

Welke wiskunde moet je doen om wiskundig geletterd te worden? Dat hangt er vanaf hoe en hoe breed je wiskundige geletterdheid wil definiëren. Dat het veel meer is dan alleen letterrekenen laat **Jan de Lange** zien in een tweedelig artikel. In dit eerste deel wordt het werkterrein verkend: vier categorieën met ieder hun eigen specifieke geletterdheid.

Wiskunde om gecijferd van te worden

Uit een krant van 1990:

Gisteren, maandag 9 oktober, besteedde de AVRO aandacht aan het analfabetisme in Nederland. Uit de gegevens die voor de uitzending verzameld waren bleek dat niet minder dan 1 van de 25 mensen in Nederland niet kan lezen of schrijven, dus geen boodschappenlijstje lezen of schrijven, geen ondertiteling volgen op de tv, geen krant lezen, geen brief schrijven. Stel je voor, 1 op de 25 mensen, in een land dat geld stuurt naar ontwikkelingslanden zodat mensen kunnen leren lezen en schrijven! Een op de 25, dat betekent 25% van onze inwoners.

Hoeveel inwoners heeft Nederland? Veertien miljoen? Dat betekent dat in ons hoogontwikkelde land niet minder dan drie en een half miljoen mensen niet kunnen lezen of schrijven.

Bent u niet sprakeloos?

Sprakeloos, inderdaad. Fouten zoals hierboven gemaakt worden vaak niet eens opgemerkt door onze ontwikkelde, geletterde burgers. Ongecijferdheid, slecht kunnen omgaan met getallen en cijfermatige gegevens en uitspraken en situaties die uitnodigen tot uit het hoofd oplossen en schattingen doen, vormen een veel groter probleem dan men denkt. Volgens Treffers (1991) wordt dit niveau van ongecijferdheid niet zozeer bereikt door de inhoud van wat wordt onderwezen (of juist niet wordt onderwezen), maar is het juist het resultaat, althans gedeeltelijk, door de structurele opbouw van de praktijk van het onderwijs. Hoe definiëren we geletterdheid vanuit wiskundig oogpunt? Heeft geletterdheid te maken met wiskunde (en met welke wiskunde)? Naar welke vaardigheden zijn we op zoek? En kun je die vaardigheden wel onderwijzen?

Inleiding

Alvorens de vraag te beantwoorden 'Welke wiskunde is belangrijk?' lijkt het verstandig eerst te kijken naar een handige definitie van de door Steen (2001) gebruikte term *quantitative literacy* (QL). Volgens Steen zijn er kleine maar belangrijke verschillen tussen verschillende definities die momenteel in gebruik zijn en hoewel hij het volgende niet als definitie wil betitelen, gebruikt hij de omschrijving van QL als de 'vaardigheid in het effectief omgaan met kwantitatieve aspecten van het leven'. De

meeste definities die Steen noemt, besteden expliciet aandacht aan getallen, rekenen en kwantitatieve situaties soms in een beperkt gebied zoals door de National Adult Literacy Survey (NCES 1993):

De kennis en vaardigheden die nodig zijn voor het toepassen van rekenkundige operaties, ieder apart of in een bepaalde volgorde, bij het gebruiken van getallen die in gedrukt materiaal voorkomen (zoals het bijhouden van een kasboek of het invullen van een bestelformulier).

maar soms ook met een bredere betekenis zoals in de International Life Skills Survey (ILSS 2000):

Het geheel van vaardigheden, kennis, opvattingen, mogelijkheden, gewoontes, communicatieve vaardigheden en bekwaamheid in het probleemoplossen dat mensen nodig hebben bij het omgaan met kwalitatieve situaties in het dagelijks leven en op het werk.

Het probleem dat we hebben met deze definities is hun duidelijke nadruk op het begrip *kwantiteit*. Wiskundige geletterdheid beperkt zich niet tot het kunnen toepassen van de kwantitatieve aspecten van de wiskunde, maar omvat kennis van de wiskunde in de meest brede zin. Om een voorbeeld te geven: Ik reis vaak door de Verenigde Staten en moet dan dikwijls de weg vragen aan onbekenden. Wat me opvalt in hun antwoorden is dat mensen in het algemeen heel slecht zijn in wat ik navigatie noem: de mogelijkheid om je voor te stellen waar je precies bent, zowel in relatieve als in absolute zin. Om goed te kunnen 'navigeren' moet je kunnen kaartlezen en een kaart kunnen interpreteren, je moet ruimtelijk inzicht hebben en als het ware de ruimte om je heen beheersen ('grasping space', Freudenthal 1973). Je moet begrijpen wat routes langs een grootcirkel inhouden, de plattegrond van een nieuw huis kunnen begrijpen enzovoort. Allerlei vormen van visualisatie behoren ook tot wiskundige geletterdheid en ze vormen een absoluut noodzakelijke component van geletterdheid in het algemeen, zoals de drie boeken van Tuft (1983, 1990, 1997) overtuigend hebben laten zien. We geloven dat voor het beschrijven van wat wiskundige geletterdheid inhoudt niet alleen deze bredere definitie nodig is, maar dat we ook moeten kijken naar de veranderingen in andere schoolvakken. In de publicatie *Measuring Student Knowledge and Skills* van de Organi-

satie voor Economische Samenwerking en Ontwikkeling (OESO, 1999) wordt onder geletterdheid bij lezen een lijst van soorten teksten gepresenteerd waarvan het begrijpen gedeeltelijk bepaalt wat geletterdheid inhoudt. Deze lijst beschrijft ook vele aspecten van quantitative literacy (QL). In de genoemde publicatie worden bijvoorbeeld teksten in verschillende vorm beschreven:

- Formulieren: belastingformulieren, immigratieformulieren, visumaanvragen, sollicitatieformulieren, vragenlijsten;
- Pagina's met informatie: dienstregelingen, prijslijsten, catalogi, programma's;
- Ontvangstbewijzen: toegangsbewijzen, facturen enzovoort;
- Certificaten: diploma's, contracten enzovoort;
- Telefoongesprekken en advertenties;
- Tabellen en grafieken; gegevens weergegeven met een icoon;
- Diagrammen;
- Tabellen en matrices;
- Lijsten;
- Kaarten.

Volgens de definitie die Steen hanteerde in *Mathematics and Democracy: The Case for Quantitative Literacy* (2001), behoren deze formulieren tot 'geletterdheid in het omgaan met documenten', zoals ook gebeurt bij de definitie die het National Center for Education Statistics (NCES) gebruikt.

Met inachtneming van de verschillende standpunten heb ik gekozen voor de term 'wiskundige geletterdheid', en voor een definitie die niet alleen veelomvattend is maar ook tamelijk 'wiskundig':

Wiskundige geletterdheid is het vermogen van een individu om de rol die wiskunde speelt in de wereld te kunnen aangeven en te begrijpen, het vermogen om gefundeerde beslissingen te nemen en om wiskunde te gebruiken op een manier die tegemoet komt aan de behoeften in diens leven van opbouwend, betrokken en beschouwend burger.

Deze definitie werd ontwikkeld door de Expert Group for Mathematics of the Programme for International Student Assessment (PISA) waar ik voorzitter van ben. (Ik zal dit document hieronder herhaaldelijk citeren.) Verderop in dit stuk zal ik verschil maken tussen de concepten gecijferdheid, ruimtelijke geletterdheid (RL), quantitative literacy (QL) en wiskundige geletterdheid (WG). Ik probeer ook te beargumenteren waarom het nodig is het eens te worden over wat *basiskennis* van wiskundige geletterdheid inhoudt ter onderscheiding van het niveau voor *gevorderden*.

'Welke wiskunde?' Nog niet de juiste vraag

Voor een interview in *Mathematics and Democracy* (2001) werd aan Peter T. Ewell de vraag gesteld: 'In *The*

Case for Quantitative Literacy wordt gesteld dat *quantitative literacy* (QL) niet zomaar een eufemisme is voor wiskunde, maar dat het daar wezenlijk van verschilt – minder formeel en meer intuïtief, minder abstract en meer gebruik van contexten, minder symbolisch en meer concreet. Is dat een juist en nuttig onderscheid?' Ewell antwoordde dat dit onderscheid inderdaad betekenisvol en krachtig was.

Het antwoord op de vraag hangt voor een groot deel af van wat we verstaan onder goede wiskunde. We kunnen vermoeden dat volgens Ewell's visie wiskunde formeel en abstract is en gebruik maakt van symbolische taal – een beeld van de wiskunde dat nog steeds wijd verbreid is. Ewell zei verder dat geletterdheid inhoudt dat men over competenties beschikt die het mogelijk maken een beroep goed uit te oefenen. Functionaliteit is zeker een kernbegrip, ook in relatie tot het beroep, wat ook het beroep van wiskundige omvat. Het richten op functionaliteit geeft ons een betere mogelijkheid om een kloof te overbruggen of overlap aan te geven. In hetzelfde nummer gaf Alan H. Schoenfeld (2001) aan dat in het verleden geletterdheid en datgene wat in de wiskundeles geleerd werd ver uit elkaar lagen. Nu echter zou men die twee moeten zien als elkaar grotendeels overlappend en zo zou er ook les moeten worden gegeven. Deze benadering, die rekening houdt met de veranderende opvatting over wat wiskunde is, ziet wiskunde en wiskundige geletterdheid zeker niet als twee heel verschillende onderwerpen.

Schoenfeld maakt het onderscheid waarschijnlijk omdat hij als leerling nooit problemen in een context tegenkwam, dat hij uitsluitend 'zuivere' wiskunde studeerde en tenslotte, dat hij nooit hoefde te werken met echte gegevens uit de praktijk. Elk genoemd onderdeel is absoluut essentieel voor geletterd staatsburgerschap, maar maakt beslist niet duidelijk welke wiskunde nodig is voor wiskundige geletterdheid, tenminste niet wanneer je kijkt naar traditionele curriculumbeschrijvingen van rekenkunde, algebra, meetkunde enzovoort.

