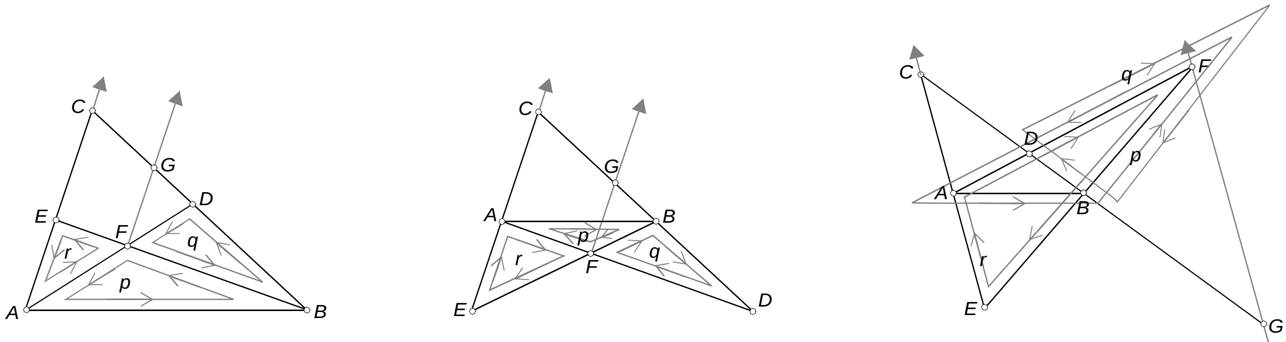
In eerdere edities van *Wat te bewijzen* is spelen de stellingen van Ceva en Menelaos een rol. **Louis Maassen** gaat met behulp van gerichte lijnstukken en geörienteerde oppervlakken op zoek naar alternatieve bewijzen en toepassingen daarvan.

Wat ook te bewijzen is



1.1 $p, q, r > 0$ *1.2* $p, q, r < 0$ *1.3* $p > 0$; $q, r < 0$

fig. 1

Inleiding

In de afleveringen (23) en (24) van *Wat te bewijzen is* vertelt Martin Kindt over de stellingen van Ceva, Menelaos, Pappos, Desargues. Hij stelt in (24) voor om die van Ceva en Menelaos te formuleren met gebruikmaking van ‘gerichte lijnstukken’: hij bereikt ermee dat die stellingen gelden voor een grotere klasse dan die waartoe die van Ceva in (23) beperkt bleef; bovendien dat sommige optredende ‘als ..., dan ...’ vervangen kunnen worden door: ‘... dan en alleen dan als ...’.
In (23) verwijst hij naar ‘een mooi inzichtelijk bewijs’ dat te vinden is in Coxeter & Greitzer: *Geometry revisited*, 1967. De auteurs laten dat bewijs vergezeld gaan door slechts één figuur: een waarbij het snijpunt van de drie ‘cevianen’ binnen de gegeven driehoek ligt. Maar zij werken er zo nauwkeurig mee met de volgorden waarin zij de uiteinden van de lijnstukken en de hoekpunten van de driehoekige vlakstukken vermelden, dat je sterk de indruk krijgt dat zij *gerichte* lijnstukken en *geörienteerde* oppervlakken in gedachten hebben ...

Wie zal zeggen hoe Coxeter en Greitzer Martin Kindts ‘oppervlakkig probleem’ in (24) zouden hebben opgelost? Mij komt het onwaarschijnlijk voor dat zij het zouden hebben gedaan op de manier van Martin Kindt. Ik houd het op zoiets als in figuur 1.1, 1.2 en 1.3.

Eerst een paar afspraken over de notatie.
Met $\boldsymbol{ABF}$ bedoel ik: de *geörienteerde* oppervlakte van het vlakstuk ABF; zeg: linksomlopende hebben positeve, rechtsomlopende negatieve oppervlakten.
$\overline{AB}$ staat voor de (hele) lijn door A en B.
Het *gerichte* lijnstuk van A naar B noteer ik als AB.

