Na het verschijnen van het boek '*Wat a is, dat kun je niet weten*' heeft de redactie van de *Nieuwe Wiskrant* een aantal mensen benaderd om hun bespiegelingen naar aanleiding van het lezen van het boek op papier te zetten. In de hoop een 'brede maatschappelijke discussie' op gang te brengen over algebraonderwijs. Hieronder treft u de overpeinzingen van **Kees Hoogland**, **Jacob Perrenet** en **Rob van Oord** aan. Meer bespiegelingen en reacties worden op prijs gesteld!

Wel weten wat *a* is...

Kees Hoogland, APS

De publicatie geeft een degelijk overzicht van de mogelijkheden en de wensen rond algebra: rijke bronnen en doorzichten, mooie 'evidence based' opsommingen van richtingen die mogelijk werken, en van richtingen die zeker niet werken en nooit hebben gewerkt. Het concept 'betekenisvolle algebra' heeft alles in zich om een bruikbaar concept te worden voor het wiskundeonderwijs: gericht op wiskundig denken, gebruikmakend van alom aanwezig technologie, toepasbaar en voorstelbaar. Het zet in op een wiskundeonderwijs, waarmee je leerlingen voorbereidt op hun toekomst in plaats van op ons verleden. Als zo'n bronnenboek als dit ter beschikking is, dan vraag je toch in gemoede af waarom de discussie over het algebraonderwijs op dit moment nog op zoveel plaatsen op zo'n oppervlakkige manier gevoerd wordt. Misschien komt dat omdat er op dit bronnenboek als communicatiemiddel nog veel valt af te dingen. Het onderwerp, of in sommige ogen het probleem, wordt in de publicatie volledig gebracht als een wiskundeding, met eindeloze subtiliteiten, terwijl deze ontwikkeling ook gewoon een variant is op brede onderwijsontwikkelingen: betekenis geven, omgaan met modellen, omgaan met technologie, enzovoort. Die koppeling mis ik.

– De publicatie biedt een diepzinnige analyse van algebraonderwijs en een oppervlakkige analyse van algemene onderwijsontwikkeling. Zo wordt voor het algebraonderwijs in de tweede fase van HAVO en VWO een vrij fundamentele verschuiving voorgestaan van procedurele routine naar strategische vaardigheid (p.72). Maar bij een analyse van de Tweede Fase komt men niet veel verder dan 'heeft geleid tot lessen die steeds meer bestaan uit het maken van opgaven uit boeken die conceptuele moeilijkheden gladstrijken' (p.71). Zo simpel is het natuurlijk ook weer niet.
– De publicatie schakelt in de bijdragen steeds tussen de vraag naar pen-en-papier oefeningen met algebraïsche vaardigheden door met name technisch vervolgonderwijs enerzijds en de vraag van de maatschappij naar een betekenisvolle algebra anderzijds. Een visie op de toekomst kan natuurlijk niet al het actuele gemopper direct wegnemen.
– De publicatie is door de opzet zo genuanceerd dat eenieder er naar wens een ondersteuning van zijn eigen ideeën uit kan halen, terwijl er in essentie, enigszins verstopt, wel een heldere toekomstvisie wordt neergelegd. De publicatie vraagt van de lezer wel veel om die er uit te halen.

Toch zou ik de publicatie van harte aanbevelen aan iedereen die op een of andere manier betrokken is bij de invulling van de toekomst van het wiskundeonderwijs. In de publicatie wordt een 'Actie Algebra!' voorgesteld. Ik hoop snel de eerste van de daar voorgestelde activiteiten te zien. Ik zou de makers aanraden in het publieke debat wat krachtiger stelling te nemen. In de aanprijzing van deze publicatie zou de volgende zin niet misstaan: 'Wij hebben een oplossing voor al het geklaag over het algebraonderwijs: wetenschappelijk verantwoord, evidence based en toekomstgericht.' Iedereen moppert namelijk, maar niemand weet precies te vertellen wat er moet gebeuren, anders dan het pen-en-papier-oefenen van sommetjes uit het basisboek algebra.

Er moet natuurlijk zo snel mogelijk op grote schaal en fundamenteel onderzoek gedaan worden naar hoe leerlingen van nu mét volledige inzet van technologische hulpmiddelen wendbare en betekenisvolle algebraïsche kennis kunnen construeren. En dat zal ingrijpend afwijken van de manier waarop wij algebraïsche kennis hebben geconstrueerd. Juist technische universiteiten zouden toch moeten beseffen dat hun eigen toekomst dáár vanaf hangt. Je zou verwachten dat ze juist daar tonnen in zouden investeren in plaats van in entreetoetsen uit de jaren tachtig van de vorige eeuw.