Nogmaals *Mathematics and Democracy*. Wade Ellis, Jr. (2001) merkt op dat veel docenten lesgeven in algebra op een manier die zelfstandig denken van leerlingen eerder beperkt dan aanmoedigt. Hij ontdekte dat leerlingen die een cursus elementaire algebra hadden gevolgd minder 'echte' opgaven in een context konden maken dan daarvoor: na het volgen van de cursus hadden ze het gevoel dat ze symbolische algebra moesten gebruiken om opgaven te maken die ze daarvoor oplosten door simpelweg te redeneren en te rekenen. Het zal dan ook geen verbazing wekken dat Ellis het gebruik van gezond verstand propageert – een op kwantiteiten, wiskundige concepten, vaardigheden en kennis gebaseerd gezond verstand. Ondanks hun verschillen lijken Schoenfeld en Ellis de constatering van Treffers te onderschrijven dat ongeletterdheid ver-

oorzaakt zou kunnen worden door een gebrekkige structurele instructie.

De verschillende waarnemers lijken het erover eens te zijn dat in vergelijking met de traditionele wiskunde, wiskundige geletterdheid (WG) minder formeel is, minder gebruikmakend van symbolen, en concreter. WG vraagt ook meer aandacht voor en legt meer nadruk op redeneren, denken en interpreteren en andere wiskundige vaardigheden. Om een beter beeld te krijgen van wat er bedoeld wordt met dit onderscheid moeten we eerst de ‘elementen nodig voor WG’ – zoals Steen (2001) ze noemde – beschrijven. Met een voorlopige definitie van WG en een begrip van deze elementen (of ‘competenties’ zoals ze beschreven worden in het kader van PISA), kunnen we mogelijk onze oorspronkelijke vraag beantwoorden – Welke wiskunde is belangrijk? – of een betere vraag formuleren.

Competenties die nodig zijn voor WG

De competenties die de kern vormen van de beschrijving van WG in PISA, lijken aardig overeen te stemmen met de elementen van Steen (2001). De competenties steunen op het werk van Niss (1999) en zijn Deense collega's, maar soortgelijke formuleringen komen we tegen in het werk van vele anderen uit verschillende landen (zoals aangegeven door Neubrand c.s., 2001):

1. Wiskundig denken en redeneren
Het stellen van vragen die karakteristiek zijn voor de wiskunde; het soort antwoorden kennen dat wiskunde verschaft, onderscheid maken tussen verschillende soorten uitspraken; begrijpen en hanteren van de mogelijkheden en beperkingen van wiskundige concepten.
2. Wiskundig beargumenteren
Weten wat bewijzen zijn; weten hoe bewijzen verschillen van andere vormen van wiskundig redeneren; volgen en beoordelen van een keten van argumenten; een gevoel hebben voor heuristiek; ontwikkelen en verwoorden van wiskundige argumenten.
3. Wiskundige communicatie
Zich kunnen uitdrukken op verschillende manieren, mondeling, schriftelijk of een andere visuele vorm; het werk van anderen begrijpen;
4. Modelleren
Het gebeid dat gemodelleerd moet worden structureren; de werkelijkheid vertalen naar wiskundige structuren; wiskundige modellen interpreteren in termen van context of realiteit; werken met modellen; modellen bekrachtigen; doordenken, analyseren, en bekritisseren van modellen of oplossingen; nadenken over het proces van modelvorming.
5. Problemen stellen en oplossen
Problemen stellen, formuleren, definiëren en oplossen op verschillende manieren.
6. Representatie

Coderen, decoderen, vertalen, onderscheid maken tussen en interpreteren van verschillende representaties van wiskundige objecten en situaties en de relaties tussen verschillende representaties begrijpen.

7. Symbolen
Het gebruiken van symbolische, formele en technische taal en operaties.
 8. Gereedschap en technologie
Het gebruiken van hulpmiddelen en gereedschap, waaronder technologie, wanneer dat gewenst is.
- Om wiskundig geletterd te zijn, hebben individuen deze competenties nodig tot verschillende niveaus, maar ze moeten ook vertrouwen hebben in hun eigen mogelijkheden om wiskunde te gebruiken en zich vertrouwd weten met getalsmatige voorstellingen. Waardering hebben voor wiskunde vanuit een historisch, filosofisch en maatschappelijk oogpunt is ook wenselijk.

Deze beschrijving zou duidelijk moeten maken waarom we het begrip functionaliteit genoemd hebben voor de beroepsgemeenschap van wiskundigen. We merken op dat iemand die goed wil functioneren als wiskundige ook geletterd moet zijn. Het is niet ongebruikelijk dat iemand die vertrouwd is met het gebruik van bepaald wiskundig gereedschap zich het nut ervan niet realiseert in de dagelijkse praktijk (Steen 2001, 17). Het is ook niet ongebruikelijk wanneer een wiskundige niet in staat is om gewoon met gezond verstand te redeneren (in tegenstelling tot redeneren als onderdeel van een wiskundig bewijs).

Deborah Hughes Hallett (2001) maakte in haar bijdrage aan *Mathematics and Democracy* duidelijk dat een van de redenen waarom WL zo moeilijk te verwerven en zo lastig te onderwijzen is, is dat het zowel om het gebruiken van algoritmes als het tonen van inzicht gaat. Natuurlijk zijn sommige algoritmes noodzakelijk: het is lastig om je met analyse bezig te houden wanneer je niet kunt rekenen, bijvoorbeeld, maar het is niet genoeg: inzicht is een essentieel onderdeel van wiskundig begrip. Dat inzicht, zo schrijft Hughes Hallett, impliceert het begrijpen van kwantitatieve verbanden en de bekwaamheid om die verbanden te zien in een niet vertrouwd context; om dat te bereiken is reflectie nodig, op juistheid kunnen beoordelen en vooral ervaring. Toch leggen de methodes die op het ogenblik op scholen in gebruik zijn zelden de nadruk op het verwerven van inzicht en ze doen weinig om dat op welk niveau dan ook te ontwikkelen. Het ontwikkelen van wiskundig inzicht zou juist actief ondersteund moeten worden, zelfs voor kinderen naar school gaan.

Veel landen nemen de problemen die veroorzaakt worden door de nadruk op het gebruik van algoritmes en het verwaarlozen van het verwerven van inzicht al serieus. Nederland bijvoorbeeld, heeft enig succes geboekt bij de pogingen het wiskundeonderwijs te hervormen. Voor buitenstaanders lijkt het alsof de relatief hoge scores van Nederlandse leerlingen bij de Third International Mathe-

matics and Science Study (TIMSS) en TIMSS-R dit succes al aantonen, maar de resultaten van Nederland bij het PISA-onderzoek zouden het zelfs nog duidelijker moeten laten zien.

In Nederland verschoof de nadruk op een strikt algoritmische benadering van het wiskundeonderwijs. Wat daarbij hielp was het idee dat je wiskundige competenties of vaardigheden kunt clusteren: een cluster omvat reproductie, algoritmes, definities enzovoort; een ander cluster behelst de vaardigheid in het leggen van verbanden tussen verschillende wiskundige aspecten of concepten die nodig zijn om eenvoudige problemen op te lossen; en een derde cluster heeft betrekking op inzicht, redeneren, reflectie en het maken van generalisaties als kernpunten (de Lange 1992). Bij het ontwerpen van curricula en toetsen, maar ook bij het maken van opgaven voor internationale onderzoeken werd deze benadering een afspiegeling van wat wij dachten dat goede wiskunde was in de zin van wiskundige competenties. Deze benadering bleek ook nuttig om te voorkomen dat men de eindtermen redeneren, communicatie en verbanden, zoals geformuleerd door de National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) als louter retoriek bezag (Steen 2001). Op den duur werd dit idee van clustering overgenomen door het OECD- PISA-onderzoek (1999) maar ook in een raamwerk voor het toetsen van wiskunde in de klas (de Lange 1999) en in een elektronische toetsenbank (Cappo en de Lange 1999).

Ten slotte merken we op dat de competenties die nodig zijn voor WG inderdaad dezelfde competenties zijn die nodig zijn voor wiskunde *zoals het zou moeten worden onderwezen*. Als dat zo zou zijn, (met wiskundeboeken die de aanwijzingen van Schoenfeld en Hughes Hallett volgen en voortborduren op de ervaringen in Nederland en andere landen) dan zou de kloof tussen wiskunde en wiskundige geletterdheid veel smaller zijn dan sommige mensen nu suggereren (Steen 2001). In werkelijkheid is die kloof in veel landen tamelijk breed en wordt de noodzaak om na te denken over WG en de manier om die te bereiken nog nauwelijks onderkend. Zoals Neubrand c.s. (2001) al opmerkten over de situatie in Duitsland: 'In de dagelijkse lespraktijk in Duitsland is er geen verband tussen het onderwijzen van wiskunde als discipline en praktische toepassingen ervan binnen een context' (vrije vertaling van de auteur).

Wat is wiskunde?

Om een helder beeld te krijgen van geletterdheid in wiskunde, lijkt het wijs om eens even na te denken over wat wiskunde nu precies is. Niet dat we over dat onderwerp een diepgaande filosofische verhandeling willen schrijven – daarvan zijn er vele en goede beschikbaar – maar het is niet ondenkbaar dat veel lezers denken dat schoolwiskunde de wiskunde als wetenschap vertegenwoordigt.

Diverse auteurs van *Mathematics and Democracy* (Steen 2001) wezen hier al op, vaak gebaseerd op hun eigen ervaringen (Schoenfeld, Schneider, Kennedy en Ellis onder andere). In *On the Shoulders of Giants: New Approaches to Numeracy* (1990) merkte Steen al op dat traditionele schoolwiskunde een paar wiskundige domeinen (bijvoorbeeld rekenen, algebra en meetkunde) oppikt en ze vervolgens horizontaal ordent om een curriculum te vormen: eerst rekenen, dan eenvoudige algebra, dan meetkunde, dan meer algebra en tenslotte, alsof dat het toppunt van wiskundige kennis is, analyse. Elke leergang lijkt vooral ontworpen te zijn om voor te bereiden op de volgende. Deze leergangen geven een vertekend beeld van de wiskunde als wetenschap, lijken geen verband te hebben met de ervaringswereld van kinderen en zijn van geen belang voor de maatschappij. Het resultaat ervan is dat de informele ontwikkeling van de intuïtie, een kernkarakteristiek in het ontwikkelen van WG, afdoende wordt voorkomen. Om deze verkeerde indruk van de aard van de wiskunde te boven te komen, zullen we hierna schetsen hoe wij wiskunde zien en vervolgens wat dat voor consequenties kan hebben voor het onderwijs in de wiskunde.

