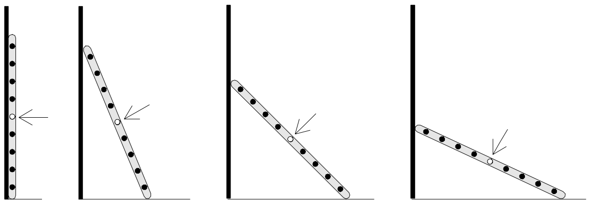
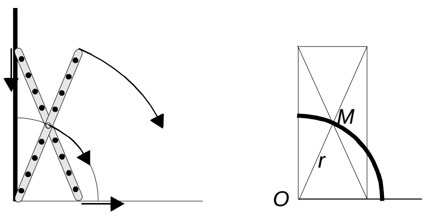
Wat te bewijzen is (33)

Rubriek

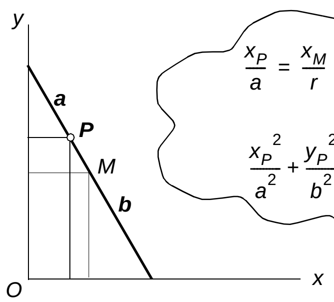
Een redelijk bekend, maar toch verrassend probleempje is het volgende. Een ladder, aan beide uiteinden voorzien van wieltjes, staat rechtop tegen een muur. Als de top langs de muur naar beneden rolt zal de voet over de vloer van de muur af bewegen. De vraag is nu: wat voor een kromme beschrijft het middelpunt van een stijl van die ladder? (of eventueel: welk oppervlak beschrijft de middelste sport?)



Het verrassende zit hem erin dat je voor je geestesoog de omhullende kromme (asteroïde) ziet ontstaan die concaaf is (bolle kant naar onder), terwijl het middelpunt een convexe kromme beschrijft, namelijk de kwartcirkel waarvan het middelpunt juist het snijpunt O van vloer en muur is en de straal gelijk is aan de helft van de lengte van de ladder. Het bewijs is eenvoudig voor wie vertrouwd is met klassieke meetkunde: bij elke scheve stand van de ladder ontstaat een rechthoekige driehoek en de zwaartelijn uit het hoekpunt met de rechte hoek is gelijk aan de helft van de schuine zijde.
Voor wie niet bekend is met die stelling is hier een alternatief: let op de veranderende rechthoeken (met hoekpunt O) waarvan de ladder een diagonaal is. De andere diagonaal draait dan om O zodat het midden M van beide diagonalen een cirkel beschrijft.



Hieruit kan nu eenvoudig worden afgeleid dat de kromme beschreven door een ander punt (zeg P) dat de ladder (met lengte $2r$) verdeelt in stukken met verhouding $a : b$, het kwart van een ellips is.



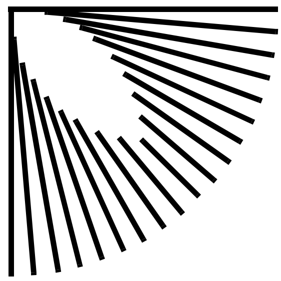
$$\frac{x_P}{a} = \frac{x_M}{r} \quad \& \quad \frac{y_P}{b} = \frac{y_M}{r}$$

$$\Downarrow$$

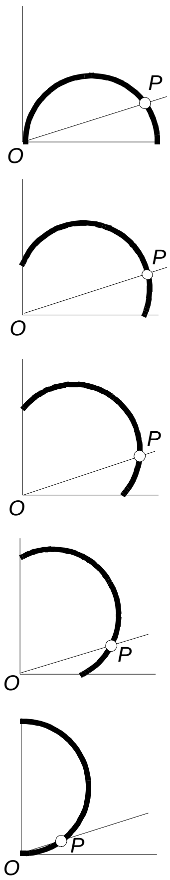
$$\frac{x_P^2}{a^2} + \frac{y_P^2}{b^2} = \frac{x_M^2}{r^2} + \frac{y_M^2}{r^2} = 1$$

Ik merk nog op dat de ellips smaller van vorm (excentrieker is), naarmate het punt P dichter bij een van de eindpunten van de glijdende ladder ligt. De eindpunten zelf beschrijven natuurlijk elk een lijnstuk.

