Tijdens de sneeuwstormen van 25 november j.l. hebben duizenden leerlingen zich gebogen over de opdracht in het kader van de wiskunde B-dag. Op het Jac P Thijsse College worden de werkstukken beoordeeld op het al dan niet 'een verslag zijn'. **Lidy Wesker** vertelt hoe, en illustreert haar verhaal aan de hand van een verslag van **Sjors Ketelaars**.

Het duivenhokprincipe

Een verslag *voor* de wiskunde B-dag

Inleiding

Al heel veel jaren doet het Jac P Thijsse College in Castricum mee aan de Alympiade en de wiskunde B-dag. Deze dag wordt elk jaar weer als bijzonder succesvol gezien door leraren en leerlingen. Het is voor de leerlingen altijd een dag van hard werken, maar om 16.00 uur zijn ze er ook vanaf.

Voor de leraren begint het dan echter pas. In eerste instantie gaan we de werkstukken doornemen om te bepalen op grond van welke kenmerken we het ene werkstuk meer waarderen dan een ander werkstuk. De aangegeven kenmerken vormen dan de basis van een beoordelingsschema, dat meestal in de kerstvakantie wordt gemaakt. Een opvallend kenmerk, dat bij elk schema terugkeert is het maken van het verslag zelf. Elk verslag moet een leesbaar geheel vormen en onafhankelijk van de opdracht te lezen zijn. Bij het schema dat we hebben gemaakt bij de wiskunde B-dag van 2005, is de helft van de te behalen punten te verdienen met het maken van het verslag. De andere helft kan worden behaald door het wiskundige gedeelte. Als het wiskundige gedeelte meer beoordeeld zou worden, dan heeft het maken van een verslag geen zin. Het inleveren van de antwoorden op de opdracht is in dat geval voldoende en de wiskunde B-dag is dan een soort proefwerk geworden.

De laatste jaren bestaat de wiskunde B-dag opdracht uit gestructureerde inleidende opdrachten die ieder een 'echt' antwoord hebben, gevolgd door een open opdracht. Veel leerlingen hebben hierdoor de neiging om de opdracht te zien als het beantwoorden van een aantal sommen, waardoor het verslag niet meer is dan een beantwoording van de opdrachten. Het ingeleverde werk is dan geen verslag meer en deze leerlingen kunnen dan nooit meer, volgens onze beoordeling, op een voldoende beoordeling komen, ook niet als alle wiskundige zaken kloppen.

Als beoordelaar van de wiskunde B-dag bekroop mij het gevoel dat onze eis om een leesbaar geheel te maken bij de wiskunde B-dag opdracht, te hoog gegrepen was. De gestructureerde inleidende opdrachten vragen wellicht om een korte manier van beantwoorden, waardoor het maken van een verslag op de achtergrond verdwijnt.

Als vakdidacticus wiskunde aan het ILO te Amsterdam heb ik de wiskunde B-dag opdracht ook laten maken door mijn studenten, met de opdracht om te proberen om er een leesbaar verslag van te maken. Als het maken van een leesbaar verslag ook voor een wiskundige te moeilijk zou zijn, dan was mijn eis aan de leerlingen (zeker) te hoog.

De uitwerking van een van mijn studenten is in dit artikel opgenomen. Sjors Ketelaars laat hiermee zien dat het mogelijk is om een verslag te maken bij een wiskunde B-dag opdracht, ook als de opdracht gesloten begint. Mijn leerlingen op het Jac P Thijsse zullen dus ook het komende jaar weer de opdracht krijgen om er een leesbaar geheel van te maken en dat zal ook dan weer voor een heel groot gedeelte de beoordeling bepalen.

Het duivenhokprincipe

Het integraal weergegeven werkstuk van Sjors Ketelaars:

Het duivenhokprincipe leren kennen

Dit werkstuk gaat over het zogenaamde duivenhokprincipe. Het duivenhokprincipe wordt veel toegepast in de wiskunde, maar uit dit werkstuk zal blijken dat het ook van pas kan komen in het dagelijks leven.