Wiskundige concepten, structuren en begrippen zijn bedacht als instrumenten om verschijnselen te ordenen in de natuur, de maatschappij en de denkwereld. In de echte wereld zijn verschijnselen die zich lenen voor een wiskundige behandeling niet zo mooi geordend als de schoolboeken doen geloven. Het is maar zelden dat echte problemen zich voordoen op een manier en binnen een context die het begrijpen van het probleem en het vinden van een oplossing mogelijk maken door het toepassen van kennis uit slechts één wiskundedomein. Als we wiskunde zien als de wetenschap die ons helpt echte problemen op te lossen, heeft het zin om een fenomenologische benadering toe te passen voor het beschrijven van wiskundige concepten, structuren en begrippen. Deze benadering werd gevolgd door Freudenthal (1973) en door anderen zoals Steen (1990), die beweren dat als wiskunde-curricula een veelvoud van parallelle domeinen zouden laten zien, elk gebaseerd op geschikte ervaringen uit de kinderwereld, het effect ervan zou zijn dat kinderen wiskundig inzicht ontwikkelen in de vele verschillende domeinen van de wiskunde. Vervolgens stelde Steen voor om inspiratie te zoeken bij de ontwikkelingsmogelijkheden die gevormd worden door vijf diepgaande wiskundige begrippen: maten, hoeveelheden, onzekerheid, vorm en verandering. De eerder genoemde OECD PISA *mathematics expert group* heeft deze begrippen aangepast tot vier fenomenologische categorieën die beschrijven wat wiskunde inhoudt: *hoeveelheid, vorm en ruimte, veranderingen en relaties* en *onzekerheid*.

Als we deze vier categorieën gebruiken, kan wiskundige inhoud worden ondergebracht in een voldoende aantal gebieden dat groot genoeg is om een spreiding van opgaven over het curriculum te garanderen maar dat ook klein genoeg is om het geven van een buitensporig verfijnde

definitie te vermijden – wat het benadrukken van problemen gebaseerd op levensechte situaties zou tegenwerken. Elke fenomenologische categorie omvat een samenhangende verzameling verschijnselen en concepten die je kunt aantreffen binnen een veelheid aan heel verschillende situaties. Door hun aard kan elk idee gezien worden als een algemeen beeld van een gegeneraliseerde inhoudsdimensie. Dat laatste houdt in dat de categorieën of begrippen niet scherp van elkaar onderscheiden kunnen worden. Integendeel, elke categorie vertegenwoordigt een bepaald perspectief, of invalshoek, die een kern bezit, een zwaartepunt en een wat vaag en schemerig gebied dat hier en daar kan samenvallen met andere begrippen. (Voor een meer gedetailleerde beschrijving van deze vier categorieën van begrippen, zie het PISA-framework (OECD 2002)).

Hoeveelheid

Om de wereld om ons heen te organiseren is kwantificering nodig. Belangrijke aspecten van dit overkoepelende begrip zijn het begrijpen van relatieve grootte, herkennen van getalpatronen, en de vaardigheid om getallen te gebruiken die kwantificeerbare attributen voorstellen van objecten in de werkelijkheid (maten). Dit gebied omvat verder het werken met en begrijpen van getallen die we op allerlei manieren tegenkomen. Een belangrijk aspect van het begrip hoeveelheid is het kwantitatief redeneren waarvan essentiële componenten zijn het ontwikkelen en toepassen van een gevoel voor getallen (*number sense*), getallen op verschillende manieren voorstellen, rekenkundige operaties begrijpen, begrip hebben van getalgrootte, opschrijven en begrijpen van elegante berekeningen, hoofdrekenen en schattend rekenen.

Vorm en ruimte

Overall om je heen kom je patronen tegen: in gesproken woord, muziek, video, verkeer, architectuur en kunst. Vormen kunnen worden gezien als patronen: huizen, kantoren, bruggen, zeesterren, sneeuwvlokken, stadsplattegronden, klaverblaadjes, kristallen en schaduwen. Meetkundige patronen kunnen dienst doen als relatief eenvoudige modellen van allerlei (natuur)verschijnselen en het bestuderen ervan is wenselijk op alle niveaus (Grünbaum 1985). Bij het bestuderen van vormen en constructies kijken we naar overeenkomsten en verschillen als we de componenten waaruit de vorm bestaat analyseren en als we verschillende vormen herkennen in diverse representaties en in verschillende dimensies. Het bestuderen van vormen hangt nauw samen met het concept 'grasping space' (Freudenthal 1973) – de wereld waarin we leven, ademen en ons bewegen beter leren begrijpen door de ruimte om ons heen te leren kennen, te onderzoeken, en te overwinnen. Om dat te bereiken, moeten we de eigenschappen van objecten en hun onderlinge positie begrijpen; we moeten ons bewust zijn van de manier waarop we dingen waarnemen en waarom we ze zien zoals het geval is; en we moeten leren navigeren door de