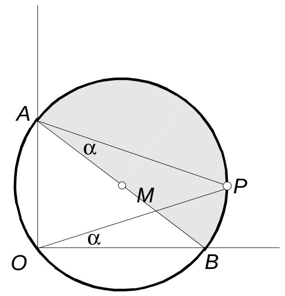
Een fraaie kerstkaart
In december 2005 ontving ik van Leon van den Broek en Saskia Oortwijn een originele en inspirerende kerstkaart. Op de voorkant was een veelkleurige stralenbundel getekend (hieronder grijs-wit afgebeeld) met als wens:
een stralend tweeduizendzes, vol beweging zonder stress.



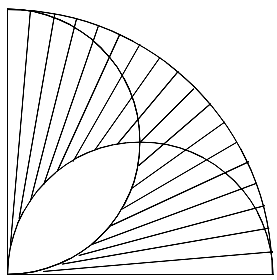
De dubbelzinnigheid van ‘stralend’ en ‘beweging’ werd mij duidelijk door de achterzijde van de kaart, waarop een echte onderzoeksopdracht was afgedrukt.
Beweeg een halve cirkel met zijn eindpunten over de benen van een rechte hoek. Elk individueel punt ervan beschrijft dan een rechte straal.
Net als op de kaart zijn hiernaast vijf standen van de halve cirkel met daarop een vast punt getekend.
Noem ik dat punt P en het hoekpunt van de rechte hoek O, dan valt op dat de lijn OP steeds dezelfde hoek met het horizontale been van de rechte hoek maakt. Op het origineel waren er kleinere stukjes van die lijntjes heel dun bijgetekend.
De uitdaging om de gedane uitspraak te bewijzen kon ik natuurlijk niet weerstaan. Het probleem riep bij mij onmiddellijk associaties op met het ladderprobleem. De middellijn (AB) van de halve cirkel glijdt immers met zijn uiteinden langs de benen van een rechte hoek. Het beslissende idee is nu om de halve cirkel uit te breiden tot een hele cirkel, die dan, vanwege de rechte hoek, in elke stand door het punt O moet gaan. Het is nu verder een kwestie van een redenering met hoeken en bogen.



De hoeken *BOP* en *BAP* zijn omtrekshoeken bij dezelfde boog en zijn dus aan elkaar gelijk.
De hoek *BAP* is echter constant van grootte (zeg α), omdat *P* een vast punt van de halve cirkel is. Conclusie: het punt *P* beweegt zich over een rechte lijn, namelijk de lijn die een hoek α met de horizontale lijn maakt.



Een interessante vraag is nu waar de extreme punten liggen van het lijnstuk dat *P* beschrijft. Stel eerst $\alpha < 45°$.
Let op de gelijkbenige driehoek *OMP* (met $|OM| = r$).
De afstand van *P* tot *O* varieert nu met de grootte van $\angle\, OMP$ en het is duidelijk dat *P* op de maximale afstand $2r$ van *O* ligt, als die hoek 180° is. In dat geval is *AP* evenwijdig met *OB*.
De afstand van *P* tot *O* is minimaal als $\angle\, OMP$ minimaal is, dus als $\angle MOP$ maximaal is. Dat laatste is dan weer het geval als $\angle MOB$ maximaal, dus 90° is. Kortom, het punt van de baan van *P* dat het dichtst bij *O* ligt, wordt in de eindstand bereikt.
Uit de symmetrie van de situatie volgt dat voor $\alpha > 45°$ het juist zo is dat *P* in de beginstand het dichtst bij *O* ligt.
Voor $\alpha = 45°$ bereikt *P* het dichtst bij *O* liggende punt van zijn baan twee keer (in begin- en eindstand).
Nu is de bedoelde link met de voorkant van de kerstwens gelegd. De daar getekende stralen zijn juist de banen van de diverse punten *P* (voor α = 0°, 5°, 10°, ..., 85°, 90°) en de extreme punten daarvan liggen op drie cirkels.
Bij $\alpha = 45°$ past het kortste lijnstuk.



Analytische aanpak
Het hier behandelde probleem kan ook analytisch worden aangepakt. De benen van de rechte hoek worden daarbij gepromoveerd tot coördinaatassen.
Stel voor het gemak $r = 1$.
Met $\angle\, MOB = \varphi$, krijgt *M* de coördinaten (cos φ, sin φ).
Uit $\angle\, BMP = 2\alpha$, volgt dan,

$$\overrightarrow{MP} = (\cos(2\alpha - \varphi),\ \sin(2\alpha - \varphi))$$

Met als gevolg:

$$\overrightarrow{OP} = (\cos\varphi,\ \sin\varphi) + (\cos(2\alpha - \varphi),\ \sin(2\alpha - \varphi))$$