Jacob Perrenet, TU Eindhoven

Algebra, hoe verder?

Nuttig, zo'n bundel met een positiebepaling van het Freudenthal Instituut in de discussie over de schoolalgebra; en lovenswaardig de *Nieuwe Wiskrant* open te stellen voor reacties. De verzameling hoofdstukken heeft mijn zicht op de problematiek zeker verbreed. Vanuit mijn perspectief van de Technische Universiteit Eindhoven is die problematiek het 'niet meer kunnen rekenen' van de eerstejaars; met als mijns inziens een belangrijke oorzaak de invoering en continue beschikbaarheid op het VWO van de grafische rekenmachine (GRM) en formulekaart. En de remedie? Niet de afschaffing van de GRM, integendeel: om de aan GRM-gebruik verbonden vernauwing van het getalbegrip tegen te gaan, zouden we juist Computer Algebra Systemen moeten invoeren, maar daarbij het ontwikkelen en onderhouden van zelfstandige rekenvaardigheden niet moeten verwaarlozen.

Het krachtigste wapen om dat te bewerkstelligen is het eindexamen. Er zou een eindexamen moeten komen, bestaande uit twee delen. In het eerste deel worden de rekenvaardigheden getoetst zonder dat gebruik van rekenapparatuur is toegestaan, in het tweede deel wordt probleemoplossen getoetst met ondersteuning. Aanbevolen vuistregel voor de selectie van te toetsen vaardigheden voor het eerste deel: de leerling moet van elk type bewerking, waarvan we het inzicht in de onderliggende structuur belangrijk vinden, de elementaire vorm zonder hulpmiddelen kunnen uitvoeren. Bij herhaalde bewerking of combinatie van bewerkingen hoeft dat niet. Het eerste en tweede deel van het examen moeten dan apart beoordeeld worden. Gelukkig zien we ook in de bundel een suggestie richting centraal examen (p.75).

En waarom dan dit alles? Waarom niet van begin af aan de machientjes het domme rekenwerk laten doen? Omdat zelfstandig routinematig kunnen rekenen nodig is voor inzicht (en omgekeerd, zie ook p.108). De basisvaardigheid is nodig voor 'symbol sense' waarvan het belang ook meermaals in de bundel wordt onderstreept (ondermeer p.75 en verder). De cognitieve psychologie heeft ons geleerd dat expertise in een domein (bijvoorbeeld algebra) onder meer inhoudt dat veelgebruikte mentale patronen een eenheid (schema) in het lange-termijngeheugen zijn gaan vormen. Een voorbeeld uit het wiskundedomein is een concreet (niet te groot) getal inclusief zijn eigenschappen of een standaardtechniek als het ontbinden in factoren van een tweedegraads polynoom. Schema's zijn bijvoorbeeld nodig voor het globaal kunnen kijken naar expressies en formules (vergelijk p.76). In het algemeen is efficiënt (wiskundig) denken en intentioneel handelen (zie p.105) zonder dergelijke patronen niet te doen, maar de vorming ervan vergt – in ieder domein – veel oefening.

Wat voor oefeningen dan? De artikelen geven al heel wat leuke voorbeelden, zoals vormen van productief oefenen (p.133), het ingaan op veel voorkomende fouten van leerlingen (p.73) en het oefenen met doelgerichte manipulaties: 'wat zou je kunnen doen en wat kies je om verder te komen?' (p.75). Maar ook het afwerken van gelijksoortige opgaven en terugkijken en structuren ontdekken heeft groot nut. En groepswerk biedt ook veel mogelijkheden.

Tot slot moet me van het hart, dat de bundel een aantal mijns inziens te weinig onderbouwde uitspraken bevat over wat goed zou zijn voor de ontwikkeling van algebraïsche vaardigheden en inzicht. In tegenstelling tot dit stukje was de ruimte voor onderbouwing immers wel aanwezig. Geeft het koppelen van algebraïsche uitdrukkingen aan rechthoekjes blijvend houvast (p.63, 107, 117, 125)? Is het standaard functieonderzoek terecht naar de achtergrond verwezen (p.127)? Helpt het functioneel verband tussen grootheden of variabelen niet meer bij de algebraïsche ontwikkeling (p.135)? Maken historische contexten het makkelijker voor de leerling (p.135)? Zonder degelijke onderbouwing met onderwijskundige en/of didactische onderzoeksresultaten overstijgt de ontwikkeling van de wiskundedidactiek niