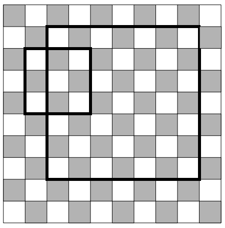
Wat te bewijzen is (32)

Rubriek

Ooit trof ik in Bennekom op een feestmarkt een stand aan, waar een dambord stond opgesteld met de vraag: *hoeveel vierkanten bevat dit dambord?* Ik herinner me niet of er een nadere toelichting bij stond, maar op de een of andere manier was het duidelijk dat het om vierkante groeperingen van velden ging zoals in de figuur.



Dit is een aardig, tamelijk bekend probleem, waar je gerust twaalfjarige leerlingen aan bloot kan stellen.
Om te beginnen zijn er de 100 velden en om te eindigen is er het gehele dambord. Daartussen zijn er 9^2 twee-bij-twee, 8^2 drie-bij-drie en tenslotte 2^2 negen-bij-negen-vierkanten op het bord, samen wordt dat:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + 9^2 + 10^2 = 385$$

Sjef van Ginsbergen bedacht een leuke uitbreiding voor zijn leerlingen in 4 VWO: *hoeveel rechthoeken (vierkanten meegerekend) zijn er op het dambord?*
Via meer of minder ingewikkelde telstrategieën ontdekten sommige leerlingen dat er bij variabele grootte van het 'dambord' steeds een kwadraat uit komt.
Beperk ik me weer even tot het tien-bij-tien-dambord, dan is de ultieme strategie de volgende: er zijn 11 horizontale en 11 verticale lijnen op het bord. Een rechthoek is bepaald door een keuze van 2 verticale en 2 horizontale lijnen, dus het aantal rechthoeken is:

$$\binom{11}{2} \times \binom{11}{2} = 55^2 = 3025$$

Zonder gebruik van het binomiaalcoëfficiënt kan het ook. Als de basis van de rechthoek langs de onderzijde van het bord ligt, zijn er voor de bovenkant nog 10 horizontale lijnen kandidaat; ligt de basis één veld hoger, dan zijn er voor de bovenkant nog 9 kandidaatlijnen, enzovoort. Voor de verticale grenzen van de rechthoek geldt iets dergelijks en zo kom ik tot het kwadraat van het tiende zogenaamde driehoeksgetal:

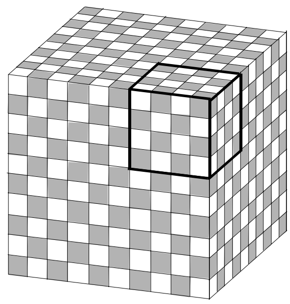
$$(1 + 2 + \ldots + 9 + 10)^2 = 3025$$

Ik merk op dat zonder enig rekenwerk of kennis van algebra kon worden voorspeld dat

$$(1 + 2 + \ldots + 9 + 10)^2 > 1^2 + 2^2 + \ldots + 9^2 + 10^2.$$

Immers, er zijn meer rechthoeken dan vierkanten op het dambord.

Deze twee problemen kunnen op voor de hand liggende wijze worden uitgebreid naar de ruimte: *hoeveel kubussen respectievelijk blokken bevat een 'damkubus'*?



De antwoorden op deze vraag zijn dan achtereenvolgens:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + 9^3 + 10^3 = 3025$$

en

$$(1 + 2 + \ldots + 9 + 10)^3 = 55^3 = 166375$$

Het valt natuurlijk op dat het eerste getal hier juist gelijk is aan de tweede uitkomst bij het dambord. Variatie van het aantal velden leidt al gauw tot het vermoeden dat dit geen toeval is. En zo geven dambord en kubus aanleiding tot de hypothese dat voor elk natuurlijk getal n geldt:

$$(1 + 2 + \ldots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$$

Deze fraaie identiteit heb ik in een vorige aflevering van deze rubriek (13) al eens in het zonnetje gezet; daarbij werden een paar kijk-en-zie-bewijzen opgevoerd.

Bewijs met driehoeksgetallen

Onlangs vond ik nog een eenvoudig bewijs en wel een dat steunt op een eigenschap van de rij driehoeksgetallen:

1, 3, 6, 10, 15, …

De som van twee opvolgende driehoeksgetallen is steeds een kwadraat: $d_1 + d_2 = 4$, $d_2 + d_3 = 9$, $d_3 + d_4 = 16$, ...
Dit valt te snappen via plaatjes en zonder woorden:

Een bewijs met algebra:

$$d_{n-1} + d_n = \tfrac{1}{2}n(n-1) + \tfrac{1}{2}(n+1)n = \tfrac{1}{2}n \cdot 2n = n^2$$

Vanzelfsprekend geldt ook $d_n - d_{n-1} = n$
Vermenigvuldig dit nu met $d_n + d_{n-1} = n^2$ en er komt:

$$(d_n - d_{n-1})(d_n + d_{n-1}) = d_n^2 - d_{n-1}^2 = n^3$$

Het verschil van de kwadraten van twee opvolgende driehoeksgetallen is blijkbaar steeds een derde macht!
Nu nog het ‘telescoopprincipe’ toegepast:

$$\underbrace{d_1^2}_{1^3} + \underbrace{(d_2^2 - d_1^2)}_{2^3} + \underbrace{(d_3^2 - d_2^2)}_{3^3} + \ldots + \underbrace{(d_n^2 - d_{n-1}^2)}_{n^3} = d_n^2$$

en de bijzondere identiteit is aangetoond!

