In de vorige aflevering van de *Nieuwe Wiskrant* werd de kerstprijsvraag van **Hennie Reuvers** vermeld. In dit artikel worden de meest tot de verbeelding sprekende inzendingen besproken. De uitslag van de prijsvraag vindt u op de website: www.petericepudding.com/prob03.htm

Meer moeite met tien dan met twaalf?

De opgave

1) Tien piraten landen met een ruimteschip op een onbekende planeet. Zij besluiten zich daar te vestigen, maar wel zo ver mogelijk van elkaar vandaan. Gegeven is een bol met een straal van duizend kilometer. Zoek de posities van tien punten op de bol zodanig dat de kleinste afstand tussen twee verschillende punten uit dit tiental zo groot mogelijk is. De afstanden worden niet ruimtelijk gemeten, maar langs kortste wegen over de bol. Beschrijf de optimale configuratie van tien punten meetkundig. Vermeld ook hoe groot de minimale afstand tussen twee verschillende punten in deze configuratie is.
2) Als 1) maar nu met twaalf piraten in plaats van tien. Vervang dus nu in 1) overal tien door twaalf. Laat duidelijk zien hoe u de antwoorden zoekt, hoe u ze vindt, en hoe u ze verifieert.

Ik geef allereerst mijn eigen oplossing.

Tien piraten

We gaan uit van een bol met straal 1. Onderstaande antwoorden zijn dus uitgedrukt in duizendtallen kilometers. Een 'grote cirkel' is een cirkel op de bol, liggende in een plat vlak dat door het middelpunt van de bol gaat. Men noemt deze grote cirkels ook geodetische lijnen.

In een eerste poging met betrekking tot tien piraten beperk ik me tot configuraties die een noordpool en een zuidpool hebben. Ik begin dus met twee punten op de beide polen zo ver mogelijk van elkaar af te zetten. De andere acht punten liggen dan tussen x^o noorder- en zuiderbreedte voor nader te bepalen x.
De kortste wegen over de bol zijn de grote cirkels van de bol. Maar omdat bij grotere cirkelbogen grotere koorden horen en vice versa, is de optimale configuratie hetzelfde indien men de afstanden door de ruimte meet, en indien men ze langs grote cirkels van de bol meet.
Het gebied tussen x^o noorder- en zuiderbreedte kan worden verdeeld in acht congruente 'vierhoeken'. Een zo'n vierhoek komt overeen met een gebied op de bol, begrensd door de breedtecirkels op x^o noorder- en zuiderbreedte en de meridianen op $(k-1)\cdot 45^o$ en $k\cdot 45^o$ oosterlengte (k=1, 2, ..., 8).
Voor een optimale configuratie moeten de acht punten afwisselend linksboven en rechtsonder in zo'n vierhoek worden gekozen, zodat de verbindingslijnen (geodetische) diagonalen van de vierhoeken zijn, en samen een zigzagpatroon vormen. Anders komen er twee punten dichterbij elkaar dan nodig. Dus vier punten vormen (in de ruimte) een vierkant op x^o noorderbreedte, en vier punten nog een vierkant op x^o zuiderbreedte, waarbij het tweede vierkant over 45^o gedraaid is ten opzichte van het eerste.

De tien punten hebben dan de volgende coördinaten: met $t = \frac{(90-x)\cdot\pi}{180}$

$(0, 0, 1)$; $(\sin t, 0, \cos t)$; $(0, \sin t, \cos t)$
$(-\sin t, 0, \cos t)$; $(0, -\sin t, \cos t)$
$(\frac{1}{2}\sqrt{2}\sin t, \frac{1}{2}\sqrt{2}\sin t, -\cos t)$; $(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\sin t, \frac{1}{2}\sqrt{2}\sin t, -\cos t)$
$(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\sin t, -\frac{1}{2}\sqrt{2}\sin t, -\cos t)$
$(\frac{1}{2}\sqrt{2}\sin t, -\frac{1}{2}\sqrt{2}\sin t, -\cos t)$; $(0, 0, -1)$

