Postmoderne Vedische wiskunde? Soms worden de soetra's van goeroe Tīrthajī voor Vedisch gehouden. Maar daar zijn ze zo'n twee en een half millennium te jong voor. **Jan Hogendijk** legt u uit hoe het kaf van het koren te scheiden. En het kaf hoeft niet altijd meteen weggegooid te worden...

De Veda's en de berekeningen van goeroe Tīrthajī

Inleiding

Het tijdschrift *Pythagoras* publiceert in 2004 een reeks over 'Vedische' rekenmethoden, en ook op de Nationale Wiskunde Dagen in februari 2004 stond een lezing over dit onderwerp op het programma. De naam 'Vedisch' suggereert dat deze rekenmethoden afkomstig zijn uit de Vedische periode vóór 500 voor Christus. In dit artikel geven we eerst twee voorbeelden van echte Vedische wiskunde. Na een historisch intermezzo over het decimale positiesysteem en decimale breuken, zullen we de zogenaamde 'Vedische' rekenmethoden ontmaskeren als producten van een twintigste-eeuwse goeroe.

De Veda's

De Veda's zijn Indiase religieuze en filosofische geschriften uit de Vedische tijd (vóór 500 voor Christus). Ze zijn geformuleerd in een Indo-Europese taal die de voorloper was van het Sanskriet. Ze werden oorspronkelijk mondeling doorgegeven maar zijn later op schrift gesteld. Het woord Veda heeft dezelfde stam als het Nederlandse woord *weten*. In de Veda's wordt over rituelen en vuuraltaren gesproken. Regels voor de precieze constructie van deze altaren worden gegeven in de *Śulbasūtra's* (regels voor het meetsnoer) die ook tot de Vedische literatuur behoren. Sommige van deze *sūtra's* (regels) behandelen de meetkundige kennis die nodig was voor het bouwen van bakstenen altaren van verschillende vorm, maar met gelijke oppervlakte.

Voorbeelden van Vedische wiskunde

De volgende vier sūtra's staan in de Baudhayana-śulbasūtra, die vóór 500 voor Christus is ontstaan. Voor de tekst en vertaling gebruik ik de uitgave van Sen en Bag, gebaseerd op oude Indiase manuscripten in Benares, München, Londen en Ujjain. De lezer mag zelf over de betekenis van deze sūtra's mediteren!
(Tekst: Sen & Bag pp. 18-19; vertaling: pp. 80-81, commentaar pp. 150-154, 164-169; de sūtra's zijn genummerd zoals in de uitgave.)

(1.9) samacaturaśrasyākṣṇayārajjurdvistāvatīṃ bhūmiṃ karoti
De diagonaal van het vierkant maakt twee keer de oppervlakte.

(1.12) dīrghacaturaśrasyākṣṇayārajjuḥ pārśvamānī ca tiryaṅmānī yatpṛthagbhūte kurutastadubhayaṃ karoti.
De oppervlakten (van de vierkanten) die afzonderlijk door de lengte en de breedte van een rechthoek worden voortgebracht, zijn samen gelijk aan de oppervlakte (van het vierkant) voortgebracht door de diagonaal.

(1.13) tāsāṃ trikacatuskayordvādaśikapañcikayoḥ pañcadaśikāṣṭikayoḥ saptikacaturviṃśikayor dvādaśikapañcatriṃśikayoḥ pañcadaśikaṣaṭtriṃśikayorityetāsūpalabdhiḥ
Dit (d.w.z. de vorige sūtra) wordt gezien bij rechthoeken met zijden drie en vier, twaalf en vijf, vijftien en acht, zeven en vierentwintig, twaalf en vijfendertig, vijftien en zesendertig.

(2.12) pramāṇaṃ tṛtīyena vardhayettacca caturthenātmacatustriṃśonena saviśeṣaḥ
De maat moet worden vermeerderd met het derde (deel) ervan en dit (derde) opnieuw met het vierde (deel) daarvan verminderd met het vierendertigste deel (van het vierde deel?); dit is de diagonaal van een vierkant.

In de laatste sūtra kan een zeer nauwkeurige benadering voor $\sqrt{2}$ gelezen worden! Algemeen wordt aangenomen dat deze niet bij toeval ontdekt is, maar met een slimme benaderingsmethode.

Het decimale stelsel

In de Vedische sūtra's werden getallen in woorden uitgedrukt. Indo-Europese telwoorden zijn zichtbaar: dva = twee, tri = drie, catur = quattuor = quatre (kwadraat), pañca = pente, enzovoort.
Vanaf de derde eeuw voor Christus, dus na de Vedische tijd, gebruikte men in Noord-India symbolen voor één tot en met negen die de voorlopers zijn van onze 1,2,3, ..., 9.

Er was toen nog geen nul, en voor de tien-, honderd- en duizendtallen werden nieuwe symbolen gebruikt. De nul kwam wel voor in het zestigtallig positiestelsel van de Babylonische en Griekse sterrenkundigen dat wij nog steeds gebruiken voor hoeken en bogen. Na 300 voor Christus kwamen sterrenkundige methoden uit de Babylonische en Griekse cultuur naar India, met in hun kielzog het zestigtallig stelsel en de nul. Omstreeks 500 na Christus (dus achthonderd jaar later) ontwikkelden de Indiase sterrenkundigen het huidige tientallige positiestelsel voor positieve gehele getallen. Dit systeem werd in de achtste eeuw naar de Islamitische wereld overgebracht, waar het overigens niet veel werd gebruikt. Vanaf de elfde eeuw kwamen de Indiase cijfers naar Christelijk Europa, maar pas in de Renaissance werden de voordelen van het systeem echt zichtbaar door de ontwikkeling van de handel. Decimale breuken werden door een handjevol Islamitische wiskundigen ingevoerd om getallen op te schrijven, maar niet om mee te rekenen. Daarna werden ze in Europa opnieuw ontdekt door de Nederlander Simon Stevin, en gepubliceerd in 1585. India maakte kennis met decimaalbreuken in Franse sterrenkundige tabellen die in de zeventiende en achttiende eeuw naar Delhi en omgeving gebracht werden. Tijdens de Engelse koloniale overheersing werden de decimaalbreuken op scholen onderwezen.

De 'Vedische' wiskunde van goeroe Tīrthajī

De 'Vedische' rekenmethoden van het tijdschrift *Pythagoras* en de Nationale Wiskunde Dagen berusten allen op het boek *Vedic Mathematics* van Jagadguru (wereldgoeroe) Swāmī (monnik) Śrī (eerwaarde) Bhāratī Kṛṣṇa Tīrthajī Mahārāja, dat in 1965 verscheen, en vele malen is herdrukt.

Deze goeroe werd in 1884 in de buurt van Madras geboren als Venkatraman Shastri. Hij studeerde onder andere Engels, wiskunde en Sanskriet aan diverse scholen en colleges in India. In 1911 gaf hij zijn baan in het onderwijs op om zich helemaal aan studie en meditatie te wijden in een ashram in de omgeving van Mysore. In 1919 werd hij sannyasi (monnik) en ontving de nieuwe naam Bhāratī Kṛṣṇa Tīrthajī . Hij werd kort daarna leider van ashrams, en reisde door India, en in 1958 ook naar Amerika op uitnodiging van de Self-Realization Fellowship van Yogananda. Het boek *Vedic Mathematics* verscheen pas na de dood van de goeroe in 1960. Het boek bevat zestien korte sūtra's die gebruikt kunnen worden bij hoofdrekenen in het decimale positiesysteem. Een voorbeeld is de sūtra *ekādhikena purvena*, hetgeen betekent: *met één meer dan het vorige*. De goeroe legt uit dat deze sūtra bijvoorbeeld gebruikt kan worden om uit het hoofd de repeterende decimale ontwikkeling van $\frac{1}{19}$ = $0.05263157894736842\overline{1}$ van achter naar voor op te schrijven: De laatste decimaal van de repeterende breuk is 1. We passen nu de sūtra *één meer dan het vorige* toe op het getal 19.

Het vorige is het voorlaatste getal in de decimale schrijfwijze van 19, en *één meer dan het vorige* is dus 2. We vermenigvuldigen 1 met 2 en krijgen de een na laatste decimaal, enzovoort. Als we de drie na laatste decimaal 8 met 2 vermenigvuldigen, schrijven we 6 op en onthouden de 1. Deze tellen we op bij 6 maal 2. Dezelfde methode werkt ook bij $\frac{1}{29}$, maar nu nemen we uiteraard 3 als *één meer dan het vorige*.

