Het algebravraagstuk staat centraal in het onlangs verschenen boek *Wat a is, dat kun je niet weten*. Als voorproefje hier een bewerking van een van de hoofdstukken. Algebra staat niet op het 'hoofdmenu' van wiskunde in de tweede fase, terwijl algebraïsche vaardigheden toch op allerlei momenten onmisbaar zijn. **Paul Drijvers** onderscheidt basisvaardigheden en symbol sense en licht toe hoe hieraan in de tweede fase kan worden gewerkt.

Algebraïsche basisvaardigheden en symbol sense in de tweede fase van HAVO en VWO

Algebra in een ander verband

Algebra en de tweede fase, dat is een wat tweeslachtige combinatie. Enerzijds maken leerlingen gebruik van hulpmiddelen zoals formulekaart en grafische rekenmachine, anderzijds worden ze geacht in staat te zijn algebraïsche bewerkingen met de hand uit te voeren. Algebra staat nauwelijks expliciet op het programma – dat hoofdzakelijk uit analyse, meetkunde en kansrekenen/statistiek bestaat – terwijl toch op algebraïsche vaardigheden een beroep wordt gedaan. Dit leidt tot een hybride en onbevredigende onderwijspraktijk.

In het artikel *Discrete algebra* beschrijft Martin Kindt hoe een leerling van VWO-4 in een meetkundige situatie niet in staat is de formule

$$\frac{(\text{aantal hoeken - 2}) \times 180}{\text{aantal hoeken}}$$

te herleiden tot $180 - \frac{360}{N}$ (Kindt, 2000). Deze observatie geeft aan waar de problemen liggen met algebra in de tweede fase van HAVO en VWO: leerlingen missen de algebraïsche vaardigheid waaraan in een ander verband – een nieuwe, geïntegreerde context – behoefte is. Hierdoor vormt algebra een obstakel dat de voortgang bij de probleemaanpak kan belemmeren. Over deze kwestie gaat dit artikel. Laten we eerst proberen de problematiek in kaart te brengen.

Aarzelingen bij algebraïsche vaardigheden

Op verschillende manieren komen de aarzelingen over het algebraonderwijs in de tweede fase hv aan het licht. Om te beginnen zijn *wiskundedocenten* vaak niet tevreden. De onvrede richt zich voornamelijk op de gebrekkige beheersing van algebraïsche basisvaardigheden van leerlingen, zoals die in het voorbeeld hierboven naar voren komt. Soms wordt hierbij beschuldigend naar de onderbouw gewezen.

Ook de *examenresultaten* geven stof tot nadenken. Items waarin algebraïsche vaardigheden voorkomen, scoren vaak slechter dan andere onderdelen. In een opgave van het centraal examen HAVO-A12 (eerste tijdvak 2003) zijn bijvoorbeeld een kostenfunctie *TK* en een opbrengstfunctie *TO* gegeven. De winstfunctie *W* is het verschil van die twee:

$$TK = 0{,}1q^3 - q^2 + 6q + 6$$

$$TO = 6q$$

$$W = TK - TO$$

De vraag is nu om de afgeleide van *W* te bepalen en daarmee de productie te berekenen waarbij de winst maximaal is. Het antwoord moet een geheel aantal zijn. De oplossing komt neer op de volgende stappen: de formule van *W* opstellen, deze derdegraads functie differentiëren, en de waarden van *q* vinden waarvoor de afgeleide gelijk is aan 0. De te differentiëren functie is een gewone veeltermfunctie en de vergelijking kan worden opgelost met de grafische rekenmachine. Toch is de gemiddelde score van dit onderdeel slechts 18% van het maximum. Hoe komt dat? Waarschijnlijk kunnen veel leerlingen de deelstappen, het differentiëren en het oplossen van de vergelijking met de GR, afzonderlijk wel correct uitvoeren. De slechte score zou veroorzaakt kunnen worden door gebrek aan overzicht op het oplossingstraject als geheel (Zwaneveld, 2004).

Ook in de examens wiskunde B scoren algebraonderdelen vaak niet goed. Docenten hebben de wens geuit om met name bij de HAVO-B examens meer algebra te vragen. Ook Boertien (2005) wijt de matige resultaten bij algebra-items aan de stapeling van stappen, en noemt de invoering van het studiehuis met een teruglopend aantal contacturen als een van de mogelijke oorzaken. Hij stelt dat meer algebra, in elk geval op het CE van HAVO-B, tot slechtere resultaten zou leiden.