De afstand tussen twee willekeurige punten wordt gemeten over de grote cirkel door die twee punten. De afstand is gelijk aan de hoek (in radialen) tussen de vectoren vanuit het middelpunt (0,0,0) van de bol naar de punten. Deze hoek berekenen we met behulp van het inproduct.
Er zijn drie verschillende afstanden tussen naburige punten:
1. t (tussen een pool en een ander punt op hetzelfde halfrond)
2. $\arccos(\cos^2 t)$ (tussen twee buurpunten in hetzelfde vierkant)
3. $\arccos(\frac{1}{2}\sqrt{2}\sin^2 t - \cos^2 t)$ (tussen naburige punten in verschillende vierkanten).

Grafische analyse wijst uit dat het minimum van de afstanden 1., 2. en 3. maximaal is voor de waarde van t ongelijk aan 0 waarvoor 1. gelijk is aan 3.

We vinden dan:

$\cos t = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\sin^2 t - \cos^2 t,$
$\cos t\cdot(1+\cos t) = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,(1-\cos^2 t),$
$\cos t = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,(1-\cos t)$

$\cos t = \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{1}{1+\sqrt{2}}$, dus de minimumafstand is dan

$t = \arccos(\frac{1}{1+\sqrt{2}}) = 1{,}143717740$

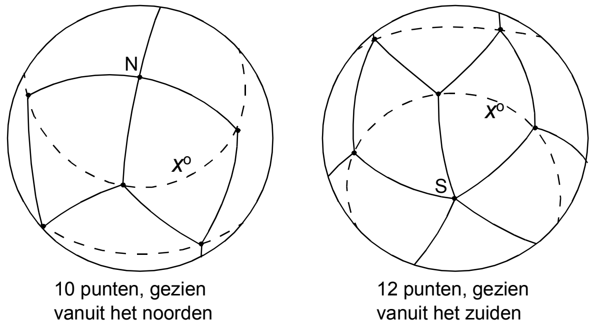


fig. 1 Optimale configuratie voor tien en twaalf punten

Twaalf piraten

Er bestaat een platonisch veelvlak met twaalf hoekpunten. Het platonisch veelvlak heeft dertig ribben en twintig zijvlakken. De zijvlakken zijn allemaal congruente gelijkzijdige driehoeken, die overeenkomen met gelijkzijdige geodetische driehoeken op de bol. Omdat deze driehoeken de bol overdekken, geeft dit dan de optimale configuratie. Kiest men een andere configuratie, dan komen er twee punten dichterbij elkaar te liggen dan de zijde van zo'n driehoek. Dit veelvlak heeft ook een noordpool en een zuidpool. We vinden dan de configuratie op soortgelijke wijze als bij tien piraten (zie figuur 1). Een verschil is dat er nu vijf punten op een breedtecirkel passen in plaats van vier. Een ander verschil is dat de kleinste afstand tussen twee punten op dezelfde breedtecirkel bij tien piraten groter is dan de afstand van zo'n punt tot de naaste pool, en bij twaalf piraten precies gelijk daaraan.
De afstand over de bol tussen naburige punten is gelijk aan de hoek t zodanig, dat de ruimtelijke afstand tussen $(0,0,1)$ en $(\sin t, 0, \cos t)$ gelijk is aan de ruimtelijke afstand tussen $(\sin t, 0, \cos t)$ en
$(\sin t\cdot\cos\frac{2\pi}{5},\ \sin t\cdot\sin\frac{2\pi}{5},\ \cos t)$

Deze hoek kan als volgt berekend worden met Pythagoras:
$$\sqrt{\sin^2 t + (1-\cos t)^2} = \sin t\cdot\sqrt{\sin^2\frac{2\pi}{5} + (1-\cos\frac{2\pi}{5})^2}$$
dus:
$$\sqrt{2-2\cos t} = \sin t\cdot\sqrt{2-2\cos\frac{2\pi}{5}}$$
waaruit volgt:
$$2\cdot\sin\frac{t}{2} = 2\cdot\sin\frac{t}{2}\cdot\cos\frac{t}{2}\cdot 2\cdot\sin\frac{\pi}{5}$$

ofwel:
$$\cos\frac{t}{2} = \frac{1}{2\cdot\sin\frac{\pi}{5}}$$
Dus de minimumafstand is nu $t = \arccos\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{5}} =$
1.107148718

Achteraf vond ik, na enig zoeken op internet, in eerste instantie deze site: http://tracer.lcc.uma.es/problems/thomson/thomson.html. Hij scheen aan te geven dat beide boven besproken configuraties optimaal zijn, dus ook die met tien piraten.
Later vond ik bij verder doorzoeken echter afwijkende informatie die betrekking heeft op publicaties van Tóth (1943) en Danzer (1963). De website die ik toen vond is deze: http://www.enginemonitoring.com/sphere/.
Het blijkt dat de boven besproken aanpak, uitgaande van een noordpool en een zuidpool, lang niet bij elk aantal piraten de allerbeste configuratie oplevert. K. Schütte heeft in 1950 voor tien piraten een ingewikkelde configuratie gevonden die een iets grotere minimumafstand oplevert (het verschil is echter minder dan 1 percent). Vervolgens heeft Ludwig Danzer in 1963 bewezen dat deze configuratie optimaal is. Alleen hij en enkele andere specialisten in het vakgebied begrijpen hoe dit in elkaar steekt.

Uit de inzendingen

Om te beginnen een mooie bijdrage van de heer Martien Luijcks uit Haarlem:

De oplossing voor tien piraten ligt mijns inziens als volgt: een op de noordpool, een op de zuidpool. Verdeel de planeet in acht verticale schijven, en doe op keerkringhoogten om en om noord en zuid een piraat op de aldus ontstane meridianen, zo de aarde rond. Er ontstaat een zigzagpatroon van v-tjes en tentjes, als je het verbindt.

De oplossing voor twaalf piraten is mijns inziens minder elegant: een op de noordpool, een op de zuidpool. Verdeel de piraten om en om noord en zuid, maar nu op respectievelijk eenderde en tweederde hoogte van de bol op de nieuwe meridianen. Opnieuw een zigzagpatroon, maar nu met grotere amplitude.
Op risico van de grote miskleun een aanvullende analyse. Er is mijns inziens sprake van gelijkzijdige driehoeken. Een keerkring zit op 23 graden van de evenaar, eenderde op 30 graden. De keerkring leek mij gezien zijn goddelijke precisie de meest aangewezen keuze.
Mijn commentaar: de afstanden tussen de punten kloppen niet precies, maar zijn wel heel aardig geschat. In feite moet het niet 23 en 30 graden zijn, maar grofweg 24.5 en 26.5.
Voor tien piraten kunnen de afstanden (van een piraat naar de dichtstbijzijnde andere) niet allemaal aan elkaar gelijk zijn, voor twaalf wel.

De volgende bijdrage ontving ik van de heer Peter Janssen uit Lanaken (B):

Oplossing voor twaalf piraten: ik weet dat er een regelmatig veelvlak is met twaalf hoekpunten, dertig ribben en twintig zijvlakken (elk zijvlak is een gelijkzijdige driehoek). De hoekpunten liggen als volgt op de bol (met straal 1 keer 1000 km): een helemaal bovenaan in $(0,0,1)$, een helemaal onderaan in $(0,0,-1)$, vijf in een vlak $z=c$ en vijf in een vlak $z=-c$ (in beide vlakken vormen die vijf punten een regelmatige vijfhoek).

De punten in $z=c$ liggen op de cirkel $x^2+y^2=r^2=1-c^2$.