ruimte en door constructies en vormen. Daarvoor is nodig dat we de relatie begrijpen tussen vormen en hun verschijning (of visuele representaties), zoals die tussen een stad en foto's en plattegronden ervan. En verder moeten we begrijpen hoe driedimensionale objecten kunnen worden afgebeeld in het platte vlak, hoe schaduwen worden gevormd en geïnterpreteerd, en wat perspectief is en hoe dit functioneert.

Veranderingen en relaties

Elke natuurlijke verschijningsvorm is onderhevig aan verandering en in de wereld om ons heen zien we een veelheid aan tijdelijke en permanente relaties tussen verschijningsvormen: organismen die veranderen terwijl ze groeien, de cyclus van de seizoenen, eb en vloed van de getijden, werkloosheidscycli, fluctuaties op de beurs. Sommige van deze veranderingen kunnen rechttoe rechtaan worden gemodelleerd door middel van wiskundige functies: lineaire functies, exponentiële, periodieke of logistische verbanden, discreet of continu. Maar veel verbanden vallen onder verschillende categorieën, en het nader analyseren van de gegevens is dikwijls essentieel om vast te stellen om welk verband het gaat. Wiskundige verbanden komen vaak voor in de vorm van een vergelijking of ongelijkheid, maar ook meer algemene verbanden (zoals equivalentie, deelbaarheid) komen voor. Denken over functies – dat betekent denken in termen van verbanden) is een van de fundamentele doelstellingen van het wiskunde onderwijs. Verbanden kunnen in verschillende representaties voorkomen, waaronder in symboolvorm, algebraïsch, grafisch, in tabelvorm of meetkundig. Daarom is het kunnen vertalen van de ene representatievorm naar de andere een kernvaardigheid bij het omgaan met wiskundige situaties.

Onzekerheid

Onze door informatie gedreven maatschappij biedt vaak een overvloed aan gegevens aan, gepresenteerd als nauwkeurig en wetenschappelijk en met een grote mate van zekerheid. In het dagelijks leven worden we echter geconfronteerd met onzekere verkiezingsresultaten, met instortende bruggen, een beurskrach, onbetrouwbare weersvoorspellingen, slechte voorspellingen van bevolkingsgroei, met economische modellen die elkaar tegenspreken en met heel veel meer manifestaties van de onzekerheid van onze wereld. Het woord onzekerheid heeft te maken met twee gerelateerde onderwerpen, gegevensverwerking en kans, verschijnselen die onderwerp zijn van de wiskundige studies statistiek en waarschijnlijkheidsberekening. Recente aanbevelingen voor schoolcurricula waren unaniem in hun aanbeveling dat statistiek en kansrekening een veel prominenter plaats zouden moeten innemen dan in het verleden het geval was (Cockroft 1982; LOGSE 1990; MSEB 1993; NCTM 1989, 2000). Specifieke wiskundige concepten en activiteiten die in dit domein belangrijk zijn, worden onder meer gevormd door het

verzamenen van gegevens, het analyseren van gegevens, het presenteren en zichtbaar maken van gegevens, waarschijnlijkheid en conclusies trekken.

De echte wereld

Hoewel we nu ‘antwoorden’ hebben op de vraag uit welke onderdelen WG is samengesteld, welke vaardigheden ervoor nodig zijn en wat wiskunde eigenlijk is, zijn we nog steeds niet in staat een antwoord te geven op de vraag welke wiskunde voor WG nodig is. Daar is een simpele reden voor: wiskundecurricula zijn vooral gericht op schoolse kennis terwijl wiskundige geletterdheid gaat over wiskunde in de echte wereld.

Een belangrijk deel van wiskundige geletterdheid is het gebruiken, doen en herkennen van wiskunde in een verscheidenheid aan situaties. De keuze van de wiskundige methodes en representaties die we gebruiken wanneer we te maken hebben met zaken die we door middel van wiskunde kunnen aanpakken hangt vaak af van de situaties waarin de problemen worden gepresenteerd. Wiskunde docenten klagen er vaak over dat leerlingen er moeite mee hebben hun wiskundige kennis toe te passen in verschillende contexten. Zoals Hughes Hallett (2001) al terecht constateerde, hebben leerlingen die geen natuurwetenschappen bestuderen vaak een hekel aan wiskundige toepassingen in natuurkundige contexten omdat ze de natuurkunde in die contexten niet begrijpen. Hierop voortbouwend denk ik dat we nader moeten bekijken of het wel wijs is om leerlingen die geen natuurkunde hebben geleerd te confronteren met contexten die meer vragen dan een basisniveau van natuurwetenschappelijke geletterdheid. Zoals al eerder werd opgemerkt hebben leerlingen veel ervaring nodig in het oplossen van problemen in verschillende situaties en contexten wanneer ze hun kennis van het ene toepassingsgebied moeten gebruiken binnen een ander toepassingsgebied (de Lange 1978). Door de nadruk te leggen op vaardigheden wordt dit proces van transfer mogelijk gemaakt: vaardigheden zijn onafhankelijk van het toepassingsgebied. Aan leerlingen moeten ‘echte’ problemen worden voorgelegd, hetzij opgaven die hen helpen te functioneren als intelligente, goed geïnformeerde burgers, hetzij opgaven die belangrijk zijn voor hun interessegebied binnen een beroep of binnen hun opleiding.