Zeg: $p = \boldsymbol{ABF}$; $q = \boldsymbol{BDF}$, $r = \boldsymbol{EAF}$.
En: telkens de lijn door F evenwijdig met $\overline{AC}$ snijdt $\overline{BC}$ in G.

Dan: $$\frac{CE}{GF} = \frac{BE}{BF} = \frac{\boldsymbol{ABE}}{\boldsymbol{ABF}} = \frac{(\boldsymbol{ABF} + \boldsymbol{AFE})}{\boldsymbol{ABF}} = \frac{p+r}{p};$$

$$\frac{GF}{CA} = \frac{DF}{DA} = \frac{\boldsymbol{BDF}}{\boldsymbol{BDA}} = \frac{q}{p+q}$$

En dus: $$\frac{CE}{CA} = \frac{CE}{GF} \cdot \frac{GF}{CA} = \frac{q \cdot (p+r)}{p \cdot (p+q)}$$ en

$$\frac{EA}{CA} = \frac{(EC + CA)}{CA} = \frac{EC}{CA} + 1 = \frac{-CE}{CA} + 1 = \frac{p^2 - qr}{p(p+q)}$$

En dus: $$\frac{\boldsymbol{BCA}}{\boldsymbol{BEA}} = \frac{CA}{EA} = \frac{p(p+q)}{p^2 - qr}$$

zodat: $$\boldsymbol{ABC} = \frac{p(p+q)(p+r)}{p^2 - qr}$$

NB $$p^2 - qr = 0 \Leftrightarrow \frac{p}{r} = \frac{q}{p} \Leftrightarrow \frac{BF}{FE} = \frac{DF}{FA} \Leftrightarrow \overline{BC} \,//\, \overline{CA}$$
(C oneigenlijk punt zijnde).

Het bewijs dat Coxeter en Greitzer geven van de stelling van Ceva, en dat Martin Kindt in (23) – mijns inziens geheel terecht – heel toegankelijk vindt voor VWO-leerlingen, verloopt in sophisticated vorm aldus (zie figuur 2):

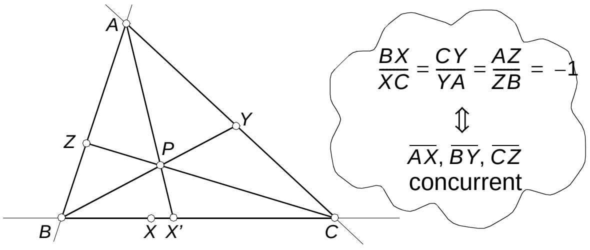


fig. 2

Laat X, Y en Z punten zijn op resp. $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ en $\overline{AB}$.

P is het snijpunt van $\overline{BY}$ en $\overline{CZ}$; X' dat van $\overline{BC}$ en $\overline{AP}$.

Dan: voor alle X van $\overline{BC}$, uitgezonderd B en C:

$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB} = -1 \Leftrightarrow \frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB} = \frac{\boldsymbol{ABP}}{\boldsymbol{BAP}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB} = \frac{\boldsymbol{ABP}}{\boldsymbol{ACP}}\cdot\frac{\boldsymbol{ACP}}{\boldsymbol{BCP}}\cdot\frac{\boldsymbol{BCP}}{\boldsymbol{BAP}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB} = \frac{\boldsymbol{ABP}}{\boldsymbol{ACP}}\cdot\frac{\boldsymbol{BCP}}{\boldsymbol{BAP}}\cdot\frac{\boldsymbol{ACP}}{\boldsymbol{BCP}} \quad (\#)$$

$$\Leftrightarrow \frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB} = \frac{\boldsymbol{ABX'}}{\boldsymbol{ACX'}}\cdot\frac{\boldsymbol{BCY}}{\boldsymbol{BAY}}\cdot\frac{\boldsymbol{ACZ}}{\boldsymbol{BCZ}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB} = \frac{\boldsymbol{ABX'}}{\boldsymbol{ACX'}}\cdot\frac{\boldsymbol{BCY}}{\boldsymbol{BAY}}\cdot\frac{\boldsymbol{CAZ}}{\boldsymbol{CBZ}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB} = \frac{BX'}{CX'}\cdot\frac{CY}{AY}\cdot\frac{AZ}{BZ}$$

$$\Leftrightarrow X = X' \quad \text{en} \quad \frac{BX'}{CX'}\cdot\frac{CY}{AY}\cdot\frac{AZ}{BZ} = -1$$

$$\Leftrightarrow \overline{AX}, \overline{BY}, \overline{CZ} \text{ zijn concurrent}$$

(Coxeter en Greitzer maken geen melding van een Ceva-configuratie met parallelle cevianen.)

Opmerking: door alleen verhoudingen van gerichte lijnstukken of georiënteerde vlakstukken te laten optreden, vermijd ik de lengten zelf (van zulke lijnstukken) en de oppervlakten zelf (van dergelijke vlakstukken) als getallen te zien: in het scalairenlichaam van de onderhavige meetkundige structuur treden slechts verhoudingen van zulke grootheden op: je hoeft niet telkens naar de gekozen eenheidsvector op de lijn $\overline{BC}$ (zeg $\boldsymbol{e}$) te verwijzen; immers BX/XC betekent voor wie aan de gerichte lijnstukken (vectoren) BX en XC getallen toekent, niets anders dan $\frac{BX}{\boldsymbol{e}} / \frac{XC}{\boldsymbol{e}}$.

Wie de moeite neemt het hierbovenstaande bewijs van Ceva-en-zijn-omgekeerde te lezen, merkt op dat bij de overgang (#) expliciet gebruik wordt gemaakt van de commutativiteit van het scalairensysteem.

Het was Martin Kindts mededeling in (24): ‘*De stelling van Menelaos wordt vooral toegepast bij het bewijzen van de collineariteit van drie punten. Zo kan men er de beroemde incidentiestellingen van Pappos en Desargues uit afleiden en nog veel meer moois*’ die mij heeft geïnspireerd tot deze bijdrage aan de *Nieuwe Wiskrant*. Martin Kindt heeft daarmee groot gelijk: hij bevindt zich in het excellente gezelschap van Coxeter en Greitzer. Maar er blijft een interessant fenomeen onbelicht: wie rekening houdt met het bestaan van meetkundige structuren waarvan het scalairensysteem niet commutatief is, kan niet uit ‘Menelaos’ de stelling van Pappos bewijzen: die stelling is nu juist equivalent met die commutativiteit.

De bewijzen van ‘Menelaos’ en van ‘Ceva’ die je in Molenbroek/Wijdenes (en in schoolmeetkundeboeken van het VHMO van de eerste zeven, acht decennia van de vorige eeuw) aantreft, verlopen langs de volgende wegen (zie figuur 3 en 4):

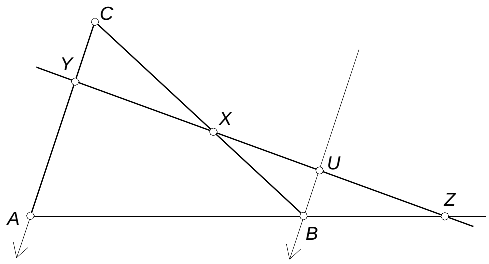


fig. 3

$$\frac{BX}{CX}\cdot\frac{CY}{AY}\cdot\frac{AZ}{BZ} = \frac{BU}{CY}\cdot\frac{CY}{AY}\cdot\frac{AY}{BU} = \frac{BU}{BU} = 1$$

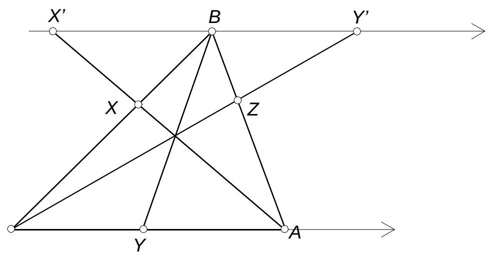


fig. 4

$$\frac{BX}{CX}\cdot\frac{CY}{AY}\cdot\frac{AZ}{BZ} \overset{(*)}{=} \frac{BX'}{CA}\cdot\frac{Y'B}{X'B}\cdot\frac{AC}{BY'}$$

$$\overset{(**)}{=} \frac{BX'}{CA}\cdot\frac{CA}{Y'B}\cdot\frac{Y'B}{X'B} = \frac{BX'}{X'B} = -1$$

Er behoeven geen factoren verwisseld!

Bij (∗∗) zijn duidelijk twee factoren verwisseld; maar ook bij (∗) is de commutativiteit gebruikt. Molenbroek/Wijdeners geeft nog twee bewijzen: bij het ene beroepen zij zich op Menelaos en verwisselen zij factoren, het andere is vrijwel gelijkluidend met dat van Coxeter/Greitzer.

Hoezo commutativiteit bij (*)?

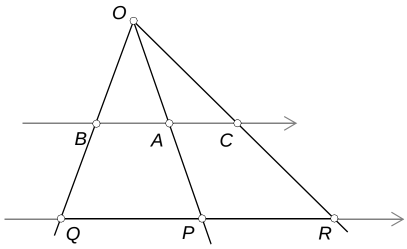


fig. 5

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AB}{PQ}\cdot\frac{PQ}{PR}\cdot\frac{PR}{AC} = \frac{OA}{OP}\cdot\frac{PQ}{PR}\cdot\frac{OP}{OA} =$$

Als nu maar: $\frac{PQ}{PR}\cdot\frac{OP}{OA} = \frac{OP}{OA}\cdot\frac{PQ}{PR}$,

dan hebben we: $\frac{AB}{AC} = \frac{PQ}{PR}$.

In figuur vijf is de ‘kleine Pappos’ verborgen; ik bedoel er de volgende stelling (of: het volgende axioma) mee (figuur 6):

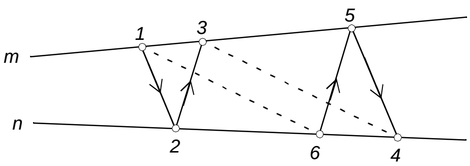


fig. 6

ALS m, n twee lijnen zijn en
1, 3, 5 *punten van m (en niet van n) en*
2, 4, 6 *punten van n (en niet van m) en*
lijn 12 // *lijn* 45 *en lijn* 23 // *lijn* 56,

DAN lijn 34 // *lijn* 61

Teken nu in figuur 5 de verbindingslijn van B en R en bovendien de lijn door A, evenwijdig met $\overline{OR}$, die $\overline{BR}$ (zeg:) in S snijdt, dan ontstaat figuur 7:

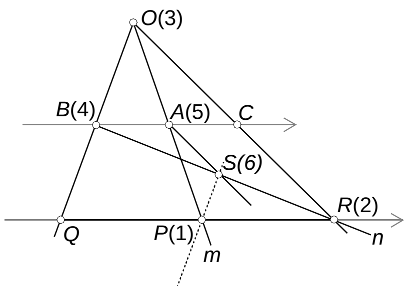


fig. 7

Noem nu $\overline{OP}$: ‘m’ en $\overline{BR}$: ‘n’.
Zeg: (1, 3, 5): = (P, O, A) en (2, 4, 6): = (R, B, S).
Pas de kleine Pappos toe; we vinden: lijn 34 // lijn 16,

dat wil zeggen $\overline{OB}$ // $\overline{PS}$.

En dan: $\frac{AB}{AC} = \frac{SB}{SR} = \frac{PQ}{PR}$.

