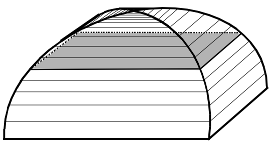
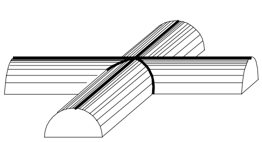
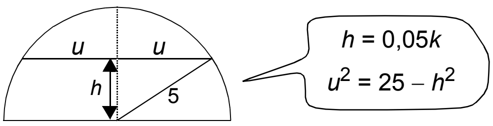
Wat te bewijzen is (27)

Rubriek

In 1998 werd in het kader van het Profi-project aan de leerlingen bij het CSE de volgende opgave voorgelegd.

> In figuur 3 zie je een zogenaamd kruisgewelf.
> Zo'n kruisgewelf kan worden opgevat als het gemeenschappelijke deel van twee even grote halve cilinders, waarvan de assen elkaar loodrecht snijden (figuur 4)
>
> 
>
> **figuur 3**
>
> 
>
> **figuur 4**
>
> Het bedoelde kruisgewelf heeft een vierkant grondvlak van 10 bij 10 meter. De horizontale doorsneden van het kruisgewelf tussen grondvlak en top zijn eveneens vierkant van vorm (zie figuur 3). Een benadering van de inhoud in m^3 van het kruisgewelf is:
>
> $$5\sum_{k=0}^{99}\left(1-\frac{k^2}{100^2}\right)$$
>
> Verklaar deze formule.
> Laat zien dat deze benadering minder dan 3 m^3 verschilt van de exacte inhoud.

De beantwoording van de eerste vraag vereist wat inzicht in de ruimtelijke situatie. Teken bijvoorbeeld een vooraanzicht van het kruisgewelf met (de projectie van) een horizontale doorsnede op willekeurige hoogte.



De zijde van een horizontale doorsnede van het kruisgewelf is gelijk aan een koorde evenwijdig aan de middellijn van een halve cirkel met straal 5. Verdeel ik nu de hoogte 5 van het gewelf in 100 gelijke segmenten en kijk ik naar het vierkant op de hoogte $0{,}05k$, dan kan eenvoudig worden vastgesteld dat dit vierkant de oppervlakte $100 \cdot [1 - (0{,}01k)^2]$ heeft. Benadering van de inhoud met de som van 100 prismaplakjes ter dikte van 0,05 leidt dan tot bovenstaande formule.
Bij de tweede vraag moesten én deze benadering én de exacte inhoud worden berekend. De eerste berekening kan rechtstreeks worden uitgevoerd door de GR en het resultaat is dan 335,825. De tweede berekening vergt het opstellen van een integraal, in dit geval kan dat aldus:

$$\int_0^5 (100-4x^2)\ dx$$

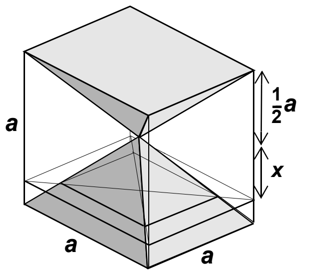
en dat geeft de uitkomst: $333\frac{1}{3}$.

Dit vraagstuk werd ronduit slecht gemaakt. Achteraf waren daar wel een paar goede redenen voor te vinden. Het aantonen van de gebruikte formule vraagt een goed inzicht in de ruimtelijke situatie. Het cohort leerlingen waarvoor deze opgave bestemd was, had noch in de meetkunde van de onderbouw, noch in die van de bovenbouw veel ervaring met driedimensionale figuren opgedaan. Figuur 4 zou de leerlingen op het spoor van het vooraanzicht gezet kunnen hebben, maar helaas heeft dat niet gewerkt.
Een andere nogal sneue gebeurtenis was dat de leerlingen over een 'oude' rekenmachine beschikten (de TI 82 namelijk) die sommen met hooguit 99 termen numeriek berekende; bij overschrijding van dit aantal volgde op het scherm de waarschuwing 'Dim Error' een tekst die veel leerlingen voor het eerst zagen en niet wisten te duiden. Was dat laatste wel het geval geweest, dan zouden ze zich gemakkelijk gered hebben door bijvoorbeeld de eerste term af te splitsen. Overigens waren er ook enige leerlingen die zich de formule voor de som van kwadraten wisten te herinneren en daarmee de benadering van de inhoud vonden. Verder was het de bedoeling dat de exacte inhoud via een integraal werd berekend en dat laatste gaf hier de minste problemen. De leerlingen hadden blijkbaar voldoende geoefend in het maken van de stap van Riemannsom naar integraal.