Het duivenhokprincipe is wat het zegt: een principe. Het is geen al dan niet alomvattende wiskundige theorie, maar het is ook geen truc of foefje dat je kunt toepassen zonder dat je weet waarom. Het is eigenlijk een gedachte, een logisch sluitende gedachte. Omdat het duivenhokprincipe geen theorie is, gaat dit werkstuk dus niet over een theorie. Er worden daarom geen stellingen bewezen, waarbij elke stelling de vorige nodig heeft in het bewijs. Eerder passeren allerlei voorbeelden en toepassingen de revue, die op het oog geen verband met elkaar houden.

Jarig

Beschouw de volgende uitspraken:

1. In een groep van negen mensen zijn er altijd twee op dezelfde dag van de week jarig.
2. In een groepje van vijftien mensen zijn er altijd twee

van hetzelfde geslacht op dezelfde dag van de week jarig.
3. In het Nederlands jeugdelftal voor voetballers onder de zeventien jaar zitten zeker twee spelers van dezelfde leeftijd.

Deze uitspraken zijn alle waar, en alle vanwege hetzelfde principe. Ik licht dit toe met het eerste voorbeeld. We passen het idee toe uit de inleiding:
Stop alle mensen die op maandag jarig zijn in hok 1.
Stop alle mensen die op dinsdag jarig zijn in hok 2.
...
Stop alle mensen die op zondag jarig zijn in hok 7.
Als we alle mensen nu in een ander hok willen plaatsen, dan zouden we negen hokken nodig hebben. Maar we hebben maar zeven hokken! Dus er zijn tenminste twee mensen op dezelfde dag jarig. Beschouw nu de uitspraak:
4. In een groep van twaalf mensen zijn er altijd twee die in dezelfde maand jarig zijn.

Is dit een ware uitspraak? Nee, er gaan immers twaalf maanden in een jaar en deze twaalf mensen kunnen dus best elk in een andere maand jarig zijn. Nog een uitspraak:
5. In Amsterdam zijn zeker acht mensen met hetzelfde aantal haren op hun hoofd.

Om te weten of deze uitspraak waar is, is het nodig te weten dat een mens ten hoogste ongeveer 100.000 haren op zijn hoofd heeft. Omdat in Amsterdam 750.000 mensen wonen, zijn er volgens het duivenhokprincipe dus minstens twee mensen met hetzelfde aantal haren.

Getallen
Je hebt de gehele getallen 1 tot en met 10 tot je beschikking. Uit deze getallen kies je er zes zoals je wilt. Dan geldt:
Bewering 1: *Welke zes getallen je ook kiest, er zijn zeker twee getallen bij die het getal 11 als som hebben.*
Bewijs: Men kan de getallen 1 tot en met 10 verdelen in de verzamelingen $\{1, 10\}$, $\{2, 9\}$, $\{3, 8\}$, $\{4, 7\}$, $\{5, 6\}$, die alle bestaan uit twee getallen die som 11 hebben. Kies je nu zes getallen, dan moet je volgens het duivenhokprincipe uit tenminste één verzameling twee getallen kiezen. Die hebben dan som 11.

Het principe nader belicht

Nog meer getallen
Je hebt de getallen 1 tot en met 100 tot je beschikking. Daaruit kies je er willekeurig 51. Dan gelden de volgende uitspraken.
Bewering 2:
1. Er is een tweetal bij de gekozen 51 getallen waarvan de som 101 is.
2. Er zijn twee getallen in de gekozen 51 die buurgetallen zijn.
3. Er is een tweetal getallen in de gekozen 51 die een verschil van 50 hebben.

Bewijs:
1. Voor de eerste uitspraak verdelen we de getallen in de verzamelingen $\{1, 100\}$, $\{2, 99\}$, $\{3, 98\}, \ldots, \{50, 51\}$. Dit zijn 50 verzamelingen. Kiezen we 51 getallen uit de getallen 1 tot en met 100, dan moeten we volgens het duivenhokprincipe uit tenminste één van deze verzamelingen twee getallen kiezen. Die hebben dan som 101.
2. We stoppen de getallen 1 tot en met 100 nu in de verzamelingen $\{1, 2\}, \{3, 4\}, \ldots, \{99, 100\}$. Dit zijn 50 verzamelingen van steeds twee buurgetallen. Het duivenhokprincipe dwingt ons bij een keuze van 51 getallen uit 1 tot en met 100 tot het kiezen van twee getallen in dezelfde verzameling.
3. Verdeel de getallen 1 tot en met 100 nu in de verzamelingen $\{1, 51\}, \{2, 52\}, \{3, 53\}, \ldots, \{50, 100\}$. Weer dezelfde redenering: door 51 getallen te kiezen uit 1 tot en met 100, moeten we tenminste één keer twee getallen uit dezelfde verzameling kiezen.

