Wat te bewijzen is (28)

Rubriek

Achtentwintig is een bijzonder nummer en dat is ‘t!
Wat is er dan zo bijzonder aan?
Dat het de som van twee derde machten ($28 = 1^3 + 3^3$) is? Maar zo bijzonder is dat niet, want het eerstvolgende getal met die eigenschap is dichtbij: 35.
Dat het een driehoeksgetal ($1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$) is? Maar zo bijzonder is dat niet, want het eerstvolgende getal met die eigenschap is niet veraf: 36.
Nee, 28 is een *volmaakt* getal, want het is gelijk aan de som $1 + 2 + 4 + 7 + 14$. Die 1, 2, 4, 7 en 14 vormen samen met 28 de club van alle delers van 28; en al sinds de dagen van de Pythagoreërs wordt een getal volmaakt genoemd als het de som is van zijn delers die kleiner zijn dan het getal zelf (ik noem dat hier *echte* delers).
Niets is volmaakt, behalve in de getallenwereld, en dat volmaakt zeer bijzonder is, blijkt om te beginnen uit het feit dat het op 28 volgende volmaakte getal 496 is en het daaropvolgende exemplaar 8128.
De Neo-Pythagoreër Nicomachos van Gerasa poneerde dat 6, 28, 496 en 8128 de eerste vier volmaakte getallen zijn en hij merkte op dat deze in de opvolgende intervallen met grenzen 1, 10, 100, 1000 en 10000 liggen.
In de *Nieuwe Wiskrant* (april 1995) schreef Niek Brokamp een zeer boeiend arikel over een experiment met zijn leerlingen van 6 VWO, die werden uitgedaagd om de eerste vijf volmaakte getallen op te sporen. Uiteindelijk vonden zij als vijfde volmaakt getal 33550336, een geweldige prestatie! En passant werd zo het vermoeden van Nicomachos dat elk interval begrensd door twee opvolgende 10-machten precies één volmaakt getal bevat, weerlegd. Het opvallende van dit projectje was niet alleen dat zo’n zuiver getallenprobleem de leerlingen blijkbaar heel erg aansprak, maar ook dat er allerlei veronderstellingen door hen werden gedaan die in de lange geschiedenis van de getaltheorie de revue zijn gepasseerd.

De formule van Euclides

Euclides, die zo’n 400 jaar voor Nicomachos leefde, had een formule ontdekt om volmaakte getallen te maken. Boek 9 van de *Elementen* eindigt met deze propositie:

> als vanaf de eenheid willekeurig veel getallen opvolgend worden verdubbeld, totdat hun som een priemgetal is en als die som vermenigvuldigd wordt met het laatste getal, dan zal de uitkomst een volmaakt getal zijn.

Toepassing van deze regel geeft achtereenvolgens:
$1 + 2$ (= 3) is priem en $3 \times 2 = 6$
$3 + 4$ (= 7) is priem en $7 \times 4 = 28$
$7 + 8$ (= 15) is niet priem
$15 + 16$ (= 31) is priem en $31 \times 16 = 496$
$31 + 32$ (= 63) is niet priem
$63 + 64$ (= 127) is priem, en $127 \times 64 = 8128$

Het bewijs dat Euclides geeft (zoals dat bijvoorbeeld in Thomas Heaths vertaling en becommentariëring van de *Elementen* is te vinden) leest nogal moeizaam en doet een mens weer eens beseffen dat wiskundige notatie er zeer toe doet.
Een moderne versie gaat als volgt.
Bewijs:
Stel $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^m = S$ en $2^m S = N$, waarbij S een priemgetal is.
Euclides wist ook (de voorafgaande propositie in zijn boek 9) dat $S = 2^{m+1} - 1$ ofwel $1 + S = 2^{m+1}$
De verzamelingen delers van S en van 2^m zijn $\{1, S\}$ en $\{1, 2, 2^2, ..., 2^m\}$. Omdat 2^m en S onderling ondeelbaar zijn is elke deler van N het product van een deler van 2^m en een deler van S .

×	1	2	2^2	...	2^m
1	**1**	**2**	$\mathbf{2^2}$	**...**	$\mathbf{2^m}$
S	$\boldsymbol{S}$	$\boldsymbol{2S}$	$\boldsymbol{2^2S}$	**...**	$\boldsymbol{2^mS}$

De som van de getallen in de grijze vakjes is gelijk aan:

$$(1+S)(1+2+2^2+\ldots+2^m) = 2^{m+1}S = 2N$$

Maar hierin is N zelf meegerekend als deler.
Aftrekking van N levert de som op van de echte delers, en die som is dus inderdaad gelijk aan N.

Wie denkt dat met Euclides’ regel en een goede computer nu moeiteloos volmaakte getallen kunnen worden geproduceerd, komt bedrogen uit. De crux zit hem in het feit dat $1 + 2^2 + ... + 2^m$ ofwel $2^{m+1} - 1$ priem moet zijn.
Allereerst betekent dit dat de exponent $m + 1$ zelf ook een priemgetal moet zijn.
Immers, stel $m + 1 = ab$ (a, b geheel en > 1).
Dan $2^{m+1} - 1 = 2^{ab} - 1 = (2^a)^b - 1$ en dit getal is zeker deelbaar door $2^a - 1$, terwijl $1 < 2^a - 1 < 2^{ab} - 1$.
Kortom: $2^{ab} - 1$ is zeker niet priem.
Priemgetallen van de vorm $2^p - 1$, ook wel Mersenne-priemgetallen genoemd, zijn echter uiterst dun gezaaid. Af en toe wordt de argeloze krantenlezer verrast door het nieuws dat er weer een grootst bekend priemgetal gevonden is. Dat is dan altijd zo’n Mersennegetal.
Zo werd zeer onlangs het 42ste Mersenne-priemgetal gevonden, namelijk $2^{25964951} - 1$, en daarmee tevens het volmaakte getal $2^{25964950}(2^{25964951} - 1)$. Dit getal dat, binair geschreven uit 25964951 enen gevolgd door 25964950 nullen bestaat, heeft tientallig ruim 15,5 miljoen decimalen. Euler bewees – vele eeuwen na Euclides – dat er geen andere *even* volmaakte getallen bestaan dan degenen die voldoen aan Euclides’ regel; omdat er nim-

mer *oneven* volmaakte getallen zijn gevonden, zijn er dus tot op het moment dat ik dit schrijf in totaal precies tweeënveertig volmaakte getallen bekend; 28 mag dus inderdaad bijzonder heten.

De regel van Euclides is compleet

Zoals gezegd, bewees Euler dat er geen andere even volmaakte getallen bestaan dan de door Euclides beschreven getallen. Hier volgt een bewijs dat afkomstig is van Dickson en iets eenvoudiger is dan dat van Euler.

Bewijs:

Stel N is volmaakt en N is even.

Dus N is van de vorm $2^m t$, waarbij t oneven is.

Stel de delers van t zijn: $1 = t_1, t_2, \ldots, t_k = t$ en stel de som van al deze delers gelijk aan T.

Omdat 2^m en t onderling ondeelbaar zijn, is elke deler van N het produkt van een deler van 2^m en een deler van t.

De delers van N staan dus in de vermenigvuldigingstabel met randgetallen $1, 2, 2^2, \ldots, 2^m$ en $t_1, t_2, \ldots, t_k$, en de som van al die producten is gelijk aan .

$$(2^{m+1} - 1)T$$

Wil N volmaakt zijn, dan moet deze som gelijk zijn aan $2N$ ofwel aan $2^{m+1}t$. Dit leidt dan tot:

$$(2^{m+1} - 1)T = 2^{m+1}t$$

waaruit volgt:

$$(2^{m+1} - 1)(T - t) = t$$

Hieruit volgt dat $T - t$ een echte deler is van t.

Dus $T - t$ is enerzijds gelijk aan de de som van alle echte delers van t, dus aan $1 + t_1 + t_2 + \ldots + t_{k-1}$ en is anderzijds zelf een van die delers.

Dus kan het niet anders of $T - t$ is gelijk aan de kleinste deler van t en dat is 1.

Substitutie in voorgaande betrekking geeft: .

$$2^{m+1} - 1 = t$$

Bovendien heeft t slechts één echte deler, dus t is een Mersenne priemgetal.

Hiermee is bewezen dat elk even volmaakt getal het product is van een Mersenne priemgetal en een macht van 2 waarvan de exponent 1 lager is dan de ‘Mersenne-exponent’. Het is eigenlijk raadselachtig dat vóór Euler geen bewijs is gegeven van de omkering van Euclides’ propositie, ja Euclides zelf zou een sluitende redenering hebben kunnen vinden als hij ernaar gezocht had.

Sommen van derde machten

Ik begon dit artikeltje met op te merken: $28 = 1^3 + 3^3$.

Dat lijkt nogal flauw, maar als je bedenkt dat:

$496 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3$ en ook dat:

$8128 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + 9^3 + 11^3 + 13^3 + 15^3$

dan wordt het toch wel andere koek.

Geloof het of niet, maar ieder even volmaakt getal, met uitzondering van het getal 6, is te schrijven als som van opvolgende oneven derde machten!

Het getal 33550336 dat door de leerlingen van Niek Brokamp na veel inspanning was gevonden, is de som van de derde machten van 1 tot en met 127. Mocht u hieraan twijfelen, raadpleeg dan bijvoorbeeld de TI 83 :

```
Sum(seq((2X+1) ^ 3 , X , 0 , 63))
                          33550336
```

Voor het bewijs van deze ‘derde-machten-stelling’ herinner ik de lezer aan een mooie formule (zie nummer 13 van deze rubriek, jaargang 20, nr. 4):

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2 = \tfrac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

Hieruit is eenvoudig een formule af te leiden voor de som van oneven derde machten. Dat gaat zo:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + (2n)^3 = \tfrac{1}{4}(2n)^2(2n+1)^2 = n^2(2n+1)^2$$

$$2^3 + 4^3 + \ldots + (2n)^3 = 2^3 \cdot \tfrac{1}{4}n^2(n+1)^2 = 2n^2(n+1)^2$$

Trek ik nu de onderste regel van de bovenste af, dan blijkt de som:

$$1^3 + 3^3 + \ldots + (2n-1)^3$$

gelijk te zijn aan:

$$n^2(2n+1)^2 - 2n^2(n+1)^2 = n^2(2n^2 - 1)$$

Substitutie van $n = 2^k$ in bovenstaande vorm geeft precies de genererende formule voor de even volmaakte vanaf 28:

$$2^{2k}(2^{2k+1} - 1)$$

Ook de in de aanhef genoemde driehoekseigenschap van 28 kan direct worden afgeleid uit zijn volmaaktheid.

De algemene vorm voor een driehoeksgetal is immers:

$$\tfrac{1}{2}n(n-1)$$

en:

$$2^{2k}(2^{2k+1} - 1) = \tfrac{1}{2} \cdot 2^{2k+1}(2^{2k+1} - 1)$$

Alle even volmaakte getallen zijn dus ook driehoeksgetallen. Alle sommen van opvolgende oneven machten trouwens ook, zoals direct volgt uit:

$$n^2(2n^2 - 1) = \tfrac{1}{2} \cdot 2n^2(2n^2 - 1)$$

Zoals terloops is opgemerkt zijn er nog nooit oneven volmaakte getallen gevonden; er wordt dan ook sterk getwijfeld aan hun bestaan. Een manier om wereldberoemd te worden is om één zo’n getal te vinden (en dat moet dan gigantisch groot zijn) of te bewijzen dat het niet bestaat.

Tot slot dit: als er lezers zijn die de enige volmaakte pincode hebben, weet dan dat ik daar jaloers op ben.

Martin Kindt, martin@fi.uu.nl