Archimedes wist het al
Het beroemde boek *De Methode* van Archimedes dat pas in 1906 boven water kwam dankzij inspanningen van de Deense filoloog Heiberg, begint aldus:
Archimedes aan Eratosthenes Gegroet
Ik zond u vroeger enkele van de door mij gevonden stellingen waarvan ik de proposities had opgeschreven met de aansporing, die bewijzen, die ik nog niet bij deze gelegenheid meedeelde, te zoeken.
Dan volgen twee proposities over inhouden van (mede) door cilinderoppervlakken begrensde lichamen.
De tweede propositie luidt:
indien er in een kubus een cilinder wordt beschreven die zijn bases in overstaande vierkanten heeft en waarvan het oppervlak aan de vier overige vlakken raakt en er wordt in dezelfde kubus ook nog een tweede cilinder beschreven, die zijn bases in andere vierkanten heeft en waarvan

het oppervlak aan de vier overige vlakken raakt, dan is het lichaam begrensd door de oppervlakken van de cilinders, dat binnen de beide cilinders ligt, tweederde van de gehele kubus.

De formulering van Archimedes is verrassend helder en de lezer zal hebben begrepen dat het om een 'dubbel kruisgewelf' gaat, ook wel eens' kokinje' genoemd naar de vorm van oud Nederlands snoepje.
Uit de stelling van Archimedes volgt dan onmiddellijk het antwoord op de vraag naar de exacte inhoud van het kruisgewelf van de examenopgave, namelijk $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times 10^3$.
Hoewel het bewijs van Archimedes verloren is gegaan, is het na bestuderen van de overige bewijzen in zijn boek geen heksentoer om zijn vermoedelijke gedachtegang te reconstrueren. Er is echter een veel eenvoudiger manier om de waarheid van de bewering in te zien, namelijk met wat wel het principe van Cavalieri (na Archimedes een van de belangrijkste wegbereiders van de integraalrekening) wordt genoemd. Vergelijk de kokinje-inhoud met het volume van het lichaam dat ontstaat door uit de kubus een 'diabolo' van twee piramiden op overstaande zijvlakken weg te nemen.



De inhoud van elk van beide piramiden is gelijk aan $\frac{1}{6}a^3$ en dus blijft er buiten de diabolo $\frac{2}{3}a^3$ over.
De horizontale doorsnede op een afstand x van het middelpunt van de kubus is een vierkante ring waarvan de oppervlakte gelijk is aan $a^2 - 4x^2$ en dit is juist gelijk aan de oppervlakte van de horizontale doorsnede van de kokinje op afstand x van het middelpunt.
Kortom: als je beide lichamen (kokinje en ingedeukte kubus) tegelijkertijd en met dezelfde snelheid vult met water, dan zijn de oppervlakten van de waterspiegel op elk moment aan elkaar gelijk. Het principe van Cavalieri zegt nu dat er precies evenveel water in beide lichamen gaat.

Een Archimedisch bewijs
Je kunt het principe van Cavalieri niet exact genoeg vinden, het is in elk geval een middel om de formule voor de inhoud van de kokinje te ontdekken. Archimedes gebruikte een andere ontdekkingsmethode, namelijk een waarbij hij figuren aan een denkbeeldige balans hing en momenten berekende.
Was hij langs deze weg eenmaal innerlijk overtuigd van een bepaalde oppervlakte- of inhoudsformule, dan volgde een bewijs uit het ongerijmde, in feite de voorloper van de epsilon-delta-redenering die thans in de analyse wordt gebruikt. Daartoe benaderde hij de bedoelde oppervlakte of inhoud van twee kanten, tegenwoordig zeggen we: met onder- en bovensommen.
In het geval van de kokinje zou dat neerkomen op:

$$B_n = \frac{a^3}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k^2}{n^2}\right) \quad \text{en} \quad O_n = \frac{a^3}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k^2}{n^2}\right)$$

waarbij B_n en O_n respectievelijk de boven- en ondersom voorstellen. De eerste stap van het bewijs is dan het vaststellen van het feit dat het verschil $B_n - O_n$ gelijk is aan $\frac{1}{n} \cdot a^3$ en dus kleiner te maken is dan elk vooraf bedacht positief getal (door n maar groot genoeg te kiezen).
Archimedes gebruikte bij het vervolg de ongelijkheid:

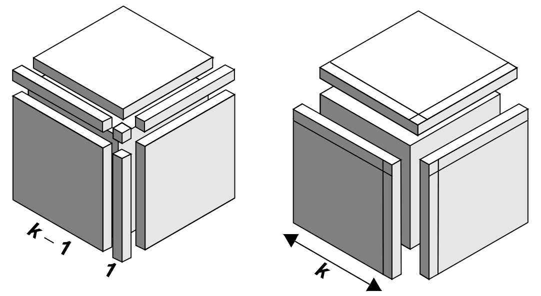
$$1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 < \tfrac{1}{3}n^3 < 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 \quad (*)$$

die hij weer baseerde op de formule:

$$3(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) = n^3 + n^2 + (1 + 2 + \ldots + n)$$

Aad Goddijn wees mij er ooit op dat je het ook zonder een formule voor de som van kwadraten kunt stellen.
De volgende tekening leert immers dat:

$$3(k-1)^2 < \boldsymbol{k^3 - (k-1)^3} < 3k^2$$



Neem nu $k = 1, 2, \ldots, n$ en maak een telescoopsom:

$$\begin{array}{c}
3 \cdot 0^2 < \mathbf{1^3 - 0^3} < 3 \cdot 1^2 \\
3 \cdot 1^2 < \mathbf{2^3 - 1^3} < 3 \cdot 2^2 \\
3 \cdot 2^2 < \mathbf{3^3 - 2^3} < 3 \cdot 3^2 \\
\vdots \\
3(n-1)^2 < \boldsymbol{n^3 - (n-1)^3} < 3n^2 \qquad + \\
\hline
3(1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2) < \boldsymbol{n^3} < 3(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2)
\end{array}$$

Met behulp van (*) kan nu worden afgeleid:

$$O_n < a^3 - \tfrac{1}{3}a^3 = \tfrac{2}{3}a^3 \quad \text{en} \quad B_n > a^3 - \tfrac{1}{3}a^3 = \tfrac{2}{3}a^3$$

De typisch Archimedische bewijsmethode gaat nu in moderne termen als volgt. Stel K (= inhoud kokinje) $> \frac{2}{3}a^3$.
Dan kunnen we n zo groot kiezen dat:

$$K - \tfrac{2}{3}a^3 > B_n - O_n > B_n - \tfrac{2}{3}a^3$$

ofwel $K > B_n$ in strijd met 'B_n is bovensom'.
Evenzo leidt de veronderstelling $K < \frac{2}{3}a^3$ tot de tegenstrijdigheid $K < O_n$.

Er blijft dus niets anders over dan $K = \frac{2}{3}a^3$.

De grafsteen van Archimedes

Vervang in de stelling van Archimedes ‘kokinje’ door ‘bol’ en ‘kubus’ door ‘cilinder’ (rakend met mantel en met grond- en bovenvlak aan de bol) en er ontstaat weer een volumeverhouding van 2 staat tot 3.

Die betrekking vermeldt Archimedes in zijn boek *Over bol en cilinder*. Hij maakt daarin ook gewag van het opmerkelijke feit dat dezelfde verhouding voor de oppervlakten van bol en cilinder (bodem en deksel meegerekend!) geldt. Het verhaal zegt dat hij zo verguld was met deze ontdekkingen dat hij die, geïllustreerd en wel, op zijn grafsteen gebeiteld wilde. En zo geschiedde.

Wij kunnen Archimedes’ constateringen direct verifiëren met onze formules voor inhoud en oppervlakte, maar Archimedes baseerde zich op de vernuftig bewezen proposities 33 en 34 uit zijn boek, die respectievelijk luiden:

- *van elke bol is de oppervlakte viermaal zo groot als die van zijn grootste cirkel.*
- *elke bol is viermaal zo groot als de kegel die een basis heeft gelijk aan de grootste cirkel van de bol en een hoogte gelijk aan de straal van de bol.*

Eigenlijk vind ik dit type formuleringen veel spannender dan onze koele formules.

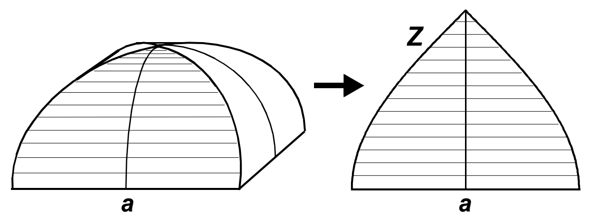
Terug naar de kokinje

De voor de hand liggende vraag is nu: hoe zit het met de oppervlakte van de kokinje?