Getaltheorie
Bewering 3: *Van elke acht getallen verschillen er twee een zevenvoud.*
Bewijs: Beschouw voor de acht getallen $x_1, \ldots, x_8$ de resten bij deling door 7 en noem deze resten $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_8$.
Er geldt voor $1 \leq i \leq 8$: $\underline{x}_i \in \{0, 1, \ldots, 6\}$.
We hebben hier dus acht resten die elk in een verzameling van zeven elementen liggen. Dus, volgens het duivenhokprincipe, zijn tenminste twee van die acht resten gelijk. Preciezer: er bestaan i en j met $1 \leq i, j \leq 8$ en $i \neq j$ zodat: $\underline{x}_i = \underline{x}_j$

Het duivenhokprincipe gebruiken: vier voorbeelden

In deze paragraaf behandelen we vier voorbeelden, die elk wat moeilijker zijn dan we tot dusver hebben gezien.

Voorbeeld 1: grote gezinnen
Gezinnen met twee kinderen zijn niet allemaal hetzelfde. Jongen of meisje, en de volgorde van leeftijd kan ook verschillen. Er zijn vier mogelijkheden: JJ, JM, MJ, MM. Dit noemen we de jongens-meisjes-structuur of kortweg de samenstelling van jongens en meisjes.
Volgens het duivenhokprincipe heb je dus vijf gezinnen nodig om er zeker van te zijn dat de samenstelling van jongens en meisjes in tenminste twee gezinnen hetzelfde is. Bij een gezin van drie kinderen zijn er $2^3 = 8$ mogelijke soorten gezinnen en zijn er dus negen nodig om er zeker van te zijn dat twee gezinnen overeenstemmen. Bij een gezin van vier kinderen zijn er $2^4 = 16$ soorten gezinnen en heb je er dus zeventien nodig. In Nederland zijn ongeveer 2000 gezinnen met acht kinderen of meer onder de 25 jaar. Als we van al deze gezinnen de acht oudste kinderen beschouwen, dan bestaan er $2^8 = 256$ mogelijke samenstellingen. Dus er zijn zeker twee gezinnen (waarschijnlijk zelfs veel meer ...) met dezelfde samenstelling bij de acht oudste kinderen.

Stel dat een tv-omroep een uitzending wil maken over gezinnen met tien kinderen. Ze willen twee gezinnen vergelijken die dezelfde jongens-meisjesstructuur hebben. Zal dat lukken? Er zijn $2^{10} = 1024$ mogelijke gezinnen van tien kinderen. Van de ongeveer 2000 gezinnen met acht kinderen of meer zullen de meeste gezinnen uit acht of negen kinderen bestaan. Dat betekent dat er waarschijnlijk niet 1024 gezinnen met tien of meer kinderen bestaan, maar minder. Of er dan toch per toeval twee gezinnen zijn met dezelfde jongens-meisjesstructuur is niet te zeggen, maar waarschijnlijk is het niet.