In het *vervolgonderwijs* is men niet tevreden over de algebraïsche vaardigheden van de instromende studenten. Met name de technische universiteiten roeren zich op dit punt, onder andere door ingangstoetsen in te voeren om deficiënties van studenten op te sporen. Een voorbeelditem uit een dergelijke toets is de vraag om de volgende uitdrukking als één breuk te schrijven:

$$\frac{3a}{3a-2} - \frac{a+2}{a}$$

De score is niet bemoedigend: 27 van de 86 eerstejaarsstudenten werktuigbouwkunde van de Technische Universiteit Eindhoven zijn in staat deze bewerking correct uit te voeren[1]. Dergelijke ervaringen leidden tot noodkreten uit het vervolgonderwijs.

Basisvaardigheden en symbol sense

Bij het analyseren van de problemen rond algebra in de tweede fase is het goed onderscheid te maken tussen algebraïsche basisvaardigheid en symbol sense. Neem bijvoorbeeld het oplossen van eenvoudige vergelijkingen en het vereenvoudigen van uitdrukkingen. Kemme (2002) noemt dit specifieke algebraïsche vaardigheden, algebraïsch rekenen. Hoe ver de beheersing van deze *algebraïsche basisvaardigheid* moet gaan, is onderwerp van discussie, maar het lijkt wel duidelijk dat het belangrijk is om een aantal basisbewerkingen geroutineerd en zonder veel fouten te kunnen uitvoeren.

Maar algebra is meer dan het beheersen van basisvaardigheden; het gaat ook om het kiezen van een verstandige strategie om een probleem aan te pakken, het opstellen van een model, het houden van overzicht op het oplossingsproces, het verstandig kiezen van vervolgstappen, het globaal kijken naar expressies, het onderscheiden van relevante en minder relevante kenmerken, het zinvol interpreteren van resultaten, enzovoorts. Kemme noemt dit algebraïsch redeneren. In de vakliteratuur wordt dit wel *symbol sense* genoemd (Arcavi, 1994; Drijvers, 2003). Symbol sense is voor algebra wat 'number sense' is voor rekenen: een soort algebraïsche expertise die vaak op de achtergrond een rol speelt bij het plannen en uitvoeren van basisbewerkingen. Deze 'algebraïsche geletterdheid' behelst dus kennis van achterliggende concepten en strategische vaardigheden die de uitvoering van de basisroutines overstijgt en stuurt.

Algebraïsche vaardigheid

basisvaardigheid	*symbol sense*
• algebraïsch rekenen	• algebraïsch redeneren
• procedurele routine	• strategische vaardigheid

fig. 1 tweedeling binnen algebraïsche vaardigheid

Figuur 1 geeft het onderscheid tussen basisvaardigheid en symbol sense schematisch weer. Natuurlijk is een scherpe grens niet goed te trekken en kan het een niet zonder het ander bestaan. Bij algebraïsch redeneren zal op de achtergrond ook rekenvaardigheid een rol spelen, omdat redeneren pas goed mogelijk is als je de bewerkingen enigszins 'in de vingers hebt'. Andersom zal bij het algebraïsch rekenen ook enig redeneren nodig zijn, zeker als de 'automatische piloot' hapert of als de situatie afwijkt van de gebruikelijke.

Deze tweedeling kan helpen de moeilijkheden met algebra in de tweede fase te lokaliseren. De klachten uit het veld en uit het vervolgonderwijs lijken zich toe te spitsen op de linkerkolom, die van de basisvaardigheid. De vraag is echter of het probleem niet minstens voor een deel in het ontbreken van symbol sense ligt. In de volgende paragrafen gaan we na wat basisvaardigheden en symbol sense in de tweede fase kunnen inhouden.

De ontwikkeling van algebraïsche basisvaardigheid

De ontwikkeling van algebraïsche basisvaardigheid betreft de linkerkolom van figuur 1. Welke basisroutines moet een leerling in de tweede fase vlot beheersen? De twee belangrijkste zijn het herschrijven van algebraïsche uitdrukkingen en het oplossen van vergelijkingen.
Het herschrijven van algebraïsche uitdrukkingen (expressies, vormen) is het lastigst. Dit omvat technieken als ontbinden in factoren, haakjes uitwerken, werken met machten en wortels, breuken onder één noemer brengen, breuksplitsen en algebraïsch substitueren. Het oplossen van vergelijkingen is wat overzichtelijker, al blijven goniometrische vergelijkingen lastig en moet een vergelijking vaak eerst worden herschreven voor één van de standaardalgoritmen kan worden toegepast.
In de onderbouw hebben de leerlingen al kennis gemaakt met deze basisvaardigheden, maar in de tweede fase verandert er een en ander. Dikwijls moeten tijdens het oplossingsproces bijvoorbeeld meerdere stappen worden 'gestapeld'. Ook doet de algebra zich regelmatig in een andere context voor, zoals analyse, meetkunde, kansrekenen/statistiek, natuurkunde of economie. Verder wordt het repertoire aan functies uitgebreid met goniometrische, exponentiële en logaritmische functies, net zoals het arsenaal aan algebraïsche technieken wordt uitgebreid, onder andere met het toepassen van regels voor differentiëren.

Het uitbouwen en onderhouden van deze basisroutines vraagt expliciete aandacht. We pleiten er dan ook voor ook in de tweede fase tijd in te ruimen voor algebraoefeningen. Dergelijke oefeningen kunnen uit een context afkomstig zijn, of een puur algebraïsch karakter hebben. Overigens is onderhouden niet synoniem met veel oefenen, maar omvat dat ook het onderhoud van de onderliggende inzichten.

Ontwikkelen, oefenen en onderhouden van basisvaardigheden kan in de tweede op verschillende manieren gebeuren. Een eerste invalshoek is het uitbuiten van veel voor-

komende fouten of misverstanden. Confronteer leerlingen bijvoorbeeld met veelgemaakte algebraïsche fouten of laat hen zelf een foutieve algebraïsche aanpak bedenken.
Mogelijk worden dan voorbeelden als $\frac{(x^2+1)}{x} = x+1$ of $\sqrt{x^2-9} = x-3$ naar voren gebracht. In dezelfde sfeer ligt het herkennen en verklaren van equivalenties. Denk bijvoorbeeld aan $(1-x)^2 = (x-1)^2$, $\frac{a+b}{2} = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$ of $\frac{m+1}{m+2} = 1 - \frac{1}{m+2}$.

> Gegeven de functies A en B met $A(x) = x-1$ en $B(x) = x^3+x^2+x+1$.
>
> a. Bereken de afgeleide van de productfunctie $A \cdot B$ met behulp van de productregel.
> b. Je kunt de afgeleide van $A \cdot B$ ook op een handiger manier berekenen. Hoe?
> c. Ga na of de antwoorden bij de onderdelen a en b op hetzelfde neerkomen.

fig. 2 twee manieren van differentiëren

Ook nieuwe onderwerpen kunnen aanleiding zijn tot het oefenen van algebraïsche routines. Figuur 2 toont een oefening in het differentiëren, afkomstig uit Kindt e.a. (1997). Onderdeel a is een toepassing van de productregel, waarbij het antwoord nog verder moet worden vereenvoudigd: $(x^3+x^2+x+1)+(x-1)\cdot(3x^2+2x+1)$ is een nogal onoverzichtelijk resultaat. Bij onderdeel b is de suggestie om eerst het product uit te werken. Dat geeft een eenvoudig te differentiëren functie. Bij onderdeel c wordt gevraagd de equivalentie van de twee antwoorden na te gaan. In deze opgave is sprake van een samenspel tussen uitwerken en differentiëren. Het kiezen van een handige volgorde vraagt om een algebraïsche expertise die onderdeel is van symbol sense.
Het afleiden van de productregel voor differentiëren uit de kettingregel is eveneens een algebraïsch kunststukje, dat behalve oefening ook inzicht in de samenhang tussen de regels voor differentiëren biedt. We korten $f(x)$ en $g(x)$ af tot f en g.

$$(f+g)^2 = f^2 + 2f \cdot g + g^2$$

Links en rechts differentiëren met de kettingregel geeft:

$$2(f+g)\cdot(f'+g') = 2f \cdot f' + 2(f \cdot g)' + 2g \cdot g'$$

Na deling door 2 en uitwerken van haakjes valt er een en ander weg. Wat overblijft is:

$$g \cdot f' + f \cdot g' = (f \cdot g)'$$

Ook analytische meetkunde kan aanleiding zijn tot het werken aan algebraïsche routine. Hoe bewijs je bijvoorbeeld dat de Lissajouskromme met parametervoorstelling [cos(t), cos($2t$)] een parabool is? Dat gaat als volgt:

$$y = \cos(2t) = 2\cdot(\cos t)^2 - 1 = 2x^2 - 1$$

Een wat interessantere vervolgvraag is om andere waarde(n) voor a te vinden, waarvoor de kromme [cos(t), cos($2t + a$)] eveneens een parabool is. Parameterkrommen zoals figuren van Lissajous, die leerlingen met de grafische rekenmachine kunnen tekenen, vormen een rijke bron voor het ontwikkelen en oefenen van algebraroutine.

De laatste twee voorbeelden laten zien dat de analyse aanleiding kan zijn tot het oefenen van algebra; daarnaast kan ook los van het onderwerp dat aan de orde is aandacht worden besteed aan algebraïsche basisvaardigheden.