Met het woord *situatie* bedoelen we het gedeelte van de belevingswereld van de leerling waarin een bepaald probleem is ingebed. Het is handig en relevant voor het lesgeven in WG om situaties te beschrijven in termen van afstand tot de belevingswereld van de leerling (de Lange 1995; OECD 1999, 2002). Het dichtst bij de belevingswereld van de leerling staan problemen die te maken hebben met hun persoonlijk leven, de volgende is de schoolwereld (onderwijs), dan werk (beroep) en vrijetijdsbesteding, gevolgd door de buurt en de maatschappij zoals ze

daar in het dagelijks leven mee te maken hebben. Het verst verwijderd zijn situaties uit het gebied van de wetenschap. Het zou wenselijk kunnen zijn om de afstand te vergroten naarmate leerlingen ouder worden, maar niet heel precies.

Steen (2001, 9-15) gaf een indrukwekkende lijst van begrippen over gecijferdheid, die bijna allemaal een zekere ‘afstand’ tot de belevingswereld van ‘burgers’ hebben. Bij persoonlijk leven hebben we het dan, afhankelijk van de leeftijd, over spelletjes, dagelijkse bezigheden, sport, winkelen, sparen, persoonlijke relaties, financiën, stemmen, kaartlezen, tabellen lezen, gezondheid, verzekeringen enzovoort. Schoolleven heeft in dit geval te maken met de rol van wiskunde in de maatschappij, evenementen op school (bijvoorbeeld sportwedstrijden, teams, roosters), gegevens begrijpen, werken met computers enzovoort. Werk en vrije tijd hebben te maken met redeneren, gegevens en statistiek begrijpen, financiën, belasting, risico, verhoudingen, steekproeven, roosters maken, meetkundige patronen, twee- en driedimensionale representaties, budgettering enzovoort. In de buurt zien we de intelligente burger juiste beslissingen nemen, beoordelen, conclusies evalueren en in het algemeen een kritische houding aannemen – de redenering zien achter de besluitvorming.

Tenslotte bekijken we de wetenschappelijke situaties. Om als intelligent burger te kunnen functioneren moeten individuen geletterd zijn op vele gebieden, niet alleen op wiskundig gebied. Het gebruik van wetenschappelijke situaties of contexten in de wiskundeles hoeft niet beslist vermeden te worden, maar we moeten voorzichtig zijn. Wanneer we leerlingen de juiste vaardigheden proberen te onderwijzen, maar binnen de verkeerde context, creëren we een probleem in plaats van het op te lossen. Het volgende, niet wetenschappelijk verantwoorde voorbeeld, komt uit ons werk met leerlingen van de middle school (leeftijd 10 – 14 jaar) in de Verenigde Staten. De lessenserie had archeologie als context. Archeologen gebruiken soms tamelijk ongecompliceerde en onverwachte, nogal ‘subjectieve’ wiskundige methodes bij hun onderzoek, precies het soort methodes dat leerlingen van die leeftijd kunnen hanteren. De vraag was dus niet of de leerlingen de noodzakelijke wiskunde konden doen, maar of de context aantrekkelijk genoeg was in deze maatschappij met z’n korte spanningsbogen. De leerlingen waren zeer geïnteresseerd, vooral vanwege het onverwachte van wat ze leerden en de relevantie van de methodes die werden gebruikt. Wij hebben ervan geleerd dat rekening houden met de belevingswereld van leerlingen een complexe maar zeer waardevolle reis kan zijn.

Wat ons in de afgelopen vijftientig jaar over het gebruiken van wiskunde in contexten duidelijk is geworden, is dat het mogelijk is het belang van het gebruiken van wiskunde duidelijk te maken door het vak te onderwijzen bin-

nen contexten, ondanks de vele valkuilen. We merken op dat meer ervaring en onderzoek nodig zijn, maar we kunnen op basis van onze ervaringen ook opmerken dat het onderwijzen van wiskundige geletterdheid en op datzelfde moment het onderwijzen van wiskunde in contexten vrijwel zeker goed mogelijk moeten zijn.

Een kwestie van definities

Na het voorgaande lijkt het nuttig om een onderscheid te maken tussen de verschillende soorten geletterdheid zodat, in ieder geval in dit artikel, we geen zaken gelijk verklaren die niet hetzelfde zijn. Sommigen stellen bijvoorbeeld gecijferdheid gelijk aan Quantitative Literacy, anderen vinden Quantitative Literacy en wiskundige geletterdheid hetzelfde. Om onze definities functioneel te maken, leggen we een verbinding met fenomenologische categorieën.