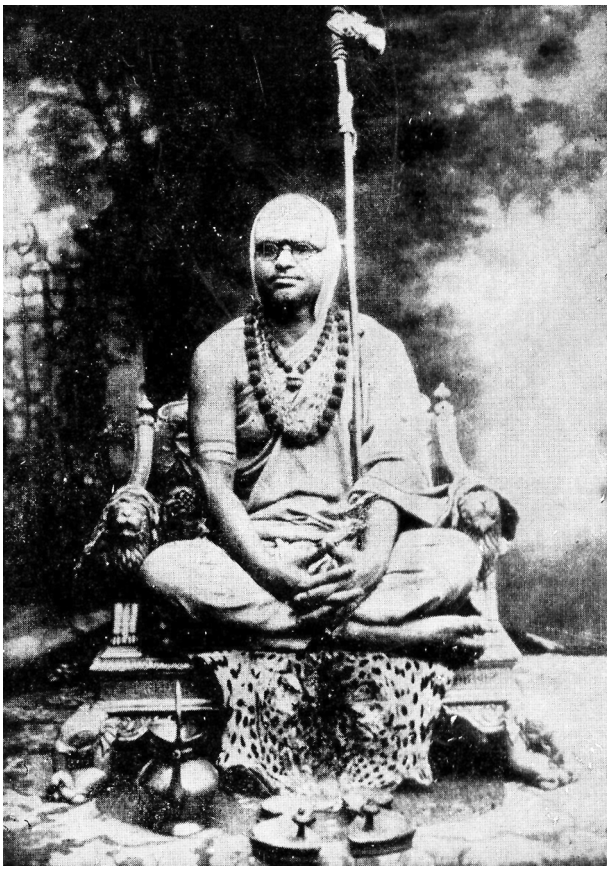


fig. 1 Goeroe Tīrthajī

Het woord *Vedic* in de titel van het boek suggereert dat het hier om authentieke Vedische wiskunde gaat. De vraag rijst hoe men in de Vedische tijd de decimale ontwikkeling van $\frac{1}{19}$ opgeschreven kan hebben terwijl de decimaalbreuken pas in de zeventiende eeuw in India doordrongen. Laten we dus eens kijken wat de oorsprong is van de zestien sūtra's. We laten eerst de goeroe zelf aan het woord (mijn vertaling uit *Vedic Mathematics* pp. xxxviii-xxxix, ik vereenvoudig het barokke taalgebruik): 'En de neerbuigende ... houding van sommige zogenaamde Orientalisten, Indologen, geleerden enzovoort, die verscheidene moeilijk doordringbare en diepzinnige gedeelten van de Veda's veroordeelden als ... 'totale waanzin' of 'gebrabbel uit de kindertijd van de mensheid' enzovoort, ... versterkten onze vastbeslotenheid om de verborgen filosofische en wetenschappelijke mysteries in de eeuwenoude Indiase Vedische teksten te ontsluieren. Met het gevolg dat wij, na acht jaar geconcentreerde contemplatie in de eenzaamheid van de wouden, ten slotte in

staat waren om de verloren sleutels te vinden die de poorten (van deze mysteries) konden openen.'
'We waren aangenaam verrast ... te vinden dat extreem moeilijke wiskundige problemen (waaraan de meest vergevorderde Westerse geleerden enorme hoeveelheden tijd, energie en geld besteed hebben, en die zij ook nu alleen met de grootste moeite en met een groot aantal moeilijke 'tussenstappen' kunnen oplossen), gemakkelijk kunnen worden opgelost met deze extreem gemakkelijke Vedische sūtra's (of wiskundige aforismen) die vervat zijn in de *Pariśīsta* (het aanhangsel) van de *Atharva-Veda* (dat wil zeggen één van de vier Veda's).'
De goeroe voegt hieraan toe: 'De sūtra's (aforismen) zijn toepasbaar op en bestrijken elk deel van elk onderwerp van elke afdeling van de wiskunde (inclusief: rekenkunde, algebra, meetkunde – vlakke en ruimtelijke; kegelsneden – meetkundig en analytisch, sterrenkunde, infinitesimaalrekening – differentiaal- en integraalrekening, enzovoort). In feite is er geen enkele afdeling van de wiskunde, zuiver en toegepast, die niet onder hen valt.'
Sceptici hebben de sūtra's gezocht in de overgeleverde *Pariśīsta's* (aanhangsels) van de *Atharva-Veda*, maar hebben ze nooit gevonden. Het blijkt dat de goeroe de sūtra's zelf heeft 'gezien', net zoals de Veda's volgens de overlevering zelf ook 'gezien' werden door de wijzen uit het oude India. Tegen zijn volgelingen heeft hij gezegd dat hij de zestien sūtra's uit de Atharva-Veda heeft 'gereconstrueerd' in de periode van acht jaar waarin hij ascetische oefeningen in de wouden deed (p. xxxv). Het boek *Vedic Mathematics* heeft een voorwoord van de hand van een sceptische volgeling. Hierin staat (p. vii) dat 'The style of language also points to their discovery by Śrī Swāmijī (de goeroe) himself.'