Voorbeeld 2: getaltheorie

Nu een wat algebraïscher voorbeeld. We hebben de beschikking over de getallen $1, 2, 3, \cdots, 99, 100$. Uit die verzameling kiest iemand willekeurig 55 verschillende getallen.
Bewering 4:
1. Er zijn twee getallen bij met verschil 9.
2. Er zijn twee getallen bij met verschil 10.
3. Er zijn twee getallen bij met verschil 12.
4. Er zijn twee getallen bij met verschil 13.
Bewijs: Kies 55 getallen tussen 1 en 100:
$A : 1 \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_{55} \leq 100$.
Er 9 bij optellen geeft:
$B : 1 \leq x_1 + 9 < x_2 + 9 < \ldots < x_{55} + 9 \leq 109$.
Er zijn nu 55 getallen x in A en 55 getallen $x + 9$ in B, en alle getallen uit A en B zijn kleiner of gelijk aan 109. Omdat alle getallen in A ongelijk zijn aan elkaar en alle in B ook, is er dus een $x_i \in A$ zodat $x_i = x_j + 9 \in B$.
Voor $n = 10, 12, 13$ gaat deze vlieger niet op, maar daar kunnen we wel een andere redenering toepassen.
Elke verzameling S van $2n$ opeenvolgende getallen
$S = \{a, a + 1, \ldots, a + n - 1, a + n, a + n + 1, \ldots, a + 2n - 1\}$
is te verdelen in paren getallen waarvan het verschil gelijk aan n is:
$\{a, a + n\}, \{a + 1, a + n + 1\}, \ldots, \{a + n - 1, a + 2n - 1\}$.
Het duivenhokprincipe geeft nu dat we niet meer dan n getallen kunnen kiezen zonder ook een van deze paren en dus twee getallen met verschil n te kiezen. Dit geldt ook als we meer dan n getallen kiezen of als S minder dan $2n$ getallen bevat.
1. Geval $n = 9$. Verdeel $\{1, 2, \cdots, 100\}$ in zes verzamelingen $\{1, \ldots, 18\}, \{19, \ldots, 36\}, \{37, \ldots, 54\}$,
$\{55, \ldots, 72\}, \{73, \ldots, 90\}, \{91, \ldots, 100\}$.
Omdat $55 = 54 + 1 = 6 \cdot 9 + 1$ moeten we in tenminste één van deze verzamelingen tien getallen kiezen. In die verzameling moeten we dus tenminste twee getallen kiezen met verschil $n = 9$.
2. Geval $n = 10$. We hebben nu $\{1, \ldots, 20\}$,
$\{21, \ldots, 40\}, \{41, \ldots, 60\}, \{61, \ldots, 80\}, \{81, \ldots, 100\}$
Er geldt $55 = 5 \cdot 10 + 5$, dus in tenminste één van deze verzamelingen moeten we elf getallen kiezen.
3. Geval $n = 12$. Verdeel in $\{1, \ldots, 24\}, \{25, \ldots, 48\}$,
$\{49, \ldots, 72\}, \{73, \ldots, 96\}, \{97, \ldots, 100\}$.
Zelfs na kiezen van alle vier de laatste elementen houden we $55 - 4 = 51 > 4 \cdot 12$ elementen om te kiezen over.
4. Geval $n = 13$. Verdeel in $\{1, \ldots, 26\}, \{27, \ldots, 52\}$,
$\{53, \ldots, 78\}, \{79, \ldots, 100\}$.

Voorbeeld 3: kennissen tellen

In een zaal bevinden zich 50 mensen. Ze kennen allemaal wel een of meer van de anderen in de zaal, maar hoeveel precies is onbekend.
Bewering 5: *Er zijn twee mensen in de zaal, die hetzelfde aantal kennissen in de zaal hebben.*
Bewijs: Iedereen kent zichzelf. Omdat iedereen ook tenminste één ander persoon kent, kent iedereen dus tenminste twee personen. Er zijn 50 mensen in de zaal, dus iedereen kent een aantal personen dat tussen twee en 50 ligt. Kortom, het aantal mensen dat een willekeurige persoon uit de zaal kent is een element uit de volgende verzameling van 49 elementen: $A = \{2, 3, 4, \ldots, 49, 50\}$. Nu zijn er 50 mensen in totaal. Wegens het duivenhokprincipe kennen twee mensen dus hetzelfde aantal mensen.

Voorbeeld 4: nogmaals getaltheorie

Stel we hebben twee gehele getallen a, b. We noteren $a|b$ als a een deler is van b, oftewel als er een geheel getal c bestaat zodat $b = ac$. Spreek $a|b$ uit als: 'a deelt b'.
Bewering 6: *Zij S een deelverzameling van $n + 1$ elementen uit de verzameling $\{1, 2, \ldots, 2n\}$.*
Dan bevat S tenminste twee elementen a, b met $a|b$.
Bewijs: Schrijf elk element $s \in S$ als $s = 2^r s_0$ met s_0 oneven. Er zijn n oneven getallen in $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ en omdat S precies $n + 1$ elementen bevat, impliceert het duivenhokprincipe dat er tenminste twee elementen a, b zijn met hetzelfde oneven deel.