De ontwikkeling van symbol sense

Behalve basisvaardigheid verdient ook de ontwikkeling van symbol sense, aangeduid in de rechterkolom in figuur 1, meer aandacht in de tweede fase. Symbol sense speelt vaak op de achtergrond een rol bij het plannen, coördineren en interpreteren van basisbewerkingen. Meer specifiek denken we bij symbol sense aan:
- *Heuristieken* om tot een probleemaanpak of strategie te komen, het vermogen om daarop overzicht te houden, om daarbinnen handige keuzes te maken of, als een strategie vastloopt, om een andere invalshoek te zoeken.
- Het vermogen om *globaal naar expressies en formules te kijken*, om de structuur van expressies en subexpressies te herkennen, om de betekenis van symbolen in de context te zien en om expressies op een andere manier weer te geven.
- Het vermogen tot *algebraïsch redeneren*. Denk hierbij aan kwalitatieve beschouwingen over termen en factoren in expressies, aan symmetrieoverwegingen of redeneringen met randgevallen.

Voor elk van deze drie punten schetsen we hieronder op welke manier er in de klas aandacht aan kan worden besteed.

Heuristieken
Het is van belang dat leerlingen een repertoire aan heuristieken ontwikkelen voor het oplossen van algebraïsche problemen (Freudenthal, 1983; Polya, 1945; Sawyer, 1969; van Streun, 1989). Een docent kan hieraan aandacht te besteden door een aantal overstijgende vragen aan de orde te stellen, zoals:
- Waar wil je op uitkomen, waar moeten we heen?
- Wat kan een verstandige eerste stap zijn?
- Hoe kun je de complexiteit terugbrengen?
- Kun je het probleem in verband brengen met iets waar we wel raad mee weten?
- Zijn er randgevallen die je kunt controleren?
- Hoe kwam het dat je dit niet zelf zag?
- Welk idee maakte dat je hiermee verder kon?

Door op deze manier op de algebraïsche werkwijze te reflecteren, wordt het repertoire aan heuristieken voor strategieën en probleemaanpak uitgebreid. Laten we twee voorbeelden geven.

De productregel voor differentiëren kan worden nagegaan voor het eenvoudige geval dat één van de twee functies constant is. Dat levert een controlemogelijkheid op, die vertrouwen geeft in de formule. In stenonotatie: $(3\cdot f)' = 3'\cdot f + 3\cdot f' = 3\cdot f'$.

Bij het oplossen van vergelijkingen is een goede oefening om in vrij ingewikkelde situaties te bedenken wat een verstandige eerste stap is. Uitwerken van de haakjes in $(x-1)\cdot(x^2+1) = 0$ is geen efficiënte weg naar de oplossing. Bij het oplossen van $\cos(2x) + 2\cdot\sin(x) = 0$ kan $\cos(2x)$ beter worden vervangen door $1 - 2\cdot(\sin x)^2$ dan door $2\cdot(\cos x)^2 - 1$. In het verlengde hiervan kan het geen kwaad enkele standaardtypen van vergelijkingen te herhalen zoals:

$$A\cdot B = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ of } B = 0$$

$$\frac{A}{B} = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ en } B \neq 0$$

Hierin staan A en B voor algebraïsche expressies, wat voor leerlingen mogelijk even wennen is. Let ook op het gebruik van *en* en *of*.
Het kiezen van een handige manier van herschrijven speelt niet alleen bij vergelijkingen. Ook bij functies is het van belang een geschikte vorm te vinden. Zo zijn bijvoorbeeld $f(x) = x^2 - 4x + 3$, $f(x) = (x-1)\cdot(x-3)$, $f(x) = (x-2)^2 - 1$ en $f(x) = x\cdot(x-4) + 3$ equivalente gedaanten, die echter verschillende aspecten benadrukken. De eerste vorm is handig bij differentiëren, de tweede laat de nulpunten zien, in de derde is de top af te lezen en de vierde is de zogeheten Hornervorm. Flexibel omgaan met dergelijke vormen maakt deel uit van symbol sense en verdient aandacht.

Globaal kijken naar expressies en formules
Het vermogen om formules en expressies te 'lezen' is een belangrijke algebraïsche deskundigheid. Onderdeel daarvan is het ontwikkelen van een 'totaalblik' op expressies en formules.
In de vergelijking $v\cdot\sqrt{u} = 1 + 2v\cdot\sqrt{1+u}$ is bijvoorbeeld de clou dat leerlingen deze kunnen zien als $v\cdot\square = 1 + 2\cdot v\cdot\bigcirc$, waarbij de inhoud van $\square$ en $\bigcirc$ er nu even niet toe doet (Gravemeijer, 1990). Leerlingen kunnen zo'n globale kijk op formules ontwikkelen door met contexten te werken waarin deelexpressies een eigen betekenis en naam hebben. Een voorbeeld hiervan is het probleem van de snelste route voor James Bond (Kindt, 1993). James Bond bevindt zich in een bootje drie kilometer van de kust en wil strandpaal $S38$ bereiken (zie figuur 3). De roeisnelheid is 6 km/u en op het strand rent hij met een snelheid van 12 km/u. De vraag is op welk punt op het strand hij moet afkoersen om zo snel mogelijk het doel te bereiken.

