Cantor, Brouwer en Hilbert zijn de hoofdrolspelers in deze dialoog tussen de filosoof **Nico Krijn** en de wiskundige **Manuel Nepveu**. Dan moet het haast wel over het begrip ‘oneindig’ gaan. Een wiskundig paradijs of een natuurkundige hel of juist het omgekeerde....?

Het oneindige in de wiskunde

Inleiding

In dit debat staat het oneindige in de wiskunde centraal. Wie de natuurlijke getallen op een rijtje zet, beseft dat hij almaar door kan gaan. Zo komt het oneindige om de hoek kijken. Niet, of misschien niet, als zelfstandig wiskundig concept, maar in eerste instantie als blote aanduiding van een reeks handelingen waaraan geen eind komt.

Wanneer het mathematische vakgebied ‘analyse’ tot ontwikkeling komt, duikt het symbool ∞ op, elegant onder en boven sommatietekens en integraalsymbolen geschreven. De vraag is gerechtvaardigd wat de wiskundigen van de zeventiende, achttiende en begin negentiende eeuw hierbij precies gedacht hebben. Er gebeurt op het eind van de negentiende eeuw iets opvallends: het oneindige wordt door Georg Cantor opgevat als een wiskundige entiteit op zichzelf. Het oneindige wordt tot een wiskundige entiteit, waaraan ‘heuse’ wiskunde bedreven kan worden. Er ontstaat een ‘transfiniete rekenkunde’ die nauw verbonden is met de leer der verzamelingen.

Opvallend is dat er sprake is van verschillende soorten oneindigheid. De natuurlijke getallen kunnen in principe op een rijtje gezet en netjes afgeteld worden. Men kan zeggen dat men op een gegeven moment alle natuurlijke getallen beneden de 1000 miljard geteld heeft. Voor de reële getallen is dat niet waar en Cantor laat dat zien in een verbazingwekkend eenvoudig bewijs uit het ongerijmde. De oneindigheid geassocieerd met de reële getallen is een andere dan die van de ‘aftelbare’ natuurlijke getallen. De zogenaamde ‘machtigheid’ van de reële getallen is wezenlijk groter dan die van de natuurlijke.
Maar daarbij houdt het niet op. Oneerbiedig gezegd komt Cantor tot een hele dierentuin van oneindigheden. En dat brengt moeilijkheden met zich mee.

Wiskundig ingestelde filosofen en filosofisch ingestelde wiskundigen gaan in de decennia die volgen in debat over wat dit alles voor de wiskunde betekent. Sterker nog, óf het wat betekent.

Vraaggesprek

MN: Een eerste kennismaking van de mensheid met het oneindige moet al vroeg tot stand zijn gekomen. Is daar eigenlijk iets concreets over bekend?

NK: In 2000 voor Christus beschikten de Babyloniërs al over een hoog ontwikkelde wiskunde. Zij beperkten zich tot praktische problemen[1] van het dagelijks leven, en niets in het dagelijks leven heeft direct te maken met oneindigheid. Vanaf de zesde eeuw voor Christus transformeerden de Grieken de wiskunde tot een wetenschap waarbij kennis het belangrijkste doel werd; wiskunde werd een intellectuele discipline. Niet alleen de idee van oneindig groot, maar ook die van oneindig klein interesseerde de Grieken. Het oneindig kleine komt tevoorschijn bij het bepalen van oppervlakten van gekromde figuren. Van een rechthoekige figuur is de oppervlakte eenvoudig te bepalen, maar hoe bepaal je de oppervlakte van een cirkel? Het probleem staat bekend als ‘het kwadreren van de cirkel’: hoe vind je bij een gegeven cirkel een vierkant – kwadraat – dat dezelfde oppervlakte heeft? De Grieken gebruikten een ingeschreven veelhoek waarvan de oppervlakte een benadering is van die van de cirkel.

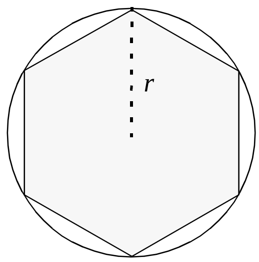

fig. 1 Een cirkel met ingeschreven veelhoek voor het bepalen van de oppervlakte

Als we het aantal zijden van de veelhoek vergroten, dan wordt de benadering verbeterd. Maar ... gaat dit proces oneindig door? Of kunnen we in een bepaald stadium stoppen en zeggen dat de veelhoek samenvalt met de cirkel? Anaxagoras is de eerste wiskundige waarvan wij weten dat hij probeerde de cirkel te kwadreren.

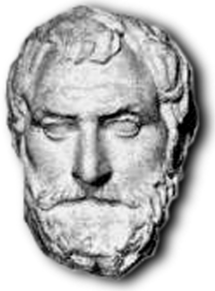

fig. 2 'Onder het kleine is er niet het kleinste en onder het grote niet het grootste, maar er is altijd iets nog kleiner en iets nog groter' Anaxagoras (circa 500-428 v.Chr)

MN: In moderne termen gesteld: het probleem van het kwadreren van de cirkel hoort thuis in de integraalrekening, in tegenstelling tot de differentiaalrekening die van toepassing is op veranderingen van krommen. Vanuit onderwijsoogpunt is het volgende interessant. De integraalrekening is in feite de oudste tak van de infinitesimaalrekening[2], tenminste, als je de pogingen van Euclides en anderen om inhouden van figuren te berekenen als een vroege vorm van integraalrekening ziet. De differentiaalrekening is zo beschouwd later ontwikkeld. In het algemeen volgt het onderwijs de ontwikkeling van een vakgebied. Omdat de moeilijkheidsgraad in de loop van de ontwikkeling toeneemt, maar ook vanwege de 'innere Logik'. Echter, de integraalrekening wordt in het huidige onderwijs behandeld na de differentiaalrekening en voor het berekenen van (Riemannse-) integralen kan dat ook niet anders. Maar dit is een zijpaadje ...

NK: Dat is een leuke observatie. Maar weer even terug naar de hoofdweg. De Grieken waren onderling verdeeld over de aard van het oneindig kleine. Er ontstonden twee rivaliserende scholen. De Eleaten geloofden in de oneindige deelbaarheid en ontkenden het bestaan van een kleinste eenheid. Zeno is een bekende voorman van deze stroming. De Pythagoreeërs daarentegen reduceerden alle problemen tot hele getallen en waren aanhangers van het atomisme. Zij waren van mening dat alles (ruimte, tijd en materie) uiteindelijk is opgebouwd uit kleine basiseenheden. De strijd tussen atomisme en continuïteit als modellen van de empirische werkelijkheid is tot op de huidige dag niet ten volle beslecht.

MN: Gauss waarschuwde ervoor dat het oneindige niet mag worden opgevat als iets dat er 'is', maar als iets dat een limietprocedure aanduidt. Hij schrijft in een brief aan een vriend dat hij protesteert tegen het gebruik van oneindigheid als iets voltooids. 'Het oneindige is slechts een wijze van spreken [..]'.[3] Volgt hieruit dat er in zijn tijd wiskundigen waren die het oneindige als een getal zagen? Was deze uitspraak, die Jaynes[4] in zijn boek over waarschijnlijkheid aanhaalt, bedoeld als een vermaning?

NK: Toch zeg ik eerst nog iets over de Grieken. Als men in de middeleeuwen sprak over 'de filosoof', dan bedoelde men Aristoteles. Deze autoriteit beschouwde oneindigheid als een onbereikbaar ideaal. Bij het aftellen van natuurlijke getallen komt men steeds verder, maar een volledige opsomming is onmogelijk, het 'getal' oneindig wordt nooit bereikt. Oneindigheid in de ogen van Aristoteles is een potentiële oneindigheid. Over het oneindig kleine had Aristoteles eenzelfde opvatting: een onbeperkt proces van voortdurende deling.

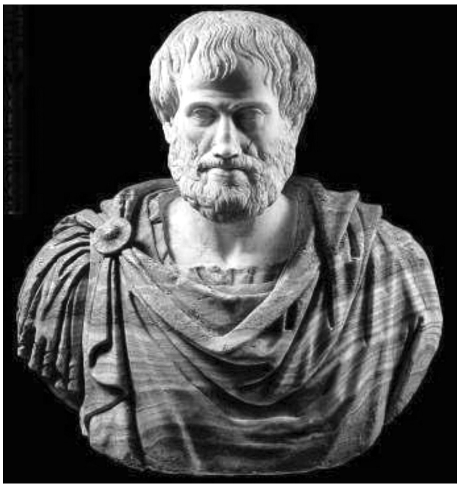

fig. 3 'Actuele oneindigheid bestaat niet' Aristoteles (384 – 322 v. Chr.)

Tot aan het midden van de achttiende eeuw was dat de gebruikelijke visie; Newton, Euler en Gauss konden er uitstekend mee overweg. De opmerking van Gauss was bedoeld als een afkeuring van het gebruik van het oneindige als was het een getal, waarvoor dezelfde rekenregels kunnen worden toegepast als voor gewone getallen. Zelfs Euler bijvoorbeeld schroomde niet te zeggen dat $\frac{1}{0}$ oneindig is, en dat $\frac{2}{0}$ tweemaal zo groot is als $\frac{1}{0}$. Cantor daarentegen accepteerde actuele oneindigheid door te benadrukken dat een verzameling – en een oneindige verzameling in het bijzonder – moet worden beschouwd als een totaliteit, te begrijpen als een object.

fig. 4 'Een verzameling is een Vele dat gedacht kan worden als een Ene' Georg Cantor (1845 – 1918)

Daar kun je natuurlijk vraagtekens bij zetten. Hoe kunnen wij met ons eindige verstand oneindigheid omvatten? Volgens de filosofische duizendpoot Bertrand Russell kunnen we dat. Als A en B verzamelingen zijn en er bestaat een bijectie[5] tussen A en B, dan zijn A en B gelijkmachtig, simpel gezegd: de verzamelingen A en B zijn even groot.