Ik bereken c als volgt: de afstand door de ruimte tussen $(r\cdot\cos 72^{\text{o}}, r\cdot\sin 72^{\text{o}}, c)$ en $(r,0,c)$ moet gelijk zijn aan die tussen $(r,0,c)$ en $(0,0,1)$, dus:

$$r^2(2-2\cos 72^{\text{o}}) = r^2+(c-1)^2 = 2-2c$$

dus:

$$r^2 = 1-c^2 = \frac{2-2c}{4\sin^2 36^{\text{o}}}$$

De afstand over de bol tussen $(0,0,1)$ en $(r,0,c)$ is de hoek s zo dat $\cos s = c$, dus $\arccos c$.

Met de rekenmachine vind ik $s = 1.107148718$.

De vijfhoek in $z=-c$ ligt 36^{o} gedraaid t.o.v. die in $z=c$.

Oplossing voor tien piraten: voor het probleem met tien piraten vervang ik de twee keer vijf punten op $z=c$ en $z=-c$ door twee keer vier punten op $z=d$ en $z=-d$.

De punten in $z=d$ vormen een vierkant, die in $z=-d$ ook, maar het tweede vierkant is 45^{o} gedraaid ten opzichte van het eerste.

Ik eis nu dat de afstand door de ruimte tussen $(0,0,1)$ en $(R,0,d)$ gelijk is aan die tussen $(R,0,d)$ en $(R\cdot\cos 45^{\text{o}}, R\cdot\sin 45^{\text{o}}, -d)$ (de afstand tussen twee naburige punten in $z=d$ is groter).

Ik bereken d als volgt:

$$R^2+(d-1)^2 = R^2(2-\sqrt{2})+4d^2$$

dus:

$$2-2d = 2-\sqrt{2}+d^2(2+\sqrt{2})$$

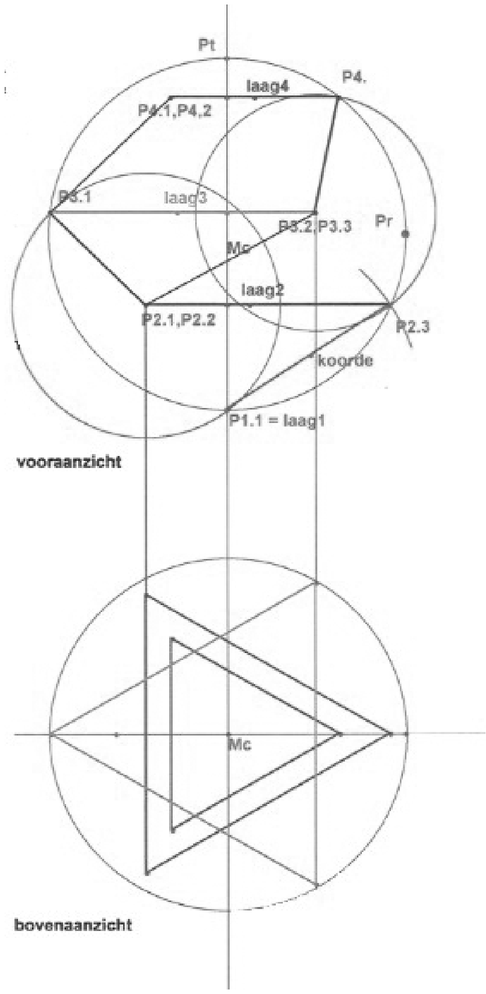
De kleinste afstand over de bol is nu :
$\arccos(d) = 1.14371774$.

Mijn commentaar: uw presentatie is zeer helder. De uitkomsten komen overeen met die van mij. Voor tien piraten is de configuratie niet helemaal optimaal.

De volgende zeer originele bijdrage mocht ik ontvangen van de heer Harrie Schreuders uit Sittard. Ik geef zijn formuleringen samenvattend weer.

