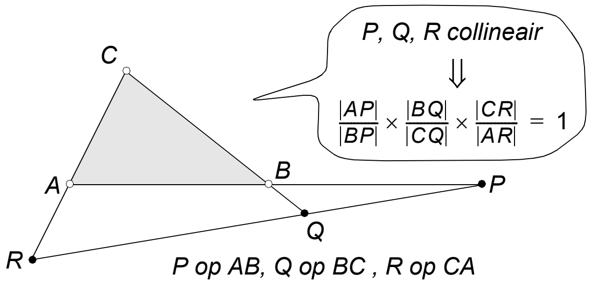
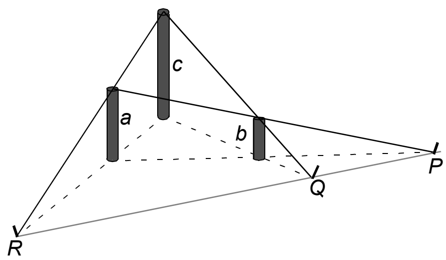
# Wat te bewijzen is (24)

## Rubriek

De stelling van Ceva, die in aflevering 23 van deze rubriek in het zonnetje werd gezet, wordt vaak in één adem genoemd met een andere stelling uit de meetkunde.
De kenners zullen begrijpen dat ik de stelling van Menelaos (100 na Christus) bedoel. Hier is een eerste versie:



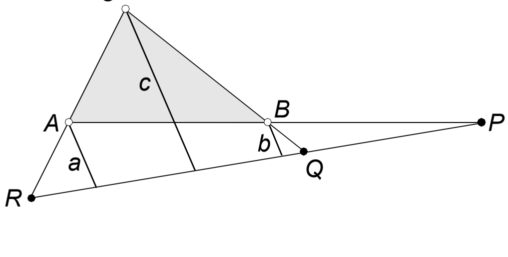

In een vroeger artikel[1] heb ik laten zien hoe de stelling vanuit een eenvoudige driedimensionale situatie kan worden begrepen. Op een vlakke grond staan drie paaltjes van ongelijke hoogte, zeg *a, b* en *c*. De voetpunten (en de toppen) van de paaltjes vormen een driehoek. De toppen worden verbonden door strakgespannen koorden die met pinnen in de grond zijn bevestigd op de plaatsen *P, Q, R*.



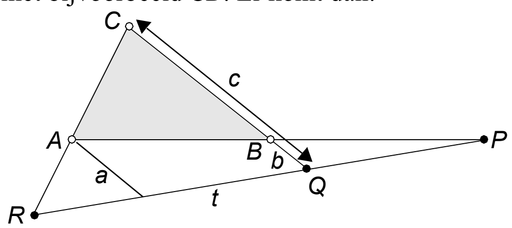

De punten *P, Q, R* liggen dan precies op één rechte lijn. Allicht: de drie toppen van de paaltjes bepalen een vlak *V* en de punten *P, Q, R* liggen gedrieën op de snijlijn van *V* met het grondvlak.
Men kan er nu voor kiezen om óf de toppen óf de voeten van de paaltjes *A, B, C* te noemen. Hoe dan ook:

$$\frac{|AP|}{|BP|} = \frac{a}{b}\ ,\ \frac{|BQ|}{|CQ|} = \frac{b}{c} \quad \text{en} \quad \frac{|CR|}{|AR|} = \frac{c}{a}$$

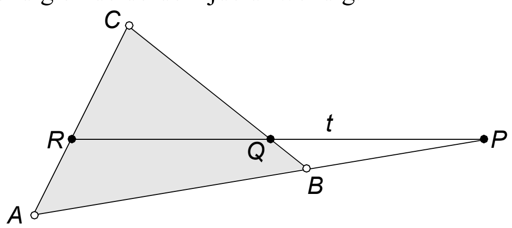
Het product van deze drie verhoudingen is duidelijk 1.
Voor de zuivere planimetristen kan dit verhaal worden omgetoverd in een ‘plat’ bewijs:




De paaltjes zijn vervangen door evenwijdige lijnstukken, met lengte *a*, *b* en *c* die *A, B,* en *C* verbinden met de *transversaal t* (= de lijn door *P, Q* en *R*). De verhoudingen van de ‘stukken’ waarin de zijden van driehoek *ABC uitwendig* worden verdeeld door *P, Q* en *R* zijn weer respectievelijk gelijk aan $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$ en $\frac{c}{b}$. De richting van die lijnstukjes doet er niet toe en dus zou je ze ook parallel kunnen laten zijn met bijvoorbeeld *CB*. Er komt dan:




en dit is zo’n beetje de figuur die Menelaos zelf gebruikte voor zijn bewijs.
Bekijk nog even de Menelaos-figuur zonder hulplijnen.
In feite zijn daarin vier driehoeken te ontdekken, elk met bijbehorende transversaal. Om notatie-esthetische reden verwissel ik nu de letters *A* en *R*, alsook *B* en *Q*; nu snijdt de nieuwe transversaal *t* twee zijden van driehoek *ABC* inwendig en de derde zijde uitwendig.




Ook in dit geval geldt (het bewijs verloopt identiek) dat het cyclische product van de verhoudingen van de stukken, waarin *t* de zijden van de driehoek verdeelt (inwendig dan wel uitwendig), gelijk is aan 1.

***Georiënteerde verhoudingen***
Het zou natuurlijk leuk zijn als de voorwaarde:

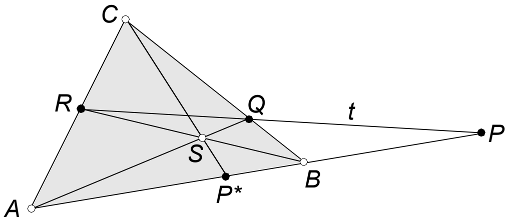
$$\frac{|AP|}{|BP|} \text{¥} \frac{|BQ|}{|CQ|} \text{¥} \frac{|CR|}{|AR|} = 1$$

niet alleen noodzakelijk, maar ook voldoende zou zijn voor het op één lijn liggen van *P, Q* en *R*. Er zit echter een haar in de soep, zoals een van mijn leraren placht te zeggen. Bekijk de figuur bovenin de volgende kolom. In de daar afgebeelde situatie geldt niet alleen voorgaande gelijkheid, maar ook (volgens Ceva):

$$\frac{|AP^*|}{|BP^*|} \text{¥} \frac{|BQ|}{|CQ|} \text{¥} \frac{|CR|}{|AR|} = 1$$

terwijl *P*, Q* en *R* duidelijk niet collineair zijn.

Blijkbaar geldt: $\frac{|AP^*|}{|BP^*|} = \frac{|AP|}{|BP|}$



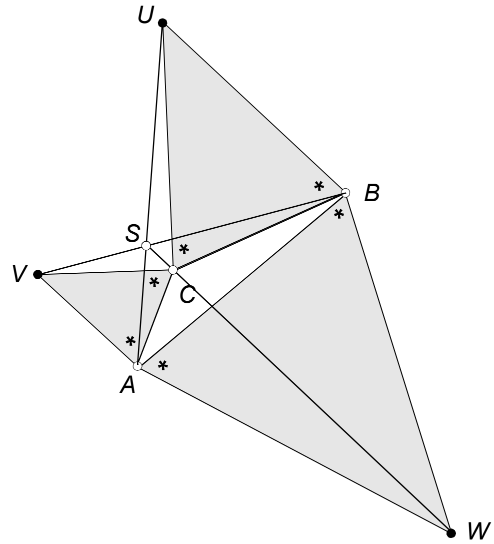

Het omkeren van Menelaos' stelling gaat niet vanzelf, maar vraagt om een scherpere formulering.
Dat zou bijvoorbeeld kunnen door over uitwendige en inwendige deelpunten $P$, $Q$ en $R$ te spreken. De geijkte manier is echter om met 'gerichte lijnstukken' (vectoren) en 'georiënteerde verhoudingen' te werken. In bovenstaande figuur zijn de vectoren $\underline{AP}$ en $\underline{BP}$ gelijkgericht, terwijl $\underline{AP}^*$ en $\underline{BP}^*$ juist tegengesteld gericht zijn.
De verhouding $\underline{AP}$ / $\underline{BP}$ wordt nu als positief en de verhouding $\underline{AP}^*$ / $\underline{BP}^*$ als negatief aangemerkt.
Die aldus georiënteerde verhoudingen worden dan respectievelijk genoteerd als ($AB\boldsymbol{P}$) en ($AB\boldsymbol{P}^*$). Zo ontstaat een 1-1-correspondentie tussen de punten van de lijn door $A$ en $B$ ($B$ uitgezonderd) en de reële getallen (zonder 1).