Het Kobusprobleem

Het Kobusprobleem. Een eerste verkenning

Kobus werkt bij een groothandel in ijzerwaren waar zakken spijkers in gehele kilo's worden verkocht. Op een middag bestellen twee klanten elk een grote lading spijkers. Meer spijkers dan de ijzerhandel heeft op dat ogenblik. Dus de baas geeft Kobus de opdracht om elke klant evenveel te verkopen. In het magazijn aangekomen, vindt Kobus tien zakken met verschillend gewicht, die niet opengemaakt mogen worden.

Zakken sorteren: de eerste stappen

Stel je voor dat de tien zakken de volgende aantallen kilogram spijkers bevatten:
1, 2, 5, 6, 11, 12, 17, 18, 50, 100.
Hoe lost Kobus dan het probleem dan op? Wel, bijvoorbeeld zo: $5 + 6 + 100 = 50 + 18 + 17 + 12 + 11 + 1 + 2$.
En dit is niet de enige manier! Het komt echter ook voor dat Kobus een verzameling van tien zakken vindt die niet te splitsen is in twee groepen met hetzelfde gewicht. Een voorbeeld is eenvoudig te vinden. Neem bijvoorbeeld negen zakken van even gewicht en één zak van oneven gewicht: 1, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18.

De som van de gewichten van de groep met alleen even gewichten is dan even, terwijl de som van de groep zakken waar de zak van 1 kilogram bij zit, dan oneven is. Kobus leert snel en het lukt hem vaak om twee groepen samen te stellen, die hetzelfde gewicht hebben, maar zónder de hele voorraad te gebruiken. Dat is niet erg: de baas had namelijk niet gezegd dat de hele voorraad weg moest.
Bij de aantallen kilogrammen
A : 2, 7, 13, 35, 41, 59, 72, 81, 95
en bij
B : 1, 5, 11, 23, 35, 48, 65, 69, 83, 97
vinden we bijvoorbeeld de volgende sommen. Bij A:
$2 + 7 + 72 = 81$
$7 + 41 + 59 = 35 + 72$
Bij B vinden we bijvoorbeeld:
$1 + 11 + 23 = 35$
Het is overigens goed om te beseffen dat we, uiteraard, niet twee keer dezelfde zak mogen gebruiken. Stel je maar voor dat dit het rijtje zakken is:
1, 2, 7, 13, 15, 17, 24, 28, 35, 99
en dat we de volgende gelijkheid vinden:
$13 + 15 + 28 = 15 + 17 + 24$.
Kobus kan deze oplossing niet gebruiken, want hij kan die ene zak met 15 kg niet naar twee klanten sturen. Toch heeft Kobus in dit geval wel een oplossing. Het enige wat hij hoeft te doen, is de zak met 15 kg weglaten:
$13 + 28 = 17 + 24$
We kunnen ook kijken naar situaties met andere aantallen zakken dan tien en een ander maximumgewicht dan 100 kg. Als ze mogen worden gekozen uit de getallen 1, 2, . . . , 100, dan is het niet moeilijk om een drietal of een viertal te vinden waarbij geen oplossing kan worden gevonden. Neem bijvoorbeeld aan dat de zakken zijn:
1, 26, 60, 100. In dit rijtje van vier getallen zijn dus niet twee groepjes te vinden met dezelfde som. Bij maximumgewicht 100 kg is het Kobusprobleem voor vier zakken dus niet altijd oplosbaar.

Het Kobusprobleem wiskundig onderzocht

We gebruiken het duivenhokprincipe om te laten zien dat er altijd een oplossing bestaat als de gewichten gekozen worden uit de getallen 1, 2, 3, . . . , 100 en er tien zakken gekozen worden.

Definities en inleiding
Maar eerst voeren we een paar begrippen in. We beschouwen een rijtje getallen, zoals 1, 2, 4.
Definitie 1: *Een rijtje waarin geen twee deelrijtjes te vinden zijn met gelijke som, heet een* dubbelsom-vrij rijtje. *Verder noemen we het aantal elementen in het rijtje de lengte van het rijtje en het grootste getal in het rijtje het* maximum.
Zo is het rijtje 1, 2, 4 een dubbelsom-vrij rijtje van lengte 3 en met maximum 4.