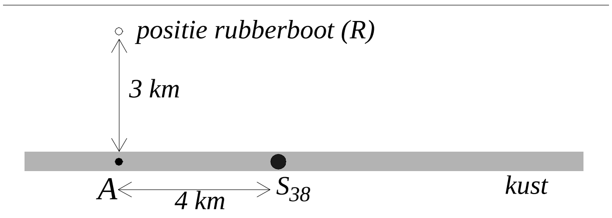

fig. 3 de missie van James Bond

Om dit probleem met algebra aan te pakken moet eerst een variabele worden gekozen. Daar zijn verschillende mogelijkheden voor. Als we de afstand van A tot de landingsplaats x noemen, is de totale tijd T gelijk aan:

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2+3^2}}{6} + \frac{4-x}{12}$$

Het is goed om de betekenis van de deelexpressies aan de context en de figuur te koppelen: $\sqrt{x^2+3^2}$ stelt de te varen afstand voor, $4-x$ is de loopafstand waarbij de 4 de afstand tussen A en S is, en de twee noemers staan voor de twee snelheden.
Nu komt de algebraïsche routine van pas: de tijdfunctie met de kettingregel differentiëren, de afgeleide gelijk aan 0 stellen en de vergelijking oplossen. Vanwege de wortel en de kwadraten is dit niet heel eenvoudig, maar globaal kijken levert in elk geval op dat het kwadraat in 3^2 alleen maar een afleider is.
De vergelijking van de afgeleide is:

$$T'(x) = \frac{x}{6\sqrt{x^2+3^2}} - \frac{1}{12}$$

Als de afgeleide gelijk is aan 0 geldt dat

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+3^2}} = \frac{6}{12},$$

ofwel de verhouding tussen de roeiafstand en het 'complement' van de loopafstand is gelijk aan de verhouding van de snelheden. Deze verhouding is overigens gelijk aan de sinus van de hoek die de vaarroute moet maken met de 'loodlijn' naar het strand.
Terugkijkend in de figuur blijkt verder dat de afstand *AS*, in het voorbeeld gelijk aan 4, in de afgeleide niet voorkomt. Dat betekent dus dat de koers van het bootje niet afhangt van de plaats van de strandpaal, zo lang die maar ver genoeg weg staat. Verrassend resultaat! Dat kan ook algebraïsch worden ingezien: in de formule van T is $\frac{4-x}{12}$ gelijk aan $\frac{4}{12} - \frac{x}{12}$ en de constante term valt weg bij differentiëren.
Door de strandpaal nu landinwaarts te verplaatsen, kan deze situatie worden uitgebouwd naar die van de breking van licht bij de overgang van twee media met verschillende voortplantingssnelheden. Het algebraïsche rekenwerk wordt dan iets gecompliceerder. Het nagaan op welke plaatsen in de berekening er iets verandert draagt bij aan het doorzien van de structuur van de formules.

Als leerlingen door deze stijl van werken leren globaal te kijken naar expressies en formules, helpt hen dat irrelevante informatie te negeren en zich te concentreren op essentiële kenmerken. Daardoor zijn ze beter bestand tegen complexere algebraïsche situaties.

Bij het leren herkennen van de structuur in een algebraïsch verband is het soms goed om boven de situatie uit te stijgen. Neem bijvoorbeeld de regels voor verwachting en variantie in de kansrekening. Voor de verwachting geldt:

$$E(a \cdot X + b) = a \cdot E(X) + b$$

In woorden: de verwachting van de lineaire combinatie is de lineaire combinatie van de verwachting. Dat lijkt vanzelfsprekend, maar voor variantie en standaardafwijking gaat het niet op:

$$\mathrm{Var}(a \cdot X + b) = a^2 \cdot \mathrm{Var}(X)$$
$$\sigma(a \cdot X + b) = |a| \cdot \sigma(X)$$

Deze gelegenheid kan worden aangegrepen voor opdrachten die de kansrekening ontstijgen, zoals:

- Geef voorbeelden van lineaire en niet-lineaire verbanden.
- Vermenigvuldigen van een som komt op hetzelfde neer als optellen van twee vermenigvuldigingen. Schrijf dit op in formuletaal.
- 'De .... van de ____ is gelijk aan de ____ van de ....' Vul zelf iets in voor .... en ___ zodat de bewering waar wordt, maar ook iets dat de bewering onjuist maakt. Denk bijvoorbeeld aan machten, wortels en goniometrische functies.

Op deze manier krijgen leerlingen gevoel voor lineariteit als algemeen structureel algebraïsch idee, dat uitstijgt boven specifieke situaties.

Algebraïsch redeneren

Bij algebraïsch redeneren neemt de leerling afstand tot de basisroutines. Naast of in plaats van algebraïsche procedures zijn ook kwalitatieve algebraïsche redeneringen manieren om tot resultaat te komen. In zulke redeneringen spelen bijvoorbeeld symmetrieoverwegingen een rol, het globaal kijken naar expressies, of het identificeren van 'winnende factoren' in een algebraïsch krachtenspel.