We kunnen, vertrouwend op de kleine Pappos, de tekst bij figuur 5 uitbreiden tot:

$$\frac{PQ}{PR} = \frac{AB}{AC} = \frac{AB}{PQ}\cdot\frac{PQ}{PR}\cdot\frac{PR}{AC} = \frac{OA}{OP}\cdot\frac{PQ}{PR}\cdot\frac{OP}{OA}$$

en dus:

$$\frac{PQ}{PR}\cdot\frac{OA}{OP} = \frac{OA}{OP}\cdot\frac{PQ}{PR}$$

Conclusie

Uit de kleine Pappos volgt de stelling **CPP** (**C**entrale **P**rojectie op **P**arallellen):

Voor elke twee drietallen van punten {A, B, C} en {P, Q, R}, zoals in figuur 5, geldt:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{PQ}{PR}$$

.Omgekeerd volgt uit **CPP** *de kleine Pappos.*

Zie figuur 8.

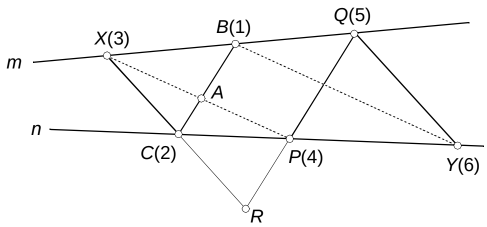


fig. 8

A is de projectie van P op BC vanuit X
R is de projectie van C op PQ vanuit X
Dan (volgens **CPP**): $\frac{AB}{AC} = \frac{PQ}{PR}$; ook: $\frac{PQ}{PR} = \frac{PY}{PC}$

dus: $\frac{AB}{AC} = \frac{PY}{PC}$ en dus: $\overline{34} = \overline{AP}$ // $\overline{BY} = \overline{16}$.

Duidelijk is ook dat uit **CPP** de commutativiteit van de vermenigvuldiging van scalairen volgt. Laat {A, B, C} en {P, Q, R} maar twee collineaire puntendrietallen zijn. Kies O buiten $\overline{AB}$ zodat $\overline{OA}$ niet evenwijdig is met $\overline{PQ}$; trek door O de lijn parallel met $\overline{PQ}$; construeer parallellogrammen $QPOQ'$ en $RPOR'$; dan: $\frac{OQ'}{OR'} = \frac{PQ}{PR}$; beeld met de parallelprojectie op $\overline{OA}$ en // $\overline{Q'A}$ het rijtje (O, Q', R) af op het rijtje (O, A, A') ; trek door A' de lijn parallel met $\overline{AB}$; noem zijn snijpunten met $\overline{OB}$ en $\overline{OC}$ respectievelijk B' en C'. Zie figuur 9.

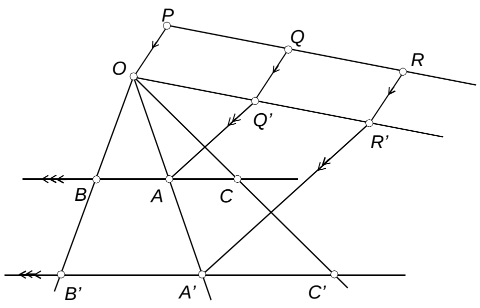


fig. 9

We hebben nu:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AB}{A'B'} \cdot \frac{A'B'}{A'C'} \cdot \frac{A'C'}{AC}$$
$$= \frac{OA}{OA'} \cdot \frac{AB}{AC} \cdot \frac{OA'}{OA}$$
$$= \frac{PQ}{PR} \cdot \frac{AB}{AC} \cdot \frac{PR}{PQ}$$

en dus:

$$\frac{AB}{AC} \cdot \frac{PQ}{PR} = \frac{PQ}{PR} \cdot \frac{AB}{AC}$$

Terug naar ‘Menelaos’ en ‘Ceva’

In iii. is gebleken dat voor Menelaos geen commutativiteit wordt vereist, dat wil zeggen geen kleine Pappos, geen **CPP**. Maar ook Ceva kan het zonder stellen! Zie figuur 10 en 11.