Oplossing voor tien piraten: volgens mij moet ik slechts de volgende kansrijke gevallen bekijken:

1. Een punt onderaan op de bol, dan vijf punten in een vlak wat meer naar boven, dan vier punten in een derde vlak nog wat meer naar boven. De vlakken hoeven niet evenwijdig te zijn. De vijf punten vormen een regelmatige vijfhoek, de vier een ruit.
2. Een punt onderaan, dan telkens meer naar boven drie keer drie punten in drie horizontale vlakken. Drie punten in een horizontaal vlak vormen een gelijkzijdige driehoek, met variërende lengte van de zijde. De driehoeken in het eerste en derde vlak zijn gelijk georiënteerd, die in het tweede ligt gedraaid over zestig graden ten opzichte van de andere twee.
3. Een punt onderaan, dan meer naar boven twee keer vier punten in twee horizontale vlakken, ten slotte een punt bovenaan op de bol. Vier punten in een horizontaal vlak vormen een vierkant. Het tweede vierkant is vijfenveertig graden gedraaid ten opzichte van het eerste..



Ik bekijk de gevallen door met Cabri constructies te maken in voor-, boven- en zijaanzichten van de bol. Ik streef naar zoveel mogelijk symmetrie in de configuratie en naar zoveel mogelijk gelijke afstanden tussen naburige punten. Ik varieer de lengte van de koorden, waardoor de bolstraal meeverandert. Ik hou in het oog wanneer de verhouding van minimale koordelengte en bolstraal maximaal is.

In het eerste geval vind ik de maximale verhouding 1.08810. De afstand over de bol wordt dan 1150.51 km.

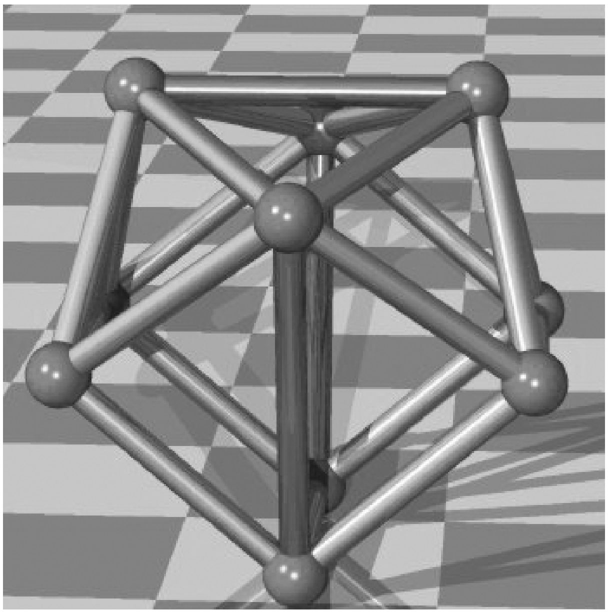
In het tweede geval vind ik de maximale verhouding 1.09053. De afstand over de bol wordt dan 1153.41 km.

In het derde geval vind ik de maximale verhouding

1.08239. De afstand over de bol wordt dan 1143.72 km. Oplossing voor twaalf piraten: een icosaëder is een platonisch regelmatig veelvlak met twaalf hoekpunten, en daarmee is dat de beste oplossing. De afstand over de bol wordt dan 1107.15 km.

Mijn commentaar: de constructies die u bijleverde getuigen van veel creativiteit, raffinement en ruimtelijk inzicht, en van kennis van vlakke meetkunde.
U buit de grote mogelijkheden van Cabri volledig uit. Met Cabri kunnen elementen van een constructie in onderlinge afhankelijkheid van elkaar gevarieerd worden, en Cabri verricht zeer precieze metingen.
Uw uitkomsten in geval drie stemmen overeen met de mijne. U hebt ook de exacte uitkomst $1000\sqrt{4-\sqrt{8}}$ gevonden. Uw uitkomsten in geval twee benaderen die van professor Danzer nog dichter. Ik heb ze geverifieerd met een Pascalprogramma, waarbij ik bolcoördinaten gegeven heb aan de hoekpunten van de drie driehoeken (zie het plaatje). Bij de optimale elevaties vond ik uw uitkomst 1,09053. Proficiat met deze configuratie.