Een opgave die uitnodigt tot algebraïsch redeneren staat in figuur 4 (Doorman e.a., 1994). De grafieken die met een grafische rekenmachine kunnen worden getekend (figuur 5), suggereren dat elk van de functies voor $x = 1$ een extreme waarde bereikt. Dat moet algebraïsch worden geverifieerd, wat neerkomt op het differentiëren van de vier functies en het substitueren van de *x*-waarde. Bij onderdeel c volgt dan de generalisatie: is het zo dat elke differentieerbare functie met deze algebraïsche eigenschap ook een extreme waarde heeft voor $x = 1$? Dat blijkt zo te zijn. De leerlingen kunnen dat aantonen door $f(1/x)$ in het algemeen met de kettingregel te differentiëren en dan de gegeven eigenschap te gebruiken.

Een redenering is hier misschien zeker zo verhelderend. Als je x door $1/x$ vervangt, blijft $x = 1$ op zijn plaats. Alle getallen groter dan 1 verplaatsen zich naar het gebied tussen 0 en 1, en andersom. Als de grafiek rechts van 1 stijgt, dan zal die links van 1 dus dalen. Dat betekent dat er bij $x = 1$ een minimum optreedt. Op dezelfde manier: als de grafiek rechts van 1 daalt, dan zal die links van 1 stijgen en is er een maximum bij $x = 1$.

Voor alle $x > 0$ zijn de volgende functies gedefinieerd:

$$f_1(x) = x + \frac{1}{x} \qquad f_2(x) = x^3 + \frac{1}{x^3}$$
$$f_3(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + 2 \qquad f_4(x) = \frac{4x}{x^2+1}$$

Deze vier functies hebben een eigenschap gemeen, namelijk dat voor elke x uit het domein geldt: $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$.

a. Toon aan dat f_1, f_2, f_3 en f_4 aan deze eigenschap voldoen.
b. Bekijk de grafieken van deze vier functies. Welke overeenkomsten vertonen ze in de punten met *x*-coördinaat 1? Verifieer deze overeenkomst algebraïsch.
c. Toon aan dat de bij b gevonden eigenschap geldt voor elke differentieerbare functie waarvoor geldt dat $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$ voor alle *x* uit het domein.

fig. 4 functies met eenzelfde eigenschap

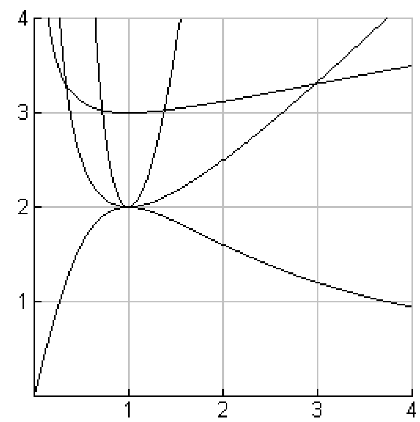

fig. 5 de grafieken van de vier functies

Gedifferentieerde conclusies

Dit artikel is een pleidooi voor een grotere plaats voor algebra in de tweede fase, waarbij aandacht wordt besteed aan de ontwikkeling van routine om basisbewerkingen te kunnen uitvoeren, en van symbol sense om deze basisbewerkingen handig te kiezen, te evalueren en te beredeneren. Basisvaardigheden en symbol sense, in feite uiteinden van een continu glijdende schaal, zijn aspecten van algebraïsche vaardigheid die elkaar beïnvloeden. Basisvaardigheden staan letterlijk aan de basis van symbol sense en symbol sense is van belang bij het plannen en doorzien van basisvaardigheden.

Meer aandacht dus voor algebraïsche basisvaardigheden en symbol sense in de tweede fase, maar voor alle leerlingen op dezelfde manier? Op welke manier eigenlijk? En welke rol speelt de grafische rekenmachine daarbij? Schetsmatige antwoorden op deze vragen vormen het slotvan dit artikel.

Welke basisvaardigheden en op welke manier?
De voorbeelden in dit artikel zijn niet voor alle leerlingen van de tweede fase even relevant. Het niveau en het type basisroutines verschilt per schooltype en profiel.

Voor HAVO M is de benodigde basisroutine beperkt. Voor zover de basisvaardigheden een rol spelen, kunnen ze voor een aanzienlijk deel worden uitgevoerd met de grafische rekenmachine. De nadruk ligt eerder op algemene symbol-sensevaardigheden zoals het kiezen van een oplossingsstrategie en het interpreteren van resultaten. Het voorbeeld van de winstfunctie (CE HAVO A12, 2003) geeft de bovengrens aan voor EM, en gaat misschien te ver voor CM.