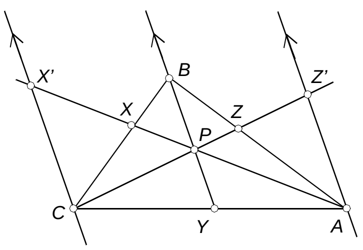


fig. 10 Concurrente cevianen

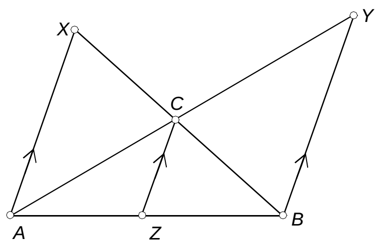


fig. 11 Parallelle cevianen

In figuur 10: Trek parallellen met $\overline{BY}$ door A en door C; de snijpunten met $\overline{AX}$ en $\overline{CZ}$ zijn: X' en Z'.
Dan:

$$\frac{XB}{XC} = \frac{PB}{X'C} \quad , \quad \frac{YC}{YA} = \frac{PC}{PZ'} = \frac{X'C}{AZ'} \quad , \quad \frac{ZA}{ZB} = \frac{Z'A}{PB} = \frac{AZ'}{BP}$$

en $$\frac{PB}{X'C} \cdot \frac{X'C}{AZ'} \cdot \frac{AZ'}{BP} = \frac{PB}{BP} = -1$$

In figuur 11.:

$$\frac{XB}{XC} = \frac{AB}{AZ} = \frac{YB}{CZ} \ , \ \frac{YC}{YA} = \frac{BZ}{BA} = \frac{CZ}{XA}, \ \frac{ZA}{ZB} = \frac{CA}{CY} = \frac{XA}{BY}$$

en $$\frac{YB}{CZ} \cdot \frac{CZ}{XA} \cdot \frac{XA}{BY} = \frac{YB}{BY} = -1$$

Alles wat vooraf is gegaan, berust op de volgende vier axioma’s van affiene vlakke meetkunde.

i. Door elke twee punten gaat precies één lijn
ii. Er zijn drie niet-collineaire punten
iii. Voor elk punt P en elke lijn m:
$P \notin m$ => er is precies één lijn x zo dat $P \in x$ en $x \cap m = \varnothing$.
iv. De ‘kleine Desargues’:

Voor elk zevental punten {O, A, B, C, P, Q, R}: Als {O, A, P}, {O, B, Q}, {O, C, R} collineaire drietallen zijn op drie (verschillende) lijnen, en bovendien $\overline{AB} \parallel \overline{PQ}$ en $\overline{BC} // \overline{QR}$, dan zijn ook $\overline{AC}$ en $\overline{PR}$ evenwijdig (figuur 12)

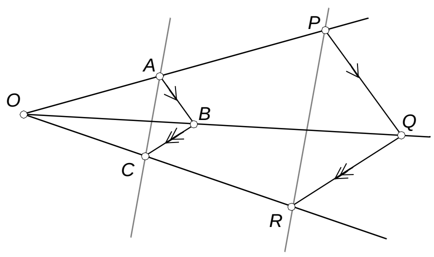


fig. 12

Axioma iv. fungeert in het bijzonder als fundament voor de verhoudingen van parallelle vectoren; uit i., ii., iii. en iv. kan ook de kleine parallelle Desargues worden afgeleid:

Als ABCD en ABPQ parallellogrammen zijn zo dat $\overline{CD} \neq \overline{PQ}$, dan is ook CDQP een parallellogram.

en dat zorgt (samen met i., ii., en iii.) voor een goede fundering van de optelling van vectoren.

Er is een beroemde stelling van Hessenberg uit 1905:
Uit de kleine Pappos kan axioma iv worden afgeleid, zodat axioma iv kan worden weggelaten door degenen die zich willen beperken tot (vlakke) affiene structuren waarvan de scalairen (zijnde verhoudingen van parallelle vectoren) een commutatief lichaam vormen: zij hebben **CPP** *als axioma.*

A.J.Th. Maassen