Michel Roelens kwam een mooi didactisch hulpmiddel tegen: de goniometrische cirkel. De werking van het apparaat levert een mooi stukje wiskunde op.

De goniometrische cirkel heeft tanden

Inleiding

Aan vele generaties leerlingen heb ik wijsgemaakt dat de ‘echte’ goniometrische cirkel, de cirkel waarvan wereldwijd afbeeldingen in de wiskundehandboeken staan, in mijn bezit is. Sommige leerlingen waren een beetje ontgoocheld wanneer ze dan dit zogenaamde unicum te zien kregen: een weinig professioneel ogende, zelfgemaakte kartonnen schijf met een assenstelsel erop getekend en met een ronddraaiend stokje als ‘tweede been’ van de hoek (het ‘eerste been’ zijnde, zoals je weet, bevestigd op de positieve x-as). Telkens wanneer verwante hoeken of goniometrische basisvergelijkingen in de les aan bod kwamen, haalde ik ‘de’ goniometrische cirkel boven, want ‘waarom op een afbeelding werken als we de echte bij ons in de klas hebben?’ (Milde glimlach bij de leerlingen.)

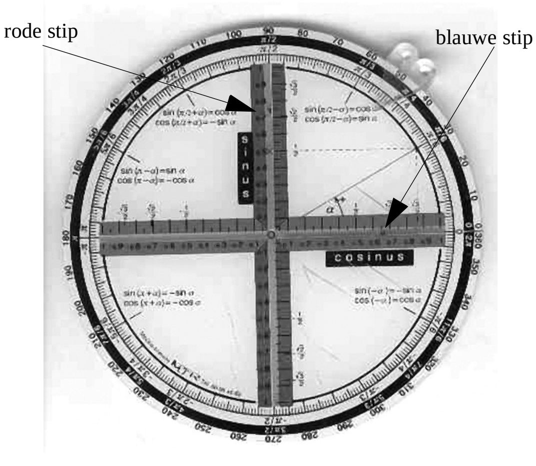

fig. 1 Le cercle trigo évolutif

Op een congres in Wallonië maakte ik kennis met een professioneler ogende goniometrische cirkel: *le cercle trigo évolutif* (zie figuur 1[1]). Bijkomend voordeel is dat het zoeken naar een verklaring voor de ‘werking’ van deze goniometrische cirkel een mooie wiskundeactiviteit is.
Er is een doorzichtig pijltje dat je langs de cirkel kunt verplaatsen. Dit pijltje bepaalt de hoek. Een blauwe stip op de x-as geeft de cosinus van de hoek aan, en een rode stip op de y-as de sinus. Er waren twee versies te koop: een leerlingenversie zoals op de foto, en een (dure) lerarenversie voor op de overheadprojector. Op de doorzichtige lerarenversie kon je goed zien hoe het werkt.
De binnenkant van de goniometrische cirkel is voorzien van tandjes. Binnenin draait een tandwiel waarvan de straal de helft is van die van de cirkel waarbinnen het draait. Op de rand van het tandwiel staan de blauwe en de rode stip (in feite is één tandje blauw en één tandje rood gekleurd).