Voor HAVO N en VWO M wordt meer gevraagd op het gebied van algebraïsche basisroutines. Met name de HAVO-leerling die een technische vervolgopleiding kiest, heeft een behoorlijke formulevaardigheid nodig. Het voorbeeld van de productregel geeft aan waar de grens ligt. Situaties die meer algebraïsche basisroutine vereisen kunnen beter met de grafische rekenmachine of ander ICT-gereedschap worden aangepakt.

Voor VWO N vraagt het vervolgonderwijs de meeste handmatige vaardigheden. Voor deze groep leerlingen zal ICT-gebruik dus eerder het werk met pen en papier aanvullen dan vervangen. Het vergelijken van de traditionele aanpak met de ICT-methode kan hierbij waardevol zijn. Als meer tijd wordt besteed aan ontwikkeling, onderhoud en oefening van algebraïsche vaardigheden, zou een opgave die van de figuren van Lissajous voor dit type leerling geen probleem mogen zijn.

Een precieze afbakening van het repertoire aan algebraïsche basisvaardigheden dat een leerling moet ontwikkelen zou in de nabije toekomst verder moeten worden uitgewerkt, zodat docenten, uitgevers en examenmakers weten waar het algebraonderwijs op aanstuurt.

Op welke manier kan in de klas aan het ontwikkelen en het onderhouden van algebraïsche vaardigheden worden gewerkt? Het ontwikkelen van nieuwe vaardigheden, zoals het toepassen van regels voor differentiëren of het oplossen van exponentiële vergelijkingen, komt in het programma vanzelf aan de orde. Het is dan zaak om voldoende tijd uit te trekken voor het opbouwen van een stabiele techniek.

Bij het onderhouden van algebraïsche basisvaardigheden kunnen ten eerste de kansen die zich in het programma voordoen worden benut. Dat betekent dat het gebruik van een procedure in de context van een analytisch, meetkundig of statistisch probleem wordt uitgebuit om deze weer op te frissen en te oefenen. Daarnaast is het mogelijk om apart, aan het begin van elke les, of elke week een half lesuur, aandacht aan algebraïsche vaardigheden te besteden. Het voordeel van deze laatste aanpak is dat deze vaardigheden centraal staan; het nadeel kan zijn dat algebra los staat van de toepassingen, waardoor de transfer in gevaar kan komen. Verder is het aan te houden om bij de te onderhouden vaardigheden ook verband te leggen met het waarom van de methode en met de achterliggende inzichten.

Welke symbol sense en op welke manier?
De voorbeelden die in dit hoofdstuk het belang van symbol sense illustreren zijn evenmin voor alle leerlingen van de tweede fase belangrijk.

Voor HAVO M ligt de nadruk op algemene symbol-sensevaardigheden zoals het doorzien van een eenvoudig algebraïsch model, het kiezen van een oplossingsstrategie en het interpreteren van resultaten. Het voorbeeld van het herkennen van typen vergelijkingen geeft aan dat het bij het kiezen van strategieën om vrij elementaire gevallen gaat.

Voor HAVO N en VWO M gaat de benodigde symbol sense wat verder. Denk aan vertaal- en modelleervaardigheden, aan inzicht in structuur en betekenis van formules en expressies, en aan kwalitatieve redeneringen met formules. Het voorbeeld van James Bond geeft aan waar hier de grens ligt.

Voor VWO N zijn modelleren, interpreteren en redeneren natuurlijk eveneens van belang, maar is het ook goed om van een hoger standpunt tegen algebra aan te kijken. Het gaat dan om een kijk op overstijgende idëeen zoals lineariteit, equivalentie en structuur van formules en expressies. Denk aan het voorbeeld over de functies met de eigenschap dat $f(x) = f(1/x)$. De algebra zal vaak ingebed zijn in een breder kader, bijvoorbeeld van analytische of meetkundige aard. Ook verdient de transfer naar andere exacte vakken aandacht.

Op welke manier kan in de klas aan de ontwikkeling van symbol sense worden gewerkt? Dat is geen eenvoudige vraag. De eerste ‘leergang symbol sense’ moet nog geschreven worden. Een belangrijke ingang is het reflecteren op de gevolgde methode, het stilstaan bij de gevolgde of te volgen aanpak, waarbij afstand wordt genomen van de uitvoering zelf. Waarom een procedure werkt, hoe je dat van te voren al kunt zien, waar een goed idee vandaan komt, en welke verbanden met andere problemen en methoden zich voordoen, dergelijke vragen zouden regelmatig onderwerp van gesprek moeten zijn. Het is voor de docent een kwestie van het herkennen en benutten van aanknopingspunten, die zich niet altijd van tevoren laten plannen.

Welke rol voor de grafische rekenmachine?