Het zou toch te mooi wezen om waar te zijn als ook

oppervlakte kokinje = $\frac{2}{3}$ *oppervlakte kubus*?

Omdat de gebogen zijvlakken van de kokinje stukjes van een cilinder zijn, laten die zich eenvoudig plat maken, dit in tegenstelling tot het boloppervlak.

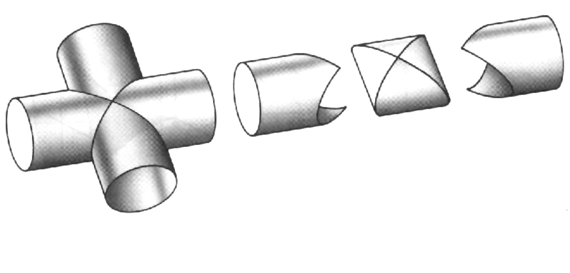


opp. $Z = \frac{1}{8}$ opp. kokinje

Het uitgerolde vlakdeel Z is een ‘driehoek’ met twee gelijke gebogen zijden. De basis van die driehoek is a en de hoogte is gelijk aan de lengte van een kwartcirkel met diameter a, dat is dus $\frac{1}{4}\pi a$.

Om de exacte oppervlakte te bepalen, moet ik weten welke krommen de opstaande zijden zijn.

Nu is het niet moeilijk te bewijzen dat de ‘ribben’ van de kokinje stukken van een ellips zijn.



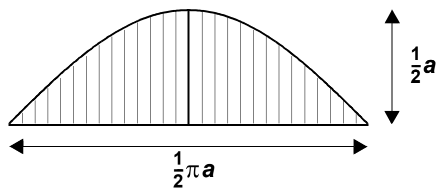
De doorsnede van twee congruente cilindermantels waarvan de assen elkaar loodrecht snijden, moet liggen in twee (van de vier) symmetrievlakken van het kruis. Dus bestaat de snijfiguur uit twee krommen volgens welke beide cilinders die vlakken snijden en dat zijn ellipsen.

Als een cilindermantel met daarop een ellips wordt uitgerold ontstaat er een heuse sinusoïde. Als je dat de eerste keer hoort, is dat nogal verbazend. Een heel aardig experiment om in de klas uit te voeren is: rol een kaars in een vel papier en snijd de ingepakte kaars met een scherp mes scheef door. Uitrollen van het papier laat dan een kromme zien die, zeker als het papier een aantal keer om de kaars is gerold, sterk aan de sinuskromme doet denken. Dat maakt echt indruk op leerlingen en het is leuk om hen dan wat probleempjes voor te leggen, zo van: *hoe moet ik snijden om een grotere amplitude te krijgen?* of *noem de straal van de kaars a en stel je snijdt onder 45°, welke formule zou er bij de sinusoïde kunnen passen?*

Het bewijs dat er echt een sinusoïde ontstaat is voor school een beetje lastig. In het Hawexboekje *Sinus & Co* heb ik ooit een voorzichtige aanloop gemaakt door een aantal paaltjes zodanig in een cirkel op te stellen, dat zij de omtrek in gelijke delen verdelen. Die paaltjes werden zo afgezaagd dat hun toppen in een scheef vlak kwamen te liggen en via een combinatie van voor- en zijaanzicht werd begrepen dat bij opstelling van diezelfde paaltjes langs een rechte lijn (met weer gelijke tussenruimten) hun toppen op een sinuskromme liggen.

Een snel analytisch bewijs berust op substitutie van de parametervoorstelling van een cilinder (om een van de coördinaatassen) in de vergelijking van een vlak dat scheef op de cilinderas staat.

Goed, ik weet nu dat de oppervlakte van Z gelijk is aan de oppervlakte onder een sinusoïde op een interval van een halve periode.



Een passende formule bij deze sinusoïde is:

$$y = \tfrac{1}{2}a \cdot \cos\left(\frac{2x}{a}\right)$$

Het is nu nog een kwestie van integreren:

$$2 \cdot \tfrac{1}{2}a \int_0^{\frac{1}{4}\pi a} \cos\left(\frac{2x}{a}\right) \mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}a^2 \sin\left(\frac{2x}{a}\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{4}\pi a} = \tfrac{1}{2}a^2$$

De acht ‘kokinjedriehoeken’ hebben dus samen evenveel oppervlakte als vier vlakken van de kubus en dat is juist $\frac{2}{3}$ van de totale kubusoppervlakte! Waarmee Archimedes geen reden zal hebben om zich om te draaien in zijn graf.

Martin Kindt, martin@fi.uu.nl