Ruimtelijke geletterdheid (RG)

We beginnen met de eenvoudigste en het vaakst vergeten categorie, ruimtelijke geletterdheid. RG ondersteunt ons begrip van de (driedimensionale) ruimte om ons heen. Om de wereld om ons heen te begrijpen, moeten we de eigenschappen van objecten begrijpen, de relatieve positie van objecten en het effect daarvan op onze visuele perceptie, we moeten allerlei twee- en driedimensionale routes en paden vinden, de kunst van het navigeren begrijpen, snappen wat schaduwen zijn en zelfs de kunst van Escher begrijpen.

Gecijferdheid (G)

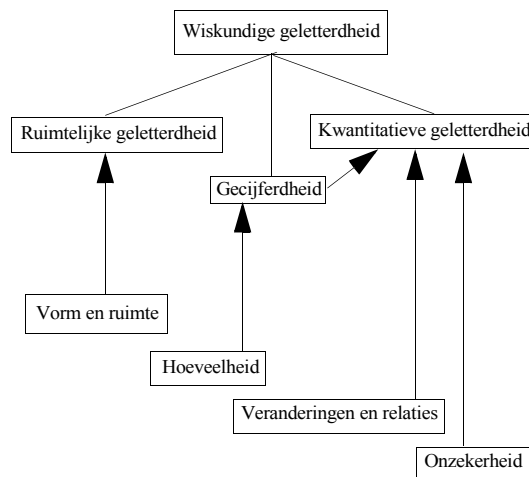
De volgende categorie van geletterdheid is vanzelfsprekend gecijferdheid, die naadloos past binnen het gebied Hoeveelheid. We kunnen bijvoorbeeld Treffers' (1991) definitie volgen die zich vooral richt op het hanteren van getallen en gegevens en het beoordelen van uitspraken die betrekking hebben op problemen en situaties binnen contexten uit de wereld om ons heen die zowel uit het hoofd berekenen als schatten nodig maken.

Kwantitatieve Geletterdheid (KG)

Wanneer we Quantitative Literacy, of KG bekijken, hebben we het in feite over een heel cluster van fenomenologische categorieën: hoeveelheid, veranderingen en verbanden of relaties en onzekerheid. Deze categorieën leggen de nadruk op wiskundige vaardigheden en het begrijpen ervan die te maken hebben met zekerheden (hoeveelheden), onzekerheden (zowel hoeveelheid als onzekerheid) en verbanden (soorten verbanden, herkennen van verbanden, veranderingen daarin en redenen voor die verandering).

Wiskundige Geletterdheid (WG)

Wij zien wiskundige geletterdheid als een soort overkoepelende geletterdheid die alle voorgaande omvat. Een visuele representatie ziet er zo uit:



Wiskundige Geletterdheid, basis- en voortgezet

Een andere mogelijk waardevolle manier om onderscheid te maken binnen het gebied van wiskundige geletterdheid is in meer detail te denken over de 'groep beoefenaars'. Wiskundig geletterd zijn betekent iets anders voor verschillende groepen als je kijkt naar wat er in de maatschappij nodig is, zowel individueel als voor het geheel. Het zou een goed idee kunnen zijn, hoewel niet iedereen zich daar gemakkelijk bij voelt, om te spreken over *basis wiskundige geletterdheid* (BWG), een niveau dat mag worden verwacht van alle leerlingen tot een jaar of vijftien, onafhankelijk van hun rol in de maatschappij. Na die leeftijd echter, als ze beginnen na te denken over hun toekomstige beroep, zouden ze afhankelijk van dat beroep, een niveau van *Voortgezette Wiskundige Geletterdheid* (VWG) moeten bereiken. Omdat er zoveel verschillende beroepswerelden zijn in de maatschappij is het definiëren van de beroepsgerelateerde VWG misschien onverstandig en wellicht onmogelijk.

Oorspronkelijke titel: 'mathematics for literacy' uit: *Quantitative Literacy, why numeracy matters for schools and colleges*, Bernard L. Madison & Lynn Arthur Steen, Princeton, New Jersey, USA 2003
Vertaald en bewerkt door Truus Dekker.

Noten

- [1] Over de auteur: Jan de Lange is hoogleraar/directeur van het Freudenthal Instituut van de Universiteit van Utrecht. Hij is onder andere voorzitter van de Mathematics Expert Group van OECD's internationale onderzoek naar geletterdheid op het gebied van taal, wiskunde en natuurwetenschappen, Programme for International Student Achievement (PISA).
- [2] Ook OECD: Organisation for Economic Cooperation and Development
- [3] Opm. vertaler: In het boekje Resultaten PISA-2003 (Cito, 2004) wordt deze definitie verkort tot: Wiskundige geletterdheid is de vaardigheid om – met gebruikmaking van wiskundige kennis – vraagstukken in een realistische context te benaderen en op te lossen.