Eliminatie van φ uit de vergelijkingen:

$$x = \cos\varphi + \cos(2\alpha - \varphi)$$
$$y = \sin\varphi + \sin(2\alpha - \varphi)$$

moet leiden tot een vergelijking van de baan van *P*.
Via de aloude somformules komt er:

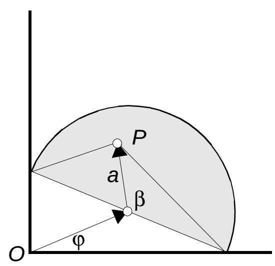
$$x = 2\cos\alpha \cdot \cos(\alpha - \varphi)$$
$$y = 2\sin\alpha \cdot \cos(\alpha - \varphi)$$

en dit leidt dan netjes tot $y = \tan\alpha \cdot x$, hetgeen in overeenstemming is met voorgaand 'synthetisch' bewijs.
Het uitvogelen van de extreme punten van de baan van *P* kan ook gebeuren met behulp van goniometrische functies, maar dat laat ik aan de liefhebber over.

Uitbreiding van het probleem.
Denkend aan de ladder, realiseerde ik me dat nu van alle randpunten van de glijdende halve cirkelschijf de baan bekend is. Ik vroeg me af hoe de baan zou zijn van een inwendig punt van de schijf. Omdat ik op dat moment Cabri niet binnen handbereik had, koos ik voor een analytische aanpak en zo kwam ik tot de voorstelling:

$$x = \cos\varphi + a \cdot \cos(\beta - \varphi)$$
$$y = \sin\varphi + a \cdot \sin(\beta - \varphi)$$

met $0 < a < 1$



In eerste instantie voerde ik deze vergelijkingen (met gekozen waarden voor *a* en β) aan mijn GR. Ik liet φ het gehele interval [0 , 2π] doorlopen, om zicht te krijgen op de aard van de kromme, en jawel, die leek verdacht veel op een ellips, scheef gelegen ten opzichte van het assenstelsel. Dat wilde ik wel verifiëren. De eliminatie van φ verloopt nu helaas minder soepel dan in de vorige situatie, want die *a* gooit roet in het eten. Maar via een andere bekende set formules lukt het toch.

$$x = (1 + a \cdot \cos\beta)\mathbf{cos}\varphi + a \cdot \sin\beta\,\mathbf{sin}\varphi$$
$$y = a \cdot \sin\beta\,\mathbf{cos}\varphi - (1 - a \cdot \cos\beta)\mathbf{sin}\varphi$$

Oplossing van achtereenvolgens **cos**φ en **sin**φ uit dit stelsel vergelijkingen en optelling van de kwadraten van de gevonden expressies met gelijkstelling aan 1, levert een kwadratische *x*,*y*-vergelijking op, zodat er zeker sprake is van een kegelsnede! En omdat de krommen op mijn GR duidelijk gesloten waren, moeten het wel ellipsen zijn.
En hoewel ik de krommen slechts bij een paar keuzen

voor a en β had gezien, was dit, vanwege de homogeniteit van de cirkelschijf, voor mij meer dan een vermoeden.
In deze tijd, waarin iedereen het heeft over het manco aan algebravaardigheid van de instromers in het hbo en wo, wilde ik mezelf nog eens bewijzen dat ik het niet verleerd ben en zo kwam ik na eliminatie van φ tot:

$$Ax^2 - Bxy + Cx^2 = (1 - a^2)^2$$

$$\text{met: } A = a^2 - 2a \cdot \cos\beta + 1$$

$$B = 4a \cdot \sin\beta$$

$$C = a^2 + 2a \cdot \cos\beta + 1$$

Hoe nu, louter vanuit uit deze voorstelling, te bewijzen dat de kromme voor elke waarde van a tussen 0 en 1 en voor elke waarde van β tussen 0 en π, een ellips is?
Om te beginnen is het direct duidelijk dat de oorsprong symmetriepunt van de kromme is, en daarmee valt de parabool als mogelijkheid af.
Als de vorm $Ax^2 - Bxy + Cx^2$ ontbindbaar is in twee lineaire factoren, moet de kromme een hyperbool of een evenwijdig lijnenpaar zijn. Dit is het geval als de discriminant $B^2 - 4AC$ niet negatief is. Het omgekeerde geldt ook, zodat ik nog slechts hoef te bewijzen dat hier de discriminant negatief is. Opnieuw algebra:

$$\begin{aligned} B^2 - 4AC &= 16a^2\sin^2\beta - 4(a^2+1)^2 + 16a^2\sin^2\beta \\ &= 16a^2 - 4a^4 - 8a^2 - 4 \\ &= -4(a^2-1)^2 \end{aligned}$$