Aan professor Danzer stuurde ik een mailtje om te vragen of hij ook met een inzending aan deze kerstprijsvraag wilde deelnemen. Hij stuurde een herdruk van zijn Habilitationsschrift van 1963. Deze kunt u zelf vinden in *Discrete Mathematics 60* (1986), p.3-66.
Ik distilleer uit dit boekje de volgende gedachten die aan zijn methode mede ten grondslag liggen.
Oplossing voor tien piraten: we kunnen trachten een gegeven configuratie te verbeteren door een hoekpunt een beetje te verschuiven. Als er in de configuratie een convexe geodetische vijfhoek voorkomt, kunnen we een hoekpunt naar binnen flippen, zodat een vijfhoek ontstaat met even lange zijden als voor het flippen, maar die minder plaats in beslag neemt.
Door dit verbetertraject met heel verschillende configuraties te beginnen, hopen we niet te blijven steken bij een relatief maximum, maar het globale maximum te vinden. Om in te schatten of de kortste afstand in een bepaalde soort configuraties in theorie nog groter kan worden gemaakt, kunnen we proberen de som der oppervlakten van de daarin voorkomende geodetische veelhoeken te schatten, en deze vergelijken met de totale oppervlakte van de bol. Zo vonden we uiteindelijk een configuratie waarvan we ook konden bewijzen dat die optimaal is.
De configuratie van Danzer ziet er als volgt uit: zie www.enginemonitoring.com/sphere/pages/pack10.htm.
De kleinste afstand is ongeveer 1,091426 megameter door de ruimte, en ongeveer 1,15448 megameter over de bol.
Bij het bewijs spelen combinatorische argumenten een rol. Men kan bijvoorbeeld eenvoudig bewijzen dat van vijf gegeven punten op de bol er altijd vier in één halfrond



liggen (bij geschikte keuze der polen). En we moeten het aantal driehoeken in de configuratie tellen: zestien voor tien piraten.

Verder moeten we de hoeken tussen de ribben beschouwen. De som van de hoeken in een gegeven hoekpunt kan niet groter of kleiner zijn dan 360^o. Op de bol vertoont de som van de hoeken in een veelhoek een exces (te veel), dat (in radialen gemeten) gelijk is aan de oppervlakte van de veelhoek. Beschouw bijvoorbeeld de driehoek gevormd door de evenaar en de meridianen op 0 en 90^o oosterlengte. Deze heeft drie rechte hoeken en dus een exces van 90^o. De oppervlakte is $\frac{\pi}{2}$.

Oplossing voor twaalf piraten: het is 'bijna vanzelfsprekend' dat het regelmatig twintigvlak (de icosaëder) voor twaalf piraten de optimale configuratie geeft. Omdat het regelmatig twintigvlak uit gelijkzijdige driehoeken bestaat. Hierbij is van belang dat de afstand tussen twee punten binnen een gelijkzijdige driehoek hoogstens gelijk is aan de lengte van de zijde. Dat geldt niet voor een regelmatige vijfhoek. Het regelmatig twaalfvlak (de dodecaëder) geeft voor twintig piraten niet de optimale configuratie, omdat het uit regelmatige vijfhoeken bestaat. Het kan door flippen en schuiven verbeterd worden.

Tot slot een leuke kleine opgave voor iedereen. Beschouw een gelijkzijdige driehoek in het platte vlak. Vind vier punten binnen die driehoek of op de zijden van de driehoek zo, dat de kleinste van de zes afstanden tussen twee van die punten maximaal is.
Hint: sommige vierhoeken zijn convex, andere niet.

Hennie Reuvers, Fontys Hogescholen, Sittard.