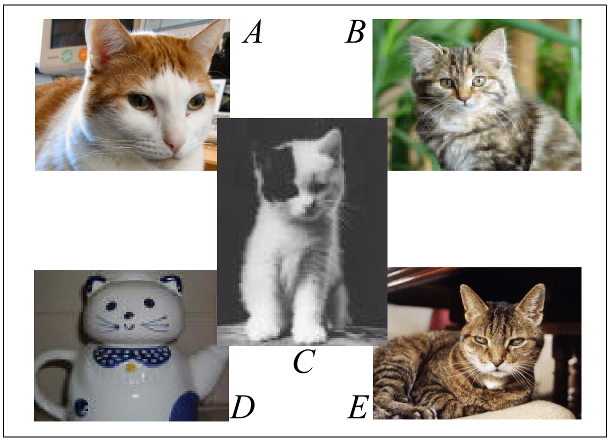
Een drietal nieuwe opgaven en een reactie op een oude. Ofwel: de recreatierubriek van **Aad Goddijn**.

Katjes, kralen en kettingen

recreatierubriek

Mooie katjes

Vijf poezen doen mee aan een schoonheidswedstrijd.
De jury moet oordelen over vijf anonieme kleine schatjes:



Een journalist van *The Cats Daily* wil de juryvoorzitter alvast de volgorde ontfutselen. Een gesprek 's ochtends vóór de prijsuitreiking:

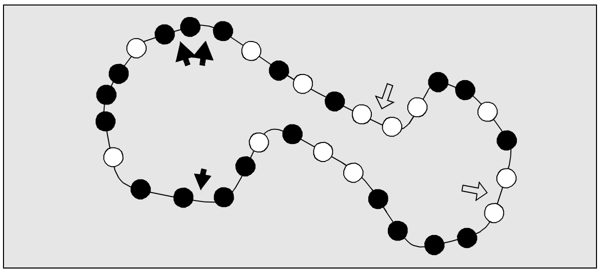
J: 'Kunt u mij de volgorde alvast zeggen?'
V: 'Natuurlijk niet, we houden de spanning tot het laatst vol!'
J: 'De volgorde *A-B-C-D-E*, is die niet al erg goed?'
V: 'Haha! U zit er geheel naast. Geen kat staat op de goede plaats, en zelfs geen twee katten staan naast elkaar in de goede volgorde.'
J: 'Nou, dan doe ik een ander gokje. Is het misschien *D-A-E-C-B* ?'
V: 'Iets beter. Twee katten staan op de goede plaats. En twee keer heeft u naburige katten in de goede volgorde staan. Maar meer verklap ik toch echt niet!'

Mooi dat de journalist de juiste volgorde in de avondeditie had!

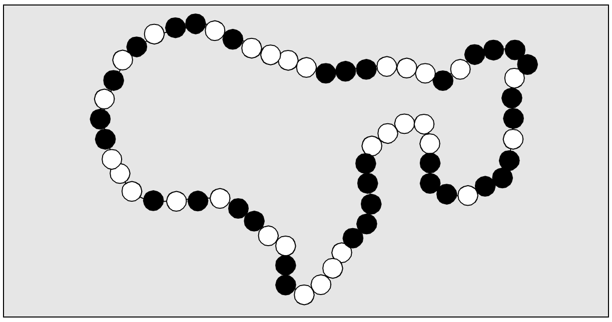
Opgave 223
Hoe kon de journalist dat uit de antwoorden van de voorzitter afleiden?

Kralen

De ketting hier bestaat uit zwarte en witte kralen. Tellen: 20 zwarte kralen (*ZK*), 13 witte kralen (*WK*).



De zwarte pijltjes wijzen elk naar een paartje van twee zwarte kralen naast elkaar. Let er dus op dat twee paartjes een kraal gemeen kunnen hebben. Bij de witte pijltjes zie je twee witte kralen naast elkaar. In deze ketting zitten 11 zwarte paren (*ZP*) en 4 witte paren (*WP*).
Kijk eens aan: 20 – 13 = 11 – 4 !
De aantallen geven we verder aan met *ZK, WK, ZP, WP*.
Ook in dit voorbeeld valt hetzelfde na te tellen:



$ZK = 34$, $WK = 31$, $ZP = 18$, $WP = 15$
En weer geldt: $ZK - WK = ZP - WP$.