Het is nu onomstotelijk: de discriminant is negatief voor $0 \le a < 1$ en in al die gevallen is de kromme een ellips.
Na al dat rekenwerk kan het een verademing zijn als de randgevallen aan de verwachting voldoen.
Voor $a = 0$ geldt $A = C = 1$ en $B = 0$, zodat inderdaad de verglijking $x^2 + y^2 = 1$ optreedt.
Voor $a = 1$ komt er na deling door 2:

$$(1 - \cos\beta)x^2 - 2\sin\beta \cdot xy + (1 + \cos\beta)y^2 = 0$$

en via 'overgang op de halve hoek' leidt dit tot:

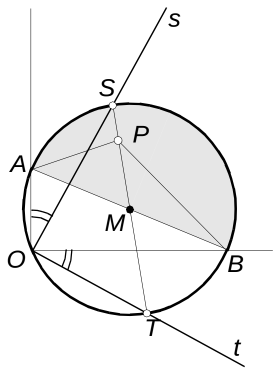
$$\sin\tfrac{1}{2}\beta \cdot x - \cos\tfrac{1}{2}\beta \cdot y = 0$$

en er is opnieuw reden voor tevredenheid.
Voor β = 0 of π vernult de coëfficiënt van xy, en komt er een ellips te voorschijn in de standaardvoorstelling.

Ik sta nog even stil bij de voorgaande berekeningen.
De belangrijkste denkstappen voor mij waren:
– *de constructie van de parametervoorstelling*
– *de organisatie van het eliminatieproces*
– *de heruitvinding van de 'elliptische voorwaarde'*
De technische uitvoering (het 'vuile' werk) had ook door een geschikt computeralgebrapakket kunnen worden uitgevoerd en persoonlijk zou ik dat ook wel prima vinden, ook al mis je dan de bevrediging van dat alles, na halsbrekende algebratoeren, op zijn pootjes terecht komt.

Er wordt thans alom propaganda gevoerd voor het onderwijzen van 'no-nonsense-algebra', dat wil zeggen voor meer oefening van basale vaardigheden. Dat snap ik wel, gelet op de negatieve ervaringen met binnenkomende studenten. Het is echter sinds lang bekend dat louter drill niet helpt als het er werkelijk toe doet en dat het inzichtblokkerend kan werken. Algebravaardig wordt je pas echt als je algebra leert toepassen.
Klassieke analytische meetkunde waarvan hier een staaltje is vertoond, is voor het ontwikkelen van algebravaardigheid zeer geschikt, misschien wel meer dan welk stuk schoolwiskunde ook. Dit zou een herinvoering van dit vak legitimeren, maar hier ligt ook een gevaar op de loer. Zonder degelijke synthetisch-meetkundige basis, vervalt de leerling al gauw tot klakkeloos gereken, dat heeft de ervaring met het voormalige vak wiskunde II wel geleerd.
En laten we wel wezen: er gaat toch niets boven een mooi inzichtelijk meetkundig bewijs, ook al lijkt dat in de ogen van sommige pragmatici minder relevant.
Daarom besluit ik deze aflevering met:

De ultieme meetkundige oplossing
Het kan ook zonder algebra! Net als bij de oplossing van het oorspronkelijke probleem (van Leon en Saskia) is het verstandig om de de halve cirkelschijf uit te breiden tot een complete cirkel die gedurende de gehele beweging door het punt O gaat.
Laat MP de cirkel snijden in S en T.



Er is eerder bewezen dat S, als punt van de halve cirkelboog, zich beweegt langs een rechte lijn door O, zeg s. Evenzo beweegt T zich langs de rechte t.
Omdat ST een middellijn van de cirkel is, staan de lijnen s en t loodrecht op elkaar.
Maar dan is het probleem teruggebracht tot dat van de glijdende ladder! De plaats van muur en vloer worden daarbij ingenomen door s en t, terwijl het lijnstuk ST de rol van ladder op zich neemt.
Met als gevolg dat P een (deel van een) ellips beschrijft, waarvan de assen langs de lijnen s en t vallen.
Dit bewijs is mede ingegeven door het werk van Frans van Schooten jr. die in 1657 schreef over de meetkundige plaats van de top van een vaste driehoek, waarvan de hoekpunten aan de basis langs de benen van een hoek (niet noodzakelijk recht!) glijden.

Martin Kindt, martin@fi.uu.nl