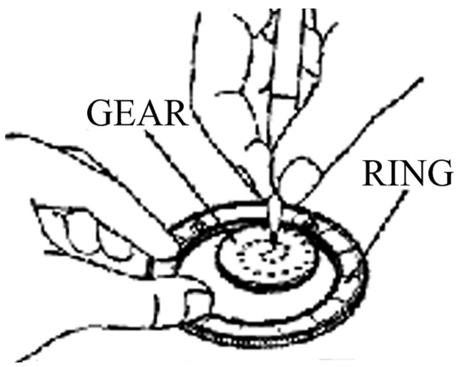

fig. 2 Spirograaf

Het komt dus neer op het spel Spirograaf uit onze jeugd. Als je een tandwiel laat draaien binnen een ring waarbij de straal van de opening juist het dubbele is van de straal van het wiel (of: waarbij het aantal tanden van de opening juist het dubbele is van het aantal tanden van het wiel), en je steekt de pen in het gaatje net tegen de rand, dan teken je een lijnstuk. Ik kon het met mijn oude spirograaf niet proberen, want de juiste verhouding van de tandenaantallen zat er niet bij. Logisch: een spirograaf is niet echt ontworpen om lijnstukken te tekenen. Met het gratis meetkundeprogramma *geogebra* maakte ik een dynamische figuur waarbij je het tandwiel ziet ronddraaien binnen de goniometrische cirkel als je het punt P op de cirkel versleept. Je kunt deze figuur van onze site www.uitwiskeling.be plukken als je wilt.
Nu nog verklaren waarom de stippen rechtlijnig bewegen, elk op één van de assen, en waarom ze inderdaad de cosinus en de sinus van de hoek voorstellen, anders ge-

zegd: waarom ze steeds de loodrechte projecties op de coördinaatassen zijn van het pijlpunt.

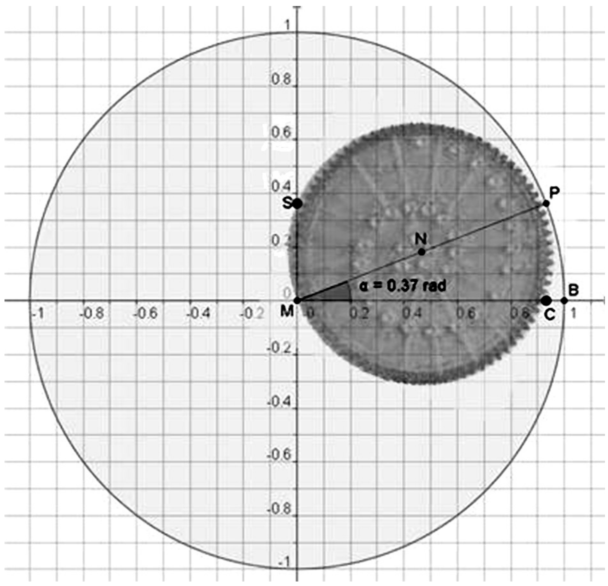

fig. 3

De blauwe stip is zo geplaatst dat die samenvalt met het raakpunt van het tandwiel met de goniometrische cirkel in de stand '0°'. De rode stip staat diametraal tegenover de blauwe stip op het tandwiel. Breng nu het tandwiel in een willekeurige stand. Noem *P* het raakpunt met de goniometrische cirkel, *C* het snijpunt van de rand van het tandwiel met de *x*-as en *S* het snijpunt van de rand van het tandwiel met de *y*-as. We willen bewijzen dat de blauwe stip in *C* zit en de rode stip in *S*. Bovendien willen we bewijzen dat *PC* loodrecht staat op de *x*-as en dat *PS* loodrecht staat op de *y*-as.

Om aan te tonen dat de blauwe stip in *C* zit, moeten we aantonen dat de boog *PC* van het tandwiel gelijk is aan de boog *PB* van de goniometrische cirkel. Dankzij de tandjes draait het wiel immers zonder te 'slippen'. De lengte van een boog is gelijk aan de straal van de cirkel maal de middelpuntshoek in radialen. De middelpuntshoek $P\hat{M}B$ op de boog *PB* valt samen met een omtrekshoek op de boog *PC*. Dus: $P\hat{M}B = \frac{1}{2}P\hat{N}C$. Omdat de straal van het wiel de helft is van de straal van de cirkel, volgt hieruit dat de boog *PB* gelijk is aan de boog *PC*. De blauwe stip zit dus inderdaad in *C*.

Nu staat de rechte *PC* loodrecht op de *x*-as, want $P\hat{C}M$ is een omtrekshoek op een halve cirkel! Om dezelfde reden staat *PS* loodrecht op de *y*-as. Bovendien staan *C* en *S* diametraal tegenover elkaar op het tandwiel. Immers, omdat *MCPS* een rechthoek vormt en de diagonalen van een rechthoek elkaar middendoor snijden, is *N* het midden van [*CS*]. De rode stip zit dus wel degelijk in *S*.

Dit artikel verscheen eerder in *Uitwiskeling 22/1*, december 2005.

Michel Roelens, Katholieke Hogeschool Limburg, Diepenbeek, België

Noot

[1] http://perso.wanadoo.fr/major/