Tot besluit nog enkele opmerkingen over de rol van de grafische rekenmachine. Niet zelden wordt de invoering van de GR als één van de oorzaken genoemd van de afnemende algebraïsche vaardigheden. Hoewel sommige docenten enthousiast zijn over de machine, zijn ook kritische geluiden hoorbaar.

Technologie is iets van deze tijd; het onderwijs zou zich wereldvreemd opstellen als het dat probeert te ontkennen. Dat neemt natuurlijk niet weg dat de inpassing van een apparaat als de grafische rekenmachine op een overwogen en zinvolle manier moet plaatsvinden.

Voor de M-profielen van HAVO en VWO is de GR geschikt gereedschap om modellen te verkennen en door te rekenen. De handmatige algebra speelt daarbij een minder grote rol dan bij de N-profielen. Dat neemt niet weg dat bepaalde elementaire basisvaardigheden ook met de hand gedaan kunnen worden.

Voor de N-profielen moeten procedures die door de GR kunnen worden uitgevoerd niet automatisch uit het repertoire van pen-en-papiervaardigheden worden verwijderd. Het is wenselijk dat leerlingen een aantal situaties op verschillende manieren kunnen aanpakken en de resultaten met elkaar in overeenstemming kunnen brengen. Denk bijvoorbeeld aan het grafisch controleren van een algebraïsch gevonden antwoord. Daarnaast kan het werken met de GR aanleiding zijn tot het verkennen van situaties en het ontdekken van verbanden, die vervolgens vragen om een algebraïsche verificatie of redenering. De docent kan in het onderwijs de nadruk leggen op algebraïsche oplossingsmethoden, en deze ook bij bepaalde typen opgaven eisen.

Als de GR op deze manier weloverwogen wordt ingezet, is dit een aanvulling op en een aanwinst voor het algebraonderwijs in de tweede fase, zowel in de M- als in de N-profielen.

Paul Drijvers, Freudenthal Instituut, Utrecht

Literatuur

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *14*(3), 24-35. Ook beschikbaar via http://flm.educ.ualberta.ca/index.php?do=extras&lang=en

Boertien, H. (2005). Over algebra en modelleren in de havo-b-examens. *Euclides*, *81*(1), 18-21.

Doorman, L.M., Drijvers, P. & Kindt, M. (1994). *De grafische rekenmachine in het wiskundeonderwijs.* Utrecht: Freudenthal Instituut.

Drijvers, P. (2003). Algebraïsche vaardigheden, symbol sense en ICT. *Nieuwe Wiskrant, Tijdschrift voor Nederlands wiskundeonderwijs*, *23*(1), 38-42.

Freudenthal, H. (1983). Heuristiek en heuristieken. Nieuwe Wiskrant, *Tijdschrift voor Nederlands Wiskundeonderwijs*, *2*(4), 63-66.

Gravemeijer, K. (1990). Globaal kijken, een kenmerk van algebraïsche deskundigheid. *Nieuwe Wiskrant, Tijdschrift voor Nederlands Wiskundeonderwijs*, *10*(2), 29-33.

Kemme, S. (2002). Welke algebra is nodig voor klas 4? *Nieuwe Wiskrant, Tijdschrift voor Nederlands wiskundeonderwijs*, *21*(3), 29-31.

Kindt, M. (1993). James Bond, de wet van Snellius en wiskunde B. *Nieuwe Wiskrant, Tijdschrift voor Nederlands Wiskundeonderwijs*, *13*(1), 45-50.

Kindt, M. (2000). Discrete algebra. *Nieuwe Wiskrant, Tijdschrift voor Nederlands wiskundeonderwijs*, *19*(4), 31-36.

Kindt, M., Drijvers, P. & Doorman, L. (1997). *De techniek van het differentiëren*. Utrecht: Freudenthal Instituut.

Polya, G. (1945). *How to solve it?* New Jersey: Princeton University Press.

Sawyer, W.W. (1969). *Aanschouwelijke algebra*. Utrecht: Spectrum.

Streun, A. van (1989). *Heuristisch Wiskundeonderwijs. Verslag van een onderwijsexperiment.* Dissertatie. Groningen: Rijksuniversiteit Groningen.

Zwaneveld, B. (2004). Algebra, verloren zaak of uitdaging? *Euclides*, *80*(2), 42-47.

Noten

[1] Deze gegevens zijn door F. Martens gepresenteerd op het symposium ‘Leerlijn algebra en ICT, van onderbouw VO tot universiteit’, 25 juni 2004, Amersfoort. Het gaat hier om een ingangstoets die in oktober 2003 is afgenomen. Zie www.slo.nl.

Dit artikel is een ingekorte bewerking van het hoofdstuk ‘Algebra in de tweede fase van HAVO en VWO’ uit het boek ‘Wat a is, dat kun je niet weten’ (Paul Drijvers (red.), 2006, Freudenthal Instituut).