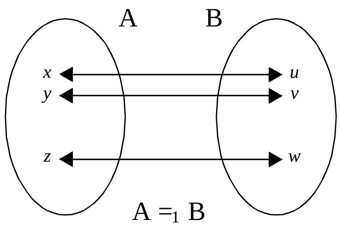

fig. 5 Een bijectie, de twee verzamelingen A en B hebben een zelfde kardinaalgetal.

Hier speelt het onderscheid tussen eindig en oneindig geen rol. Vervolgens definieerde Russell de getallen met behulp van mathematische inductie, en hij nam een oneindige verzameling als een waarvan het kardinaalgetal niet eindig is. Hij concludeerde: je begrijpt wat een 'verzameling' is, je begrijpt ook wat een 'eindige verzameling' is, dus je begrijpt ook een 'verzameling die niet eindig is'.[6] Dit begrip van verzamelingen beschouwt Russell als '[...] taken to be the sole source of our knowledge of the properties of the infinite'.[7] Begrijpen wiskundigen nu dan wat oneindig is?

MN: Als ik op je zojuist gegeven schets van de geschiedenis van het begrip oneindig terugkijk, merk ik dat er door de wiskundigen pas in de negentiende eeuw expliciet over het oneindige wordt nagedacht. Je weet dat wiskundigen soms proberen – zoals we in een vorig gesprek over filosofie en wiskunde vaststelden – begrippen te definiëren door ze terug te brengen tot iets anders dat al bekend is. In een bekend leerboek der algebra van Birkhoff en MacLane beginnen de auteurs met een definitie van een kardinaalgetal n van een verzameling in termen van het bestaan van een één op één correspondentie tussen de elementen van de verzameling en de eerste n natuurlijke getallen. Dan volgt er deze definitie: 'A nonempty set S is called finite if and only if its cardinal number is a positive integer. A set which is not empty or finite is called infinite'. De laatste zin doet precies wat Bertrand Russell verwoordde. Bovendien weten we dat het laatste deel van de definitie geen loze bewering is; de verzameling van de natuurlijke getallen N is immers niet-leeg en niet-eindig. Het oneindige wordt in verband gebracht met het bestaan van bijecties tussen (delen van) verzamelingen, en bijecties zijn dingen die we al kennen ... Met het begrippenapparaat van verzamelingen en afbeeldingen tussen verzamelingen kan dan op een 'gezonde' basis worden doorgeredeneerd en valt onderscheid te maken tussen aftelbare en overaftelbare verzamelingen.

NK: Maar daarbij komen wel wonderlijke paradoxen aan het licht. De Italiaan Galileo Galilei was het al opgevallen dat er 'evenveel' kwadraten zijn als vierkantswortels. Immers, zo redeneerde hij, elk kwadraat heeft een wortel en elke wortel heeft weer een kwadraat. Deze puzzel heeft veel wiskundigen geïntrigeerd.

fig. 6 Galileo Galilei (1564 – 1642)

1	2	3	4	5	6	7	8
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
1	4	9	16	25	36	49	64

Voor we in het oneindige duiken, hebben we twee begrippen nodig die al vluchtig ter sprake kwamen: ordinaalgetallen en kardinaalgetallen. Een ordinaalgetal meet de plaats van een object in een welgeordende rij. Een kardinaalgetal meet de grootte van een verzameling. Voor eindige getallen kan men de natuurlijke getallen gebruiken, zowel voor de ordening (eerste, tweede, derde, ...) als om de grootte van de verzameling te bepalen (bevat een element, bevat twee elementen, ...). De verzameling natuurlijke getallen N kan men op oneindig veel verschillende manieren ordenen. Met de oneindige verzameling N is één oneindig kardinaalgetal geassocieerd en vele ordinaalgetallen. Om een idee te krijgen van oneindigheid kunnen we nagaan hoever we komen met eenvoudig tellen. Cantor telde: eerste, tweede, derde ... en sloot deze oneindige rij af met de limiet-ordinaal ω (omega). Beginnend met ω telde Cantor door: $\omega + 1$, $\omega + 2$, ... eindigend met de limiet-ordinaal $\omega + \omega = \omega \cdot 2$. De eerste transfiniete getallen ontstaan door dit proces te blijven herhalen.[8] Cantor koos voor oneindigheid het symbool ω, de laatste letter uit het Griekse alfabet. Hij beschouwde deze ω als een afsluiting van de reeks eindige getallen. De omega zou verwijzen naar het bijbelboek Openbaringen 1:8 'Ik ben de alfa en de omega'.
Met de theorie van transfiniete getallen zou je in een verzameling het aantal elementen voorbij ω kunnen tellen.