Voor de toepasbaarheid op de hele wiskunde is het tweede voorwoord van het boek interessant. Hierin lezen we dat de sūtra *Calana-kalana* moet worden vertaald als *Worden*. De goeroe zelf vertaalt deze sutra als 'differential calculus' (p. 186; zie ook het programmaboekje van de Nationale Wiskunde Dagen). Zo gezien bestrijkt deze sūtra inderdaad een heel gebied van de wiskunde, maar je hebt er niets aan bij het uit het hoofd differentiëren van functies!

Vedic Mathematics: a Unified System

Kenneth Williams
Mathematics teacher, Carmel College, St. Helens, Engeland

zaterdag 9.00-9.45 uur (lezing in het Engels)

चलनकलनाभ्याम्

Vedic Mathematics is the name given to the ancient system of mathematics that was rediscovered from ancient Indian texts (the Vedas) at the beginning of the 20th century, and according to which all of mathematics is based on sixteen Sutras, or word-formulae. Perhaps the most striking feature of the Vedic system is its coherence and unity, which make it easy to understand and easy to apply. Its beautiful simplicity means that calculations can be carried out mentally (though the methods can also be written down). There are many advantages in using a flexible, mental system: pupils can invent their own methods, they are not limited to the one `correct' method. This leads to more creative, interested and intelligent pupils. The system is gaining popularity around the world and is taught in some schools with great success.
Although the maths in this talk is mainly at the 8-14 year-old level, some more advanced applications will be illustrated. This introductory talk will give an overview of the system and participants will be given the opportunity to practice the Vedic techniques.

Op p. 360 van *Vedic Mathematics* vermeldt de goeroe een (zogenaamd oud-Indiaas) vers waarin volgens hem de waarde van $\frac{\pi}{10}$ in 32 decimalen nauwkeurig is gecodeerd met behulp van het Indiase Kaṭapayādī-systeem om getallen in woorden te coderen. Dit systeem werd door Indiase sterrenkundigen gebruikt als hulp om getallen uit het hoofd te leren. Het werd ontdekt in Kerala in Zuid-India, vermoedelijk in de negende eeuw na Christus. Deze datering levert al een probleem op met de veronderstelde 'Vedische' oorsprong van het vers voor $\frac{\pi}{10}$. Om het vers verder te analyseren moeten we eerst het systeem uitleggen. Elk cijfer van 0 tot en met 9 kan worden gecodeerd met diverse medeklinkers in het Sanskriet alfabet.
Hier is de lijst met toegestane coderingen (afkortingen zoals ḍh staan voor één Sanskriet medeklinker):
1 = k, ṭ, p, y
2 = kh, th, ph, r
3 = g, ḍ, b, l
4 = gh, ḍh, bh, v
5 = ṅ, ṇ, m, ś
6 = c, t, ṣ
7 = ch, th, s
8 = j, d, h
9 = jh, dh
0 = ñ, n.
Bij een combinatie tussen twee medeklinkers (zoals vr) telt alleen de laatste mee, en ook een dubbele medeklinker telt slechts eenmaal. Klinkers en resterende medeklinkers kunnen overal worden tussengevoegd omdat ze geen getal coderen. De afkorting ṛ is een klinker.

De decimalen werden van achter naar voor gecodeerd. Een vijftiende-eeuws voorbeeld is *tunnabalaḥ*, hierin is t = 6, n = 0, b = 3, l = 3, ḥ en de andere letters betekenen niets. Het woord staat voor 3306, en de astronoom gebruikte het om $\frac{33}{60^2}+\frac{06}{60^3}$ te coderen, een coëfficiënt in het equivalent van een machtreeks voor de sinus. Tot zover de uitleg van het authentieke Kaṭapayādī systeem.
Nu volgt het vers van de goeroe voor $\frac{\pi}{10}$:

gopī bhāgya madhuvrata
śṛṅgiso dadhi sandhiga
khala jīvita khātāva
gala hālā rasandhara

Volgens de goeroe codeert het vers het getal
31415 92653 58979 32384 62643 38327 92

En hierin zien we de eerste 31 decimalen van π, de laatste 2 moet een 5 zijn. Omdat men in het Kaṭapayādī systeem de decimalen van achter naar voor codeert, betekent het vers volgens het authentieke systeem
29723 83346 26483 23979 85356 29514 13.