Definitie 2: *G(n) is gedefinieerd als het kleinste getal dat als maximum kan optreden van een dubbelsom-vrij rijtje van lengte n.*
Voorbeeld: Het rijtje 1, 2, 3 is niet dubbelsom-vrij, want $1 + 2 = 3$. Ons rijtje 1, 2, 4 is wel dubbelsom-vrij, dus we vinden $G(3) = 4$.
Nog een voorbeeld: Er geldt $G(4) > 6$, want geen van de rijtjes met $n = 4$ en $M = 6$ is dubbelsom-vrij. Neem bijvoorbeeld 1, 2, 4, 6. Er geldt $2 + 4 = 6$, dus dit rijtje is niet dubbelsom-vrij. Door uitschrijven van alle mogelijke sommen is na te gaan dat het rijtje 3, 5, 6, 7 wel dubbelsom-vrij is. Het programma op www.fi.uu.nl/wisbdag helpt bij deze berekeningen. We vinden dus: $G(4) = 7$.

De hoofdstelling: een oplossing van het probleem?
Lemma 1: *Stel we kiezen een rijtje van n getallen uit 1, 2, . . . , M. Dan heeft het Kobusprobleem een oplossing indien*

$$2^n > Mn - \tfrac{1}{2}n(n-1)$$

Bewijs: Uit een rijtje van n getallen zijn $2n$ sommen te maken. We kunnen immers elk getal uit het rijtje óf wel óf niet kiezen en elke keuze uit twee getallen vermenigvuldigt het aantal mogelijke sommen met factor 2.
Verder zijn er in totaal

$$Mn - \tfrac{1}{2}n(n-1)$$

mogelijke somuitkomsten. De kleinste somuitkomst is namelijk gelijk aan 1 en de grootste is gelijk aan

$$(M-(n-1)) + \ldots + M = Mn - \sum_{k=1}^{n-1} k$$

$$= Mn - \tfrac{1}{2}n(n-1)$$

Wegens het duivenhokprincipe zijn er dus geen dubbelsom-vrije rijtjes van lengte n en maximum M als

$$2^n > Mn - \tfrac{1}{2}n(n-1)$$

Opmerking 1: Even terug naar Kobus. Bij Kobus was $n = 10$ en $M = 100$. Het criterium uit lemma 1 wordt bij hem dus $2^{10} = 1024 > 955 = 100 \cdot 10 - \frac{1}{2} \cdot n(n-1)$
Er zijn dus geen dubbelsom-vrije rijtjes van lengte 10 en maximum 100. Met andere woorden: Kobus vindt altijd wel twee groepen van zakken spijkers die even zwaar zijn.
Als Kobus negen zakken spijkers had gevonden in plaats van tien, vindt hij dan ook altijd twee groepen zakken met hetzelfde totaalgewicht? Het lemma geeft nu geen uitsluitsel. Immers nu is $n = 9$ en $M = 100$ en dus
$2^n = 2^9 = 512 \not> 864 = 100 \cdot 9 - \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 8 = Mn - \frac{1}{2}n(n-1)$
We weten het dus niet!
Opmerking 2: Het criterium uit lemma 1 is ook te formuleren als

$$M < \frac{2^n}{n} + \tfrac{1}{2}(n-1)$$

Dus als deze ongelijkheid geldt, dan hebben alle rijtjes van lengte n een dubbele som. Dus voor het vinden van een rijtje zonder dubbele som moeten we het maximum M groter kiezen dan zulke M, met andere woorden er moet gelden

$$\frac{2^n}{n} + \tfrac{1}{2}(n-1) \le G(n)$$

Met deze ongelijkheid hebben we dus een ondergrens gevonden voor $G(n)$. We gaan nu ook een bovengrens bepalen. Daarvoor hebben we eerst een lemma nodig.

Het rijtje 3, 5, 9 is een dubbelsom-vrije rij. Door deze getallen met twee te vermenigvuldigen en er het getal 1 bij te zetten, verkrijgen we een nieuw dubbelsom-vrij rijtje: 1, 6, 10, 18. Dit is de afspiegeling van een algemeen principe.

