en woensdag 7 april 2004; van 13.30 - 16.30 uur
Kosten:	€ 150,-
Docent:	Jan van Maanen
Aanmelding:	per email aan Marijke de Wijs, **m.de.wijs@fwn.rug.nl**