MN: Ja, knappe jongens die zuivere wiskundigen, maar dit alles is wel heel erg wiskundig *l'art pour l'art* ...

NK: Heb geduld, ik ga verder, en er komen nog meer kunsten aan te pas. Cantor vermoedde aanvankelijk dat elke oneindige verzameling aftelbaar zou zijn. Hij besteedde veel tijd om dit te bewijzen. Echter, dit vermoeden bleek niet juist te zijn. De kardinaliteit van de verzameling natuurlijke getallen noemde Cantor $\aleph_0$ (alef nul) en hij toonde uiteindelijk zelf aan dat de verzameling van alle deelverzamelingen van N een grotere kardinaliteit heeft dan $\aleph_0$. Algemeen geldt dat van elke verzameling *S*, de machtsverzameling van *S* – genoteerd als $\wp(S)$ – een grotere kardinaliteit heeft dan *S*. Terzijde: dit levert meteen een leuke paradox op. Als je voor *S* de verzameling van alle verzamelingen neemt, dan bestaat er een verzameling als $\wp(S)$ die 'groter' is dan *S* (!). Het kan worden aangetoond dat $\wp(N)$ dezelfde kardinaliteit heeft als de niet-aftelbare verzameling van alle reële getallen R of als de niet-aftelbare verzameling van alle punten op een rechte lijn. Er zijn eindeloos veel kardinaalgetallen: naast de enige aftelbare kardinaal $\aleph_0$ is er de eerste niet aftelbare kardinaal $\aleph_1$, de daarop volgende $\aleph_2$, enzovoort. Om deze dierentuin te kunnen beheren, ontwikkelde Cantor tussen 1874 en 1879 een nieuwe wiskundige discipline: de verzamelingenleer. Voor een theorie over het oneindige greep hij dus niet terug op bestaande concepten, maar ontwikkelde nieuwe. Cantor heeft de puzzel van Galilei opgelost en er een grotere puzzel voor in de plaats gegeven: de continuümhypothese, die tot op de dag van vandaag niet opgelost is.[9] Volgens Aczel,[10] die verwijst naar de Joodse achtergrond van Cantor, zag Cantor de letter alef als een symbool voor God en zijn oneindigheid. Cantor vertelde dat hij trots was op zijn keuze van de letter alef als symbool voor de transfiniete getallen, aangezien de alef de eerste letter is van het Hebreeuwse alfabet. Cantor beschouwde de transfiniete getallen als een nieuw begin van de wiskunde: het begin van het actuele oneindige. Volgens Lauwerier echter introduceerde Cantor de alef omdat de gewone letters van het Romaanse en Griekse schrift veel werden gebruikt of al een vaste betekenis hadden, en de alef voorhanden was op de meeste Duitse schrijfmachines van die tijd.

MN: Elegante hoogdravendheid tegenover Hollandse nuchterheid.

NK: Laten we de zaak nuchter bekijken. Cantor stelde dat het ontkennen van actuele oneindigheid het ontkennen van irrationale getallen inhoudt, want zulke getallen – die bestaan – hebben een oneindige decimale uitbreiding. Elke eindige decimaal zou alleen een rationale benadering zijn. Hoe gaan mensen van de praktijk – fysici – om met meerdere oneindigheden? Speelt het wel een rol bij hen?

MN: Wacht even. Ik wil eerst even terug naar een vorige observatie van mij. Mijn opmerking dat Cantor het begrip oneindigheid terugbracht tot iets bekends is kennelijk onjuist. Voor de niet volledig ingevoerde eenentwintigsteeeuwer is verzamelingenleer iets dat vóór het praten over oneindig lijkt te komen, maar historisch is de ontwikkeling van de concepten kennelijk hand in hand gegaan. Hoewel? Was er niet een intuïtieve vorm van de verzamelingenleer voor Cantor?

NK: Ja, die was er, maar niet vóór Cantor. De verzamelingenleer die Cantor ontwikkelde staat nu bekend als de naïeve verzamelingenleer of de intuïtieve verzamelingenleer.[11] In 1895 ontdekte Cantor de eerste paradox in zijn theorie. Het werd duidelijk dat er iets niet klopte met de naïeve benadering van het bestaan van verzamelingen. In 1903 werden de problemen algemeen bekend. In een poging dit op te lossen werd de verzamelingenleer gereconstrueerd met een axiomatische benadering, hieruit ontstond de axiomatische verzamelingenleer.