Lemma 2: *Zij $a_1, a_2, \ldots, a_n$ een dubbelsom-vrij rijtje. Dan is het rijtje $2m + 1, 2a_1, 2a_2, \ldots, 2a_n$ ook dubbelsom-vrij.*

Bewijs:

Er geldt niet $2a_{i_1} + \ldots + 2a_{i_j} = 2a_{i_{j+1}} + \ldots + 2a_{i_n}$ want dat zou impliceren dat $a_{i_1} + \ldots + a_{i_j} = a_{i_{j+1}} + \ldots + a_{i_n}$en $a_1, a_2, \ldots, a_n$ was dubbelsom-vrij. Verder kan ook geen enkele som van getallen uit het rijtje $2m+1, 2a_1, 2a_2, \ldots, 2a_n$ gelijk zijn aan $2m+1$ plus een som van andere getallen uit het rijtje $2m+1, 2a_1, 2a_2, \ldots, 2a_n$, want elk zo een som is even en de som met $2m+ 1$ is oneven.

Lemma 3: *Elke rij 1, 2, 4, . . . , 2n-1 is dubbelsom-vrij voor elke n.*

Bewijs: Het bewijs gaat met inductie naar n.

(i) Voor $n = 2$ hebben we het rijtje 1, 2 en dat is inderdaad dubbelsom-vrij.

(ii) Het rijtje 1, 2, 4, . . . , 2n-2 is dubbelsom-vrij en dus is het rijtje 1, 2, 4, . . . , 2n-1 ook dubbelsom-vrij, wegens lemma 2.

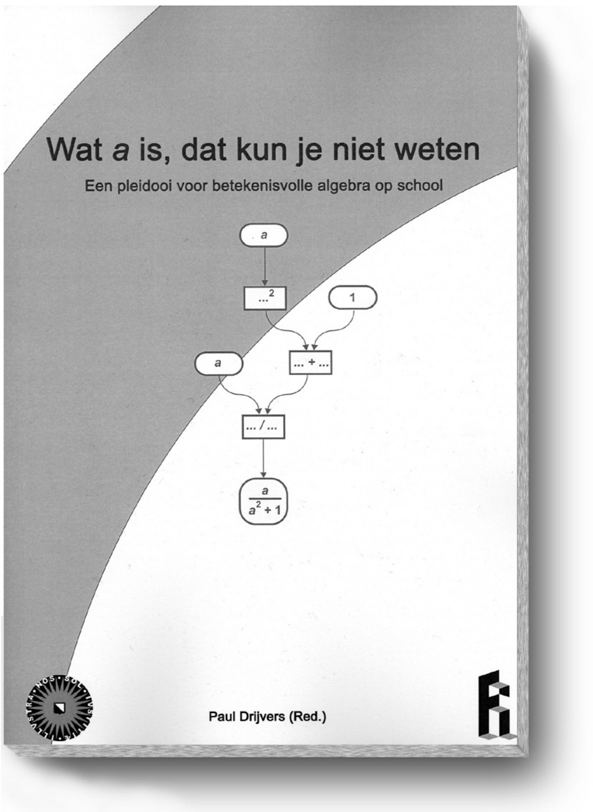
We komen nu bij het eindresultaat. De volgende stelling geeft een onder- en bovengrens voor $G(n)$.

Stelling 1:

$$\frac{2^n}{n} + \tfrac{1}{2}(n-1) \le G(n) \le 2^{n-1}$$

Bewijs: De ondergrens is al eerder bepaald en de bovengrens volgt direct uit lemma 3.

Sjors Ketelaars
ILO, Amsterdam
Lidy Wesker
Jac P Thijsse College, Castricum, ILO, Amsterdam



Verschenen:

Wat a is, dat kun je niet weten
Een pleidooi voor betekenisvolle algebra op school
Paul Drijvers (red)

Schoolalgebra staat volop ter discussie. Wat is het doel van algebronderwijs en op welke manier kan dat in de eenentwintigste eeuw worden gerealiseerd? Met dit boek neemt het Freudenthal Instituut stelling in deze discussie.

De realistische benadering van algebraonderwijs is het uitgangspunt voor een pleidooi voor betekenisvolle algebra op school. Moeilijkheden en mogelijkheden van schoolalgebra worden voor verschillende schooltypen en vanuit verschillende invalshoeken besproken. Daarmee geeft het boek een overzicht van recente ontwikkelingen en worden lijnen uitgezet naar de toekomst. Op deze manier kan dit boek een bijdrage leveren aan de vernieuwing van het algebraonderwijs, waaraan blijkens de geluiden uit het veld behoefte bestaat.

U kunt *Wat a is, dat kun je niet weten* bestellen via de webwinkel van het Freudenthal Instituut (www.fi.uu.nl)

Prijs: € 15,00