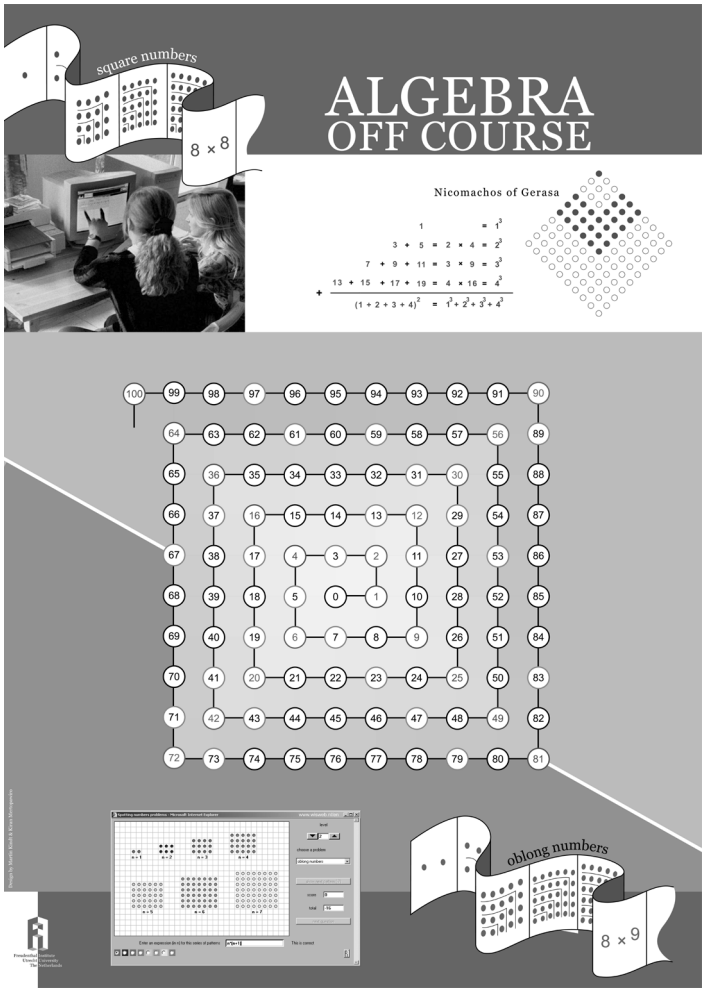
Hieruit kunnen we concluderen dat de goeroe het vers zelf heeft bedacht. Het vers is niet middeleeuws en zeker niet Vedisch.

Conclusie

Er is natuurlijk niets mis met leuke hoofdrekenmethoden en verzen voor π. Achteraf gezien is het wel een misrekening van de goeroe geweest zijn rekenmethodes met de oude Veda's in verband te brengen. Veel mensen in India weten dat het verband met de Veda's een verzinsel is.
Toen men de 'Vedische' rekenmethoden van de goeroe in 1991 in sommige plaatsen in India in het onderwijs wilde invoeren, stak een storm van protest op. De rekenmethoden zijn daarop verwijderd, maar later opnieuw ingevoerd. In 2001 heeft een groep belangrijke Indiase intellectuelen een pamflet opgesteld tegen de invoering van de goeroe's 'Vedische' wiskunde op de lagere school.
Gelukkig heeft de Indiase traditie van vóór 1500 genoeg echte hoogtepunten: de sūtra's die we in het begin hebben geciteerd, het decimale positiesysteem voor positieve gehele getallen, het begrip sinus, de cyclische methode voor het oplossen van de 'vergelijking van Pell': $x^2 + 1 = py^2$, benaderingsmethoden voor de sinus en arctangens die equivalent zijn met Taylorreeksen, enzovoort. Ook de eeuwigheidswaarde van de Veda's en de Indiase filosofie is niet afhankelijk van de verzonnen 'toepassingen' van goeroe Tīrthajī.

Met dank aan Prof. Michio Yano, Kyoto Sangho University, voor het toesturen van het artikel van K. Chandra Hari.

Jan Hogendijk, Mathematisch Instituut, Utrecht

Een wiskunde-poster in het lokaal, dat is natuurlijk aardig. Maar misschien is het nog aardiger om daar een of meer lessen aan te wijden! Bij de poster 'Algebra Off Course', over getalpatronen en algebra, hoort een handzaam boekje met die titel dat een aantal lesideeën en achtergrondinformatie voor de leraar bevat.
De poster is te bestellen via www.fi.uu.nl.
Uit het voorwoord van dit boekje:

Bij het onderwijs in de algebra wordt nu, anders dan vroeger, veelal gezocht naar verhaaltjes om het manipuleren met variabelen te 'verkopen'. Helaas liggen de realistische contexten om algebra aan te leren niet voor het oprapen.
Tenzij ... de wereld van de natuurlijke getallen realistisch genoeg wordt bevonden om als natuurlijke bron van contexten te dienen.