De kwadratensom

Generalisatie van het vierkanten-op-het-dambord-probleem naar het aantal velden vraagt om een formule voor de som van de kwadraten van de getallen 1 tot en met *n*.
In een van zijn boeken bewijst Archimedes een stelling die in moderne wiskundetaal neerkomt op:

$$3(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) = (n+1) \cdot n^2 + (1 + 2 + \ldots + n)$$

In het rechterlid van deze identiteit kan men in twee gedaanten het driehoeksgetal d_n herkennen:

$$3(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) = 2n \cdot d_n + d_n$$

Het bewijs van de formule van Archimedes kan nu gebeuren via de productrij van de rij oneven getallen met de rij driehoeksgetallen, dat wil zeggen de rij *t* met:

$$t_n = (2n+1) \cdot d_n$$

Trek hier maar

$$t_{n-1} = (2n-1) \cdot d_{n-1}$$

van af en er komt:

$$\begin{aligned} t_n - t_{n-1} &= 2n(d_n - d_{n-1}) + (d_n + d_{n-1}) \\ &= 2n \cdot n + n^2 = 3n^2 \end{aligned}$$

Via de telescoopsom

$$\underbrace{t_1}_{3 \cdot 1^2} + \underbrace{(t_2 - t_1)}_{3 \cdot 2^2} + \underbrace{(t_3 - t_2)}_{3 \cdot 3^2} + \ldots + \underbrace{(t_n - t_{n-1})}_{3n^2} = t_n$$

volgt nu inderdaad

$$3(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) = (2n+1) \cdot d_n$$

en hieruit:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

Een constructief bewijs

In de laatste gedaante wordt de formule van Archimedes tegenwoordig vaak aangetroffen in studieboeken, met de opdracht om die met volledige inductie te bewijzen.
Daartegen, net als trouwens tegen het bewijs dat ik hier gegeven heb, kan als bezwaar worden aangetekend dat het uitgaat van een reeds gevonden formule en dat een analyse van *‘hoe kom ik eraan’* ontbreekt.
Daarom geef ik hier nog een tweede bewijs dat dit bezwaar niet heeft. Hierbij spelen opnieuw de driehoeksgetallen een toonaangevende rol.

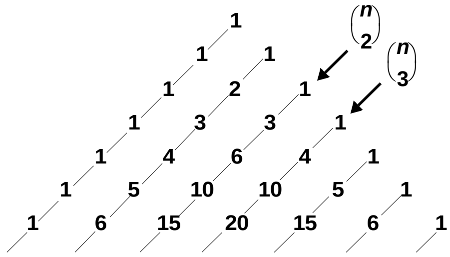
Omdat elk kwadraat de som is van twee opvolgende driehoeksgetallen geldt eenvoudig:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = 2 \cdot (d_1 + d_2 + \ldots + d_{n-1}) + d_n$$

Het komt er nu op aan de som van een serie opeenvolgende driehoeksgetallen uit te drukken in *n*.
In het begin van dit stukje is opgemerkt dat driehoeksgetallen ook speciale binomiaalcoëfficiënten zijn:

$$d_n = \binom{n+1}{2}$$

En voor sommen van binomiaalcoëfficiënten is de driehoek van Pascal het wondermiddel.



De diagonalen in de driehoek bevatten de getalrijen die kunnen worden beschreven door de formules:

$$u_n = \binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3}, \ldots$$

Omdat elk getal in de driehoek van Pascal de som is van zijn twee bovenburen, bevat nu elke rij de partiële sommen van de rij die er pal boven staat.
Zo geldt bijvoorbeeld:

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \ldots + \binom{n}{2} = \binom{n+1}{3}$$

ofwel:

$$d_1 + d_2 + \ldots + d_{n-1} = \tfrac{1}{6}(n+1) \cdot n \cdot (n-1)$$

De afwikkeling naar de formule voor de kwadratensom is nu louter een kwestie van algebra:

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 &= \tfrac{1}{3}(n-1) \cdot n \cdot (n+1) + \tfrac{1}{2}n(n+1) \\ &= \tfrac{1}{6}n(n+1) \cdot [2(n-1) + 3] \\ &= \tfrac{1}{6}n(n+1) \cdot (2n+1) \end{aligned}$$

Driehoeksgetallen vindt men al in de Oudheid bij de Pythagoreeërs. Archimedes die een paar honderd jaar later leefde, zou hier dus gebruik van hebben kunnen maken bij zijn bewijs. Hij deed dit echter niet; zijn bewijs berust vooral op de regel $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$. Zijn verhaal is nogal ingewikkeld, maar dwingt diepe bewondering af, vooral als we bedenken dat hij niet over het middel van de algebra beschikte. Een tussenfase in Archimedes’ bewijs is de afleiding van de identiteit:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = 1n + 3(n-1) + 5(n-2) + \ldots + (2n-1)1$$

Puzzel voor de lezer: leg die identiteit uit met een tegeltjes- of stippenpatroon en voltooi dit tot een kijk-en-ziebewijs van de directe formule voor de kwadratensom.

Martin Kindt, martin@fi.uu.nl