Uit ($AB\boldsymbol{P}$) × ($BC\boldsymbol{Q}$) × ($CA\boldsymbol{R}$) = 1 kan worden afgeleid dat $P$, $Q$ en $R$ collineair zijn. Noem het snijpunt van $QR$ met $AB$ even $O$, dan ($AB\boldsymbol{O}$) × ($BC\boldsymbol{Q}$) × ($CA\boldsymbol{R}$) = 1 (volgens 'Menelaos-heen'). Uit de twee identiteiten volgt direct ($AB\boldsymbol{O}$) = ($AB\boldsymbol{P}$), dus valt $O$ samen met $P$ en daarmee is 'Menelaos-terug' een feit.
De stellingen van Menelaos en Ceva kunnen nu als heen- en terug-implicaties worden geformuleerd. Laat $P$, $Q$, $R$ punten zijn op de drie dragers van de zijden van driehoek $ABC$, maar niet de hoekpunten zelf, dan:

$$\boldsymbol{P, Q, R} \text{ collineair} \Leftrightarrow (AB\boldsymbol{P}) \times (BC\boldsymbol{Q}) \times (CA\boldsymbol{R}) = \mathbf{1}$$

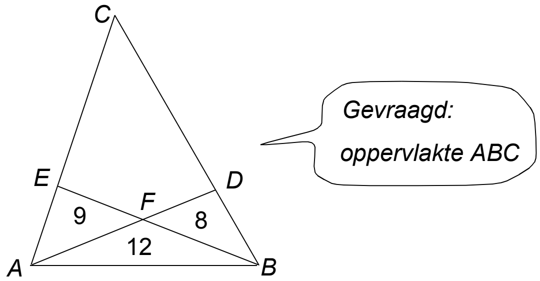
$$A\boldsymbol{Q}, B\boldsymbol{R}, C\boldsymbol{P} \text{ concurrent} \Leftrightarrow (AB\boldsymbol{P}) \times (BC\boldsymbol{Q}) \times (CA\boldsymbol{R}) = \mathbf{-1}$$

Deze versie van de stelling van Ceva laat, anders dan de oerversie uit aflevering 23, ook toe dat twee van de drie punten *P, Q, R buiten* de driehoek liggen. Door met georiënteerde oppervlakten te werken (oppervlakte Δ $XYZ$ is positief als de route van $X$ via $Y$ naar $Z$ tegen de klokwijzerrichting in is, anders negatief) kan het bewijs van 23 worden gekopieerd. Maar de stelling van Ceva kan ook heel goed worden bewezen uit die van Menelaos.
De beperking tot de oerversie van Ceva, die ik mij in 23 veroorloofde, namelijk die waarbij de drie zogenaamde *cevianen* geheel binnen de driehoek liggen, was voor Louis Maassen aanleiding tot milde kritiek. Mijn bewijs voor de stelling: '*als gelijkvormige gelijkbenige driehoeken buitenwaarts op de zijden van driehoek ABC zijn geplaatst, gaan de lijnen die A, B en C met de toppen van die driehoeken verbinden door één punt*' is wel valide voor alle niet-stomphoekige driehoeken, maar niet voor alle stomphoekige exemplaren. Als namelijk bij een stomphoekige driehoek de gelijkbenige driehoeken op de zijden spits genoeg zijn, ligt het snijpunt $S$ van de lijnen $AY$, $BV$ en $CW$ buiten de driehoek (zie tekening).

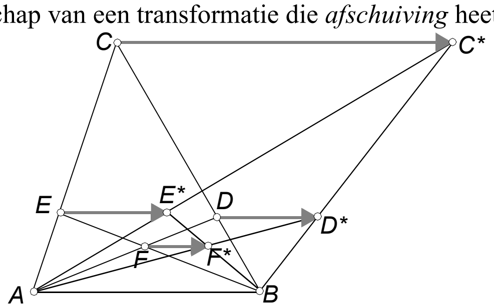



De oerversie van Ceva's stelling biedt hier geen soelaas, maar met de 'nieuwe' versie lukt het uitstekend.

***Een oppervlakkig probleem***
Er kwam nog een interessante reactie binnen op mijn vorige stukje. Hans Dompeling ontdekte een mooie stelling naar aanleiding van het volgende probleem:

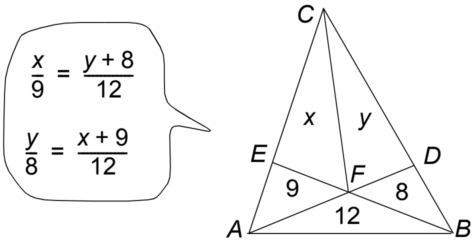



Even was er bij mij de verbazing dat de oppervlakte van $ABC$ door de gegevens vast zou liggen. Als ik $F$, $D$ en $E$ evenwijdig aan $AB$ verschuif, maar zo dat $D$ op $AF$ en $E$ op $BF$ blijft liggen, schuift $C$ dan ook over een lijn evenwijdig $AB$? Het antwoord is ja, en dat volgt uit een eigenschap van een transformatie die *afschuiving* heet.




De lengten van de vectoren $\underline{FF}^*$, $\underline{EE}^*$ en $\underline{DD}^*$ verhouden zich als hun afstanden tot $AB$, dus hier als 12, 21 en 20.
Dat is kenmerkend voor de afschuiving. Omdat $AE$ afgeschoven wordt naar $AE^*$ en $BD$ naar $BD^*$ wordt het snijpunt $AE$ en $BD$ (dus $C$) afgeschoven naar het snijpunt van $AE^*$ en $BD^*$ (dus $C^*$) met als gevolg $CC^*$ // $AB$.
Dat zit dus wel goed. Maar om hieruit ook meteen de oppervlakte van $ABC$ af te leiden, dat is andere koek.

Dan maar iets anders proberen. Verbind bijvoorbeeld $C$ met $F$ en noem de oppervlakten van de delen waarin de vierhoek $CEFD$ wordt verdeeld $x$ en $y$.
Dan volgt:




Oplossing van het stelsel leidt uiteindelijk tot $x + y = 41$ en oppervlakte $ABC = 70$. Hans Dompeling vond naar aanleiding van deze opgave de fraaie relatie:

$$\frac{1}{|ABD|} + \frac{1}{|ABE|} = \frac{1}{|ABF|} + \frac{1}{|ABC|}$$

Hij bewijst dit door op twee manieren naar de verhouding van de oppervlakten van de driehoeken $AFE$ en $ADC$ te kijken. Enerzijds geldt:

$$\frac{|AFE|}{|ADC|} = \frac{|ABE| - |ABF|}{|ABC| - |ABD|}$$

Anderzijds hebben de driehoeken $AFE$ en $ADC$ de hoek bij $A$ gemeenschappelijk en daaruit volgt eenvoudig dat hun oppervlakten zich verhouden als de producten van de omliggende zijden, dus:

$$\frac{|AFE|}{|ADC|} = \frac{|AE| \times |AF|}{|AC| \times |AD|} = \frac{|ABE|}{|ABC|} \times \frac{|ABF|}{|ABD|}$$

Stel nu voor het gemak de oppervlakten van $ABC$, $ABD$, $ABE$ en $ABF$ respectievelijk voor door $c$, $d$, $e$ en $f$ dan volgt uit het voorgaande:

$$\frac{e-f}{c-d} = \frac{e}{c} \times \frac{f}{d}$$

ofwel:

$$\frac{e-f}{ef} = \frac{c-d}{cd}$$

en na breuksplitsing:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{e} = \frac{1}{f} + \frac{1}{c}$$