MN: Duidelijk. Maar nu een antwoord op je vraag naar de relevantie van dit alles voor fysici. Voor de toepassingen van de wiskunde in de fysica is deze hele discussie extreem esoterisch. De problemen die in de natuurkunde bestaan met oneindig liggen op het operationele vlak, zal ik maar zeggen. Een voorbeeld. In het begin van de twintigste eeuw hadden fysici behoefte aan een functie die overal nul was, maar op één punt 'waarde' oneindig aannam en waarvan de integraal over het totale domein gelijk 1 was. Dit is de beroemde deltafunctie. Hoe wiskundigen reageerden bij de introductie van dit krankzinnige beest laat zich raden. Het vreemde was wel dat de fysici met behulp van dit wiskundige onding in hun werk prima resultaten boekten. Dit heeft ertoe geleid dat enkele wiskundigen en mathematische fysici de zaak toch maar eens nader gingen bekijken, en erachter kwamen dat een wiskundig zuivere invoering van de zogenoemde deltadistributie mogelijk is. Ik noem Schwarz en Lighthill. Maar nogmaals, dit heeft uitsluitend te maken met hoe je met zekere praktische problemen omgaat waarbij oneindig optreedt. Fysici komen het oneindige tegen in hun omgaan met N (typisch bij sommaties) en met R en zelfs R^M waarbij M een getal van de orde 10^{26} kan zijn, zoals bij de faseruimte van de statistische mechanica, om maar een voorbeeld te noemen. Het worstelen met machtigheden daarentegen is niet hun probleem, het staat ver af van hun 'noden'. Worstelen is wel gedaan door een aantal mathematen en logici. Dat weet ik.

NK: Nou en of! Er is inderdaad heel wat geworsteld na Cantor. In 1907 promoveert de Nederlander Bertus Brouwer op *Over de grondslagen der wiskunde*. Dirk van Dalen[12] schrijft: 'een klaroenstoot, dat was Brouwers dissertatie; maar wel van een eenzame in de woestijn'. Brouwer is het volledig oneens met Cantor, zijn XIIIde stelling in het proefschrift luidt: 'De tweede getalklasse van Cantor bestaat niet'. Brouwer heeft er niets op tegen om na 0,1,2,3 ... ω weer opnieuw te gaan tellen: ω, $\omega + 1$, ... en weer een groter gebied te openen. Zo kunnen we doorgaan – enzovoort – waarbij het geheel van de ingevoerde getallen aftelbaar blijft. Behalve de oneindige, bestaan geen andere machtigheden dan aftelbaar oneindig onaf, het geheel van de welgeordende getallen is aftelbaar onaf. 'Aftelbaar' betekent dat er een aftelbare groep welgedefinieerd is in aan te geven, 'onaf' betekent dat uit elke aftelbare groep nieuwe elementen af te leiden zijn die tot de verzameling in kwestie behoren. Een voorbeeld van een aftelbare onaffe verzameling is het geheel van alle definieerbare punten op het continuum. Brouwer stelt: 'Het nooit klaar komend opbouwen van een aftelbare onaffe verzameling kunnen we al voortbouwend naar opvolging afbeelden op de rij der welgeordende verzamelingen, die eveneens nooit uitgeput raakt; het begrip van gelijkmachtigheid uitbreidend, om het hier toepasbaar te houden, kunnen we zeggen: alle aftelbare onaffe verzamelingen zijn gelijkmachtig'.

fig. 7 'De tweede getalklasse van Cantor bestaat niet' Bertus Brouwer (1881 – 1966)

Brouwer beschouwt de wiskundige 'objecten' als mentale constructies. De getallenverzameling van de natuurlijke getallen bijvoorbeeld onstaat in degene die wiskunde bedrijft: begin met nul, en voeg één toe aan elk reeds eerder geconstrueerd getal. Het oneindige wordt geconstrueerd in de tijd, Brouwer haalt Aristoteles' idee van potentiële oneindigheid weer van stal: het oneindige is 'in wording', nooit actueel. Samengevat: er is één soort oneindigheid die onbereikbaar is. Wellicht dat deze benadering van het oneindige het meest de praktijk van de wiskundegebruiker benadert.

MN: Ik ben het met je laatste opmerking eens. Het symbool ∞ wordt niet gebruikt als een getal (actueel oneindig), maar als iets dat in een limietproces betekenis heeft. Zo wordt dat bij de colleges analyse ook geleerd. Ik haalde in het begin van de discussie de natuurkundige Jaynes aan, een voorvechter van de opvatting dat de waarschijnlijkheidsrekening een uitbreiding is van de logica, een manier om onvolledige kennis daarin te incorporeren. In zijn boek haalt hij fel uit naar het gebruik van het concept van de oneindige verzamelingen. Filosofisch gezegd, hij vindt het idee van het actueel oneindige abject. Hij sluit dus aan bij de methodologie die in de klassieke analyse wordt gebruikt ten aanzien van de omgang met het oneindige. Als een 'praktische' theoretische fysicus haalt hij voorbeelden aan waarbij de vreselijkste ongelukken gebeuren door een omgaan met het oneindige dat afwijkt van wat in de analyseboekjes voor eerste- en tweedejaars studenten geleerd wordt. Jaynes memoreert in appendices van zijn boek (kopen dat boek!) dat Brouwer en Hermann Weyl besefen dat de klassieke logica was ontworpen voor de toepassing op eindige verzamelingen. De toepassing op oneindige verzamelingen door logici als Cantor verdient justificatie die er niet komt. Weyl beschrijft die toepassing als: '[...] the fall and original sin of set theory, for which it is justly punished by the antinomies'. Ook Henri Poincaré moet niets van het gegoochel van de logici hebben en in zijn in het Engels vertaalde *Science and Method* geeft hij een weerwoord en schrijft: '[...] It is time that these exaggerations were treated as they deserve. I have no hope of convincing these logicians, for they have lived too long in this atmosphere'. Misschien is het in deze discussie relevant op te merken dat Poincaré en Weyl beiden niet alleen wiskundigen waren, maar dat zij ook in de fysica iets hebben betekend. Zij stonden met beide benen op de grond.