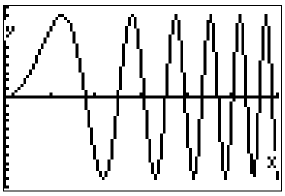
Opgave 224
Toon met een heldere redenering aan dat in elke gesloten ketting van witte en zwarte kralen geldt:

$$ZK - WK = ZP - WP$$

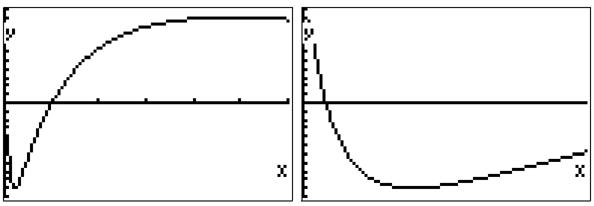
Kettingen van functies

De vorige opgaven paradeerden in de serie *Probleem van de Week* bij het Junior College in Utrecht. Oorspronkelijke bron is *The Red Book of Mathematical Problems* van Kenneth Williams en Kenneth Hardy, een Dover-pocket.

Ik hoop dat u net als de leerlingen van het Junior College met fraaiere antwoorden komt dan de formeel genoteerde massieve rekenpartijen van de auteurs.
Het Junior College is een VWO-5 klas, samengesteld uit zeer goede leerlingen van twaalf scholen uit de omgeving van Utrecht, die de exacte vakken samen doen onder leiding van een team docenten van de betrokken scholen. De Universiteit Utrecht ondersteunt met beleid en organisatie en geleidelijk ook met inhoudelijke inbreng. Het ‘gewone’ programma wordt gedaan, met in de analyse dus ook de kettingregel. Deze leerlingen stellen vooral veel eigen vragen, ook bruikbaar voor deze rubriek.
Met een klein groepje praten we in het kader van de kettingregelarij over de grafiek van $y = \sin(x^2)$. Het gaat om de sinus van u, met $u = x^2$. Als x van links naar rechts de horizontale as doorglijdt, verhoogt u fors zijn snelheid langs de u-as. Rond de u-as slingert de regelmatige golf van de sinus, als we dus naar $y = \sin(x^2)$ kijken, zien we een golf met steeds kortere golflengte, maar met dezelfde vaste amplitudo van 1. Die grafiek wordt dus in de nulpunten ook heel steil. De afgeleide $y' = 2x\cos(x^2)$ is zo gek nog niet.



De GR is een goede scheidsrechter bij onze redenaarpartij en laat het graag ook even mooi zien. Na deze intuïtieve onderbouwing van de kettingregel is $y = \sin\sqrt{x}$ voor deze leerlingen een makkie. Ze leggen mij en zichzelf dan ook een hardere noot te kraken voor: $y = \sin(\log x)$. We komen er wel uit. Dachten we. Rechts moet de golving heel erg langzaam worden. Maar bij 0 duikt de log x de negatieve diepten in, dat is voor u dus heel snel naar min oneindig. We voorspellen eensgezind vele en steile golfjes vlak naast 0. Dat wordt ook getest op de GR. We beginnen op de range [0, 6]. Dat geeft het beeld hieronder links. Inzoomen dan maar in de omgeving van $x = 0$. Naar [0, 0.001], dan moeten de golfjes toch gaan verschijnen ...



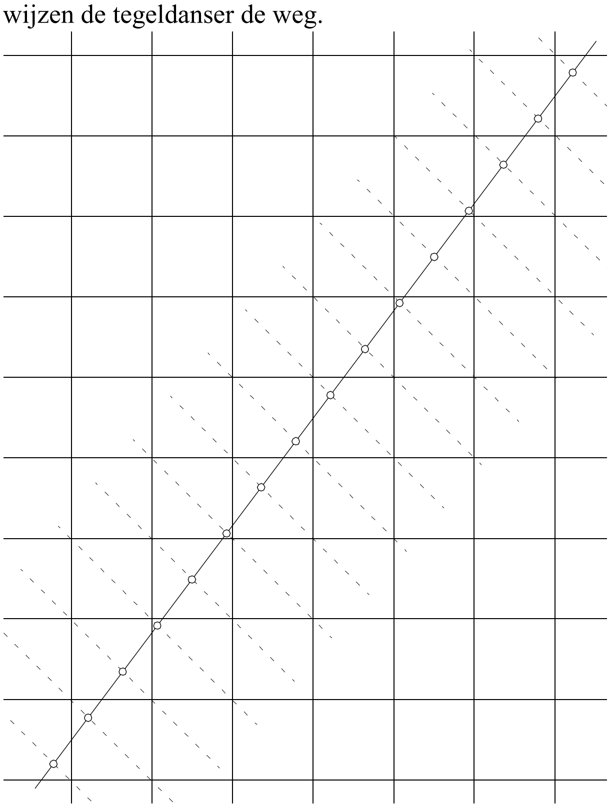
Zie rechts. Niks geen golfjes. Wij waren *flabbergasted*.

Opgave 225
Was onze globale redenering niet goed? Hoe zit het? Is er iets anders aan de hand?

Reactie en aanvulling tegeldansen

Piet Lemmens reageerde kort maar krachtig op de vragen over de tegelwandelingen in de Nieuwe Wiskrant van juni vorig jaar (nr. 23, 4 blz. 31-33).
Gegeven was een stoep, gelegd volgens het roosterpatroon in bijgaande illustratie. Een lijn die door geen enkel hoekpunt gaat is aangegeven. De vraag was:
Is het mogelijk zo over de lijn te lopen dat:
- *alle stappen even groot zijn;*
- *binnen elke tegel waar de lijn over loopt precies één stap wordt gezet.*

We denken in puntvormige tenen op wiskundige vierkanten. Natuurlijk kan dat dan. De oplossing van Piet Lemmens is in de figuur al aangegeven: teken evenwijdige diagonalen op het tegelveld. De wit aangegeven punten wijzen de tegeldanser de weg.



Piet vertelt, daarnaar gevraagd, dat hij mijn slotopmerkingen niet als ‘tip’ heeft gelezen. Daar suggereerde ik, voor het geval het tegeldansen een nachtmerrie mocht zijn geworden:
Wordt dan snel wakker. Weg met die tegels, opstapelen in de hoek. Maar kijk dan vooral nog even waar al die tussenpunten op de tegels terechtkomen.

De opgave heeft nog een aardige getaltheoretische herinterpretatie. Vat de gegeven lijn op als een beeld van de reële rechte. De doorsnijdingen met de horizontale lijnen van het rooster liggen op vaste afstanden van elkaar, ze vormen een tweezijdig oneindige rekenkundige rij van reële getallen:

$$H = \{a + qb \mid q \text{ geheel}, -\infty < q < \infty\}$$

Net zo vormen de doorsnijdingen van de verticale roosterlijnen dan een tweezijdig oneindige rekenkundige rij op onze reële rechte:

$$V = \{c + qd \mid q \text{ geheel}, -\infty < q < \infty\}$$

Kijk nu naar de vereniging van deze rijen, $H \cup V$. Als b en d geen rationale verhouding hebben, ziet die verzameling als rij van getallen er behoorlijk onregelmatig uit. Punten van V en H wisselen elkaar niet regelmatig af, soms liggen ze heel en heel erg dicht bij elkaar. Er is beslist geen periodiciteit. Toch bestaat er een tweezijdig oneindige rekenkundige rij, zeg:

$$Q = \{e + qf \mid q \text{ geheel}, -\infty < q < \infty\}$$

die in elk van de tussenintervallen van $H \cup V$ juist een getal plaatst! De constructie van hierboven toont het zonneklaar aan.
Het is niet moeilijk bij gegeven rijen H en V een tegelpatroon te maken dat 'past'. Daarmee is dit een stelling over getalrijen op zich, en het verhaal van zo-even het bewijs dat de tussenrij bestaat.
In het geval dat $a = c = 0$ moeten we bij Q ook $e = 0$ nemen. Dan valt dus een punt van H met een punt van V samen. *Nieuwe Wiskrant*-lezers van het eerste uur herkennen nu mogelijk de verwantschap met de beroemde Stelling van Beatty uit 1926, zie *Nieuwe Wiskrant* nr. 5, 3 blz. 51. Aldaar zo geformuleerd:

> Als b en d twee irrationale getallen zijn, beide groter dan nul en $\frac{1}{b} + \frac{1}{d} = 1$ geldt, dan valt in elk interval $(n, n+1)$ waarbij n een natuurlijk getal is, precies één getal uit een van de twee rijen:
>
> $b, 2b, 3b, 4b, \ldots$
>
> en
>
> $d, 2d, 3d, 4d, \ldots$.

De tegeldansbenadering geeft hiervan voor minnaars van de meetkunde een heel mooi bewijs. In de geciteerde *Nieuwe Wiskrant* staat ook het ook zeer elgante bewijs van Ostrowski uit 1927 vermeldt, dat kan ook opgezocht worden op de internetpagina's van Alexander Bogomolny: http://www.cut-the-knot.org/proofs/Beatty.shtml.

Reacties op deze rubriek: zoals altijd zeer welkom, via de slakkenpost naar de redactie of per e-mail naar ondergetekende.

Aad Goddijn, A.Goddijn@fi.uu.nl