Dompelings' collega Ton Hengeveld bedacht een variant, waarbij de hulplijn $CF$ weer gebruikt wordt.
Dat bewijs start aldus:

$$\frac{|ABC|}{|ABF|} = \frac{|ABF| + |ACF| + |BCF|}{|ABF|} = 1 + \frac{|CD|}{|BD|} + \frac{|CE|}{|AE|}$$

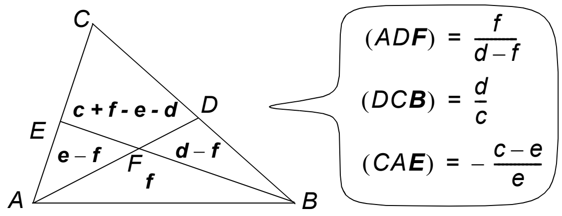
De uitgedaagde lezer voltooie het zelf.

***Terug naar Menelaos***
De voorgaande stelling over de reciproke oppervlakten laat zich ook behandelen met Menelaos.

Beschouw in de uitgangsfiguur de lijn $BE$ als transversaal bij driehoek $ADC$. Er geldt nu:

$$(AD\boldsymbol{F}) \times (DC\boldsymbol{B}) \times (CA\boldsymbol{E}) = 1$$

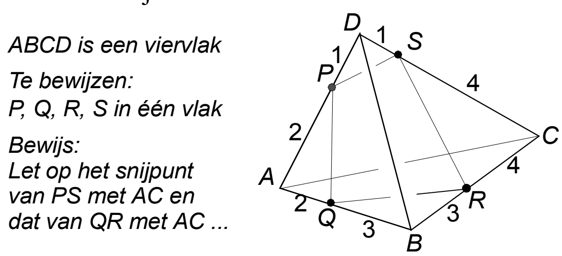
Deze verhoudingen laten zich uitdrukken in de oppervlakten $c$, $d$, $e$ en $f$.



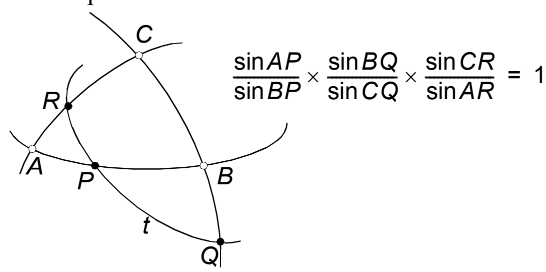

Dit gesubstitueerd in het Menelaos-product geeft:

$$\frac{f}{d-f} \times \frac{d}{c} \times \left(1 - \frac{c}{e}\right) = 1$$

en na nog wat algebra komt er de gezochte relatie. De stelling van Menelaos wordt vooral toegepast bij het bewijzen van de collineariteit van drie punten. Zo kan men er de beroemde incidentie-stellingen van Pappos en Desargues uit afleiden, en nog veel meer moois. In bijvoorbeeld *Hoofdstukken uit de Meetkunde* (auteur Bottema, uitgever Epsilon) en *Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry* (auteur Ross Honsberger, uitgever Mathemathical Association of America) zijn er hoofdstukjes met fraaie toepassingen van Menelaos (en ook van Ceva) te vinden. De stelling laat zich ook in de ruimtemeetkunde toepassen. Een concreet sommetje als voorbeeld:




Menelaos behandelt de nu naar hem genoemde stelling in zijn werk *Spherica*. In dit boek over boldriehoeksmeting figureert deze 'transversaalstelling' slechts als lemma om zijn eigenlijke stelling te bewijzen. Die betreft een boldriehoek $ABC$ met als transversaal $t$ een vierde grote cirkel en het product van drie verhoudingen van sinussen van de met de bogen $AP$, $BP$, enzovoort corresponderende middelpuntshoeken van de bol.




Ptolemaios paste déze stelling van Menelaos toe bij het berekenen van de declinatie van de zon op verschillende geografische lengten.

*Martin Kindt, martin@fi.uu.nl*

## Noot

[1] Ruimtevisioenen in Platland, *De Nieuwe Wiskrant, 12.4,* 1993