NK: Inderdaad, het werk van Cantor stond onder zware kritiek. Leopold Kronecker, die van mening was dat de natuurlijke getallen de enige werkelijke wiskundige objecten zijn, noemde Cantors resultaten 'wiskundige onzin'. Hij probeerde zelfs een publicatie van Cantor tegen te houden. Een bekende uitdrukking van Kroneker is: 'God maakte de natuurlijke getallen en al het overige is mensenwerk'. De opvattingen van Kronecker sluiten aan bij het atomisme van de Pythagoreeërs. In de geschiedenis van de filosofie is het opvallend hoe vaak men terug grijpt op oude concepten.
Poincaré daagde Cantor uit te bewijzen dat R groter is dan N. Hij vond dat Cantor alleen aangetoond had dat we geen methode kunnen ontwerpen waarmee natuurlijke getallen gepaard kunnen worden aan reële getallen. Het is mogelijk dat R geen echte verzameling is, doordat de onhandelbare reële getallen zich niet laten groeperen in een gedetermineerd geheel. Zojuist bracht je Hermann Weyl ter sprake. Recent onderzoek van Dennis Hesseling[13] heeft aangetoond dat het bekende grondslagendebat in de wiskunde in gang werd gezet door een publicatie van Weyl. Deze plaatste in 1921 het thema over het 'wiskundige bestaan' definitief op de agenda. Weyl, die onder David Hilbert studeerde, werd een van de eerste aanhangers van Brouwers intuïtionisme. Hilbert noemde Cantors schepping een 'paradijs'. Volgens Hilbert lieten recente wetenschappelijke ontwikkelingen geen ruimte voor oneindigheid. Van een vloeistof krijgen we de indruk dat deze onbeperkt deelbaar is, en dat de kleinste delen ervan dezelfde eigenschappen vertonen als het geheel doet. Maar de moderne wetenschap heeft grenzen aan de deelbaarheid ont-

dekt. In plaats van het oude principe *natura non facit saltus* kunnen we het tegendeel stellen, namelijk, de natuur maakt wel sprongen. Euclidische meetkunde leidt noodzakelijk tot het postulaat dat ruimte oneindig is. Ofschoon deze meetkunde een consistent conceptueel systeem is, volgt daar niet uit dat de werkelijkheid Euclidisch is.

MN: Wacht even. Hilbert haalt resultaten uit de fysica aan om iets over het oneindige te zeggen? Dat vind ik voor een wiskundige nogal kras. Kijk, dat fysici een bepaald oneindigheidsbegrip van wiskundigen gebruiken dan wel naast zich neerleggen, is te begrijpen en oké. Zij zijn de gebruikers, het is hun legitieme keuze. Maar dat een wiskundige resultaten uit de natuurkunde gebruikt als opstapje naar het oneindige?!

NK: Ja dat doen ze, Hilbert gebruikt de resultaten uit de fysica om aan te tonen dat oneindigheid in de fysieke wereld niet aanwezig is. Tegelijkertijd onderkent hij de oneindigheid in de wiskundige wereld. Cantors 'paradijs' blijkt niet een aards, maar een wiskundig paradijs te zijn. De resultaten uit de fysica zijn inderdaad een 'opstapje', zoals je zegt, naar het rijke domein van de wiskunde. Einstein heeft volgens Hilbert aangetoond dat we de Euclidische meetkunde moeten opgeven. Hij is van mening dat materie en energie niet onbeperkt deelbaar zijn. De werkelijkheid is eindig, zowel in het groot als in het klein. Toch speelt het oneindige een belangrijke rol in ons denken als onontkoombaar concept. Als voorbeeld geeft Hilbert een eenvoudige formule uit de getaltheorie:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} .$$

Voor n mogen we elk natuurlijk getal substitueren. Deze formule bevat impliciet oneindig veel proposities. Het lijkt erop dat het oneindige een interne aangelegenheid is van de wiskunde.

fig. 8 'Wir müssen wissen. Wir werden wissen' David Hilbert (1862 – 1943)

Hilbert verklaarde dat aan alle wetenschappelijk denken een bepaalde, zeer evidente soort van redeneren ten grondslag ligt. Deze redeneringen zijn finitistisch van aard. Een bewering als 2 + 3 = 5 behoort tot het finitistische deel van de rekenkunde, Goldbachs vermoeden – ieder even getal groter dan twee is de som van twee priemgetallen[14] – kennelijk niet. Een probleem is hoe binnen het finitistisch deel van de rekenkunde een zin toegekend kan worden aan het niet-finitistische deel. De wiskunde moet geformuleerd worden als een formele axiomatische theorie. Met behulp van finitistische middelen moet bewezen worden dat deze theorie vrij is van contradicties. Het consistentiebewijs mag op geen enkele wijze het bestaan van het actueel oneindige gebruiken. Er is een analogie met de Euclidische meetkunde: door een handige interpretatie kunnen uitspraken over punten in het oneindige herleid worden tot uitspraken over gewone punten en lijnen. De punten in het oneindige heten de ideale punten en de punten van het vlak de reële punten. In een bewijs over reële punten kunnen de stappen waarin ideale punten voorkomen geëlimineerd worden. Analoog heten in de rekenkunde de finitistische uitspraken de 'reële uitspraken' en de overige de 'ideale uitspraken'. De toespraak uit 1925 waarin Hilbert deze ideeën presenteert, is gepubliceerd onder de titel *Über das Unendliche* en sedertdien is dit lezenswaardige artikel in veel bloemlezingen opgenomen. Hilbert heeft dus het domein van het oneindige behoorlijk ingeperkt: de fysieke wereld is eindig, het oneindige lijkt alleen voor te komen in de wiskunde. Ideale objecten mogen alleen worden toegelaten tot de wiskunde als aangetoond kan worden dat deze onschadelijk zijn, dat wil zeggen ons niet in staat stelt een contradictie, zoals 0 = 1, te bewijzen. Het oneindige wordt als het ware omzeild. Deze wiskundige staat met beide benen op de grond. Met hem moet je door één deur kunnen.

MN: Als ik het voorgaande samenvat, komt het er nu op neer dat 1) Cantor met het actueel oneindige aan de slag gaat als een 'tastbare' grootheid; 2) Brouwer daar niets van moet hebben omdat het wiskunde bedrijven voor hem een proces is waarin het oneindige nooit daadwerkelijk grijpbaar is; 3) Hilbert het oneindige wel binnen de wiskunde erkent, maar dat oneindige in zijn wiskundig handelen slechts beperkt toelaat. Het aardige is dat hier een fundamenteel verschil van inzicht tussen deze grootheden duidelijk wordt, dat consequenties heeft voor hun handelen. Het gaat hier niet om een leunstoeldiscussie zonder enige consequentie voor het wiskundige doen en laten van deze mannen. Bij alle veranderingen die in het wiskundeonderwijs op middelbare scholen hebben plaatsgevonden in de laatste 30 – 35 jaar, is er voorzover ik weet nooit voor gekozen om het oneindige op het lesprogramma te zetten. Als geschiedkundig thema zou het eigenlijk wel interessant zijn: laten zien dat filosofische opvattingen gevolgen hebben voor je handelen, ook – of misschien juist – in de wiskunde. Een ideetje voor de volgende hervormingsronde?

Manuel Nepveu, Nico Krijn, TNO, Utrecht

Noten

[1] Naast de wiskunde met praktische toepassingen beoefenden zij een recreatieve wiskunde, waarmee zij onder andere kwadratische vergelijkingen oplosten.

[2] Infinitesimaalrekening wordt ook wel analyse genoemd.

[3] '[...] façon de parler [...]'

[4] Janes, E.T., (2003).

[5] Als f een bijectie is van verzameling A naar verzameling B, dan brengt f een 1-1 correspondentie tot stand tussen de elementen van A en B: bij elk $a \in A$ hoort precies één $b \in B$ met $b = f(a)$, en bij elke $b \in B$ hoort precies één $a \in A$ met $a = f^{-1}(b)$.

[6] Formeler uitgedrukt: volgens het theorema van Dedekind is verzameling S oneindig, alleen en alleen dan als er een echte deelverzameling bestaat van S die dezelfde kardinaliteit heeft als S.

[7] Lavine, S., (1994).

[8] Er zijn twee principes voor het genereren van ordinaalgetallen:

1. Vanuit ordinaalgetal a is het volgende ordinaalgetal $a + 1$ te vinden.
2. Als er een stijgende rij ordinaalgetallen is, dan is lim(a) het laatste ordinaalgetal dat groter is dan alle a's.

Op basis van het tweede principe ontstaat na een lege rij het eerste ordinaalgetal 0. Hierop wordt het eerste principe herhaald toegepast om de ordinaalgetallen 1,2,3,4, ... n te vormen. De lim(n) van deze stijgende rij is ω.. . Door het eerste beginsel opnieuw toe te passen, onstaat de rij ω, $\omega + 1$, $\omega + 2$, ... $\lim(\omega + n) = \omega + \omega = \omega \cdot 2$.
Zo ontstaan de eerste transfiniete getallen:
$1, 2, 3 \ldots \omega$
$\omega + 1, \omega + 2, \ldots \omega + \omega (= \omega\cdot 2)$
$\omega\cdot 2 + 1, \omega\cdot 2 + 2, \omega\cdot 2 + 3, \ldots \omega\cdot 2 + \omega (= \omega\cdot 3)$
$\omega\cdot 3 + 1, \omega\cdot 3 + 2, \ldots \omega\cdot 4, \ldots \omega\cdot 5, \ldots \omega\cdot\omega (= \omega^2)$
$\omega^2 + 1, \omega^2 + 2, \ldots \omega^2 + \omega$
$\omega^2 + \omega + 1, \omega^2 + \omega + 2, \ldots \omega^2 + \omega\cdot 2$
$\omega^2 + \omega\cdot 2 + 1, \omega^2 + \omega\cdot 2 + 2, \ldots \omega^2 + \omega\cdot 3$
$\omega^2 + \omega\cdot 3 + 1, \omega^2 + \omega\cdot 3 + 2, \ldots \omega^2 + \omega^2 (= \omega^2\cdot 2)$
$\omega^2\cdot 2 + 1, \omega^2\cdot 2 + 2, \ldots \omega^2\cdot 2 + \omega (= \omega^2\cdot 3)$
$\omega^2\cdot 3 + 1, \omega^2\cdot 3 + 2, \ldots \omega^2\cdot\omega (= \omega^3)$
$\omega^3 + 1, \ldots \omega^4, \ldots \omega^5, \ldots \omega^\omega$
ω exp ω...ω exp ω exp ω...ω exp ω exp ω exp ω... ${}^{\omega}\omega$
(let op dat $\omega\cdot 2 = \omega + \omega$,
maar $2\cdot\omega = 2 + 2 + 2 + \ldots = \omega$)

[9] Cantors continuümhypothese (CH) is het vermoeden dat 2exp $\aleph_0 = \aleph_1$. Cantor en anderen probeerden CH te bewijzen. Door het werk van Gödel en Cohen werd duidelijk dat CH noch kan worden bewezen noch kan worden weerlegd op basis van de axioma's van de verzamelingenleer (ZFC). De vraag of CH waar is of niet blijft open.

[10] Aczel, A.D., (2000).

[11] Intuitive set theory or naive set theory.

[12] Dalen, D. van, (2001).

[13] Hesseling, D.E., (2003)

[14] Goldbachs vermoeden in predikaatlogica luidt: $\forall x \exists y \exists z((x = \text{even} \wedge x > 2 \wedge \text{Priem}(y) \wedge \text{Priem}(z)) \leftrightarrow x = y + z)$.
Tot op heden is het niet gelukt dit vermoeden deductief te bewijzen.

Wiskunde Scholen Prijs 2006

Ook als u zelf denkt dat u 'niets bijzonders' doet op school, kan uw school in aanmerking komen voor het winnen van de Wiskunde Scholen Prijs. Deze prijs is ingesteld om scholen te stimuleren met hun sterke punten op het gebied van wiskunde-onderwijs naar buiten te treden.

Alle scholen voor voortgezet onderwijs kunnen, in drie categorieën (onderbouw, bovenbouw VMBO, klassen 3 t/m 6 HAVO/VWO), meedingen naar deze prijs. In iedere categorie is een prijs van € 1000 euro te winnen.

Meer informatie op www.wiskundescholenprijs.nl

We zien uw inzending met belangstelling tegemoet!

Contactpersoon: Dédé de Haan (wiskids@fi.uu.nl)

Aankondiging conferentie Wiskunde en ICT 2006

Op donderdag 20 april 2006 vindt voor de vijfde keer de conferentie 'Wiskunde en ICT' plaats. Deze dag wordt gezamenlijk georganiseerd door APS en het Freudenthal Instituut en vindt in Utrecht plaats. Dit jaar richten we ons op HAVO- en VWO-docenten (zowel onder- als bovenbouw).
Doelstelling van de conferentie is een update te geven van de ontwikkelingen op ICT-gebied voor het wiskunde-onderwijs met ook aandacht voor de relatie met science-onderwijs.
De deelnemers krijgen een beeld van de stand van zaken, kunnen ervaringen uitwisselen, kennis maken met (nieuwe) ICT, bijpraten en zelf ervaring opdoen. De conferentie opent met een plenaire inleiding, gevolgd door drie rondes met werkgroepen, waarin deelnemers ook zelf aan de slag kunnen. De werkgroepen zijn ingedeeld naar 'direct in en uit de klas', 'leeromgevingen en minicursus', 'nieuwe ontwikkelingen'.

Meer informatie volgt dit najaar en in het vroege voorjaar. Zet de datum vast in uw agenda en blijf ontwikkelingen volgen op de website: www.fi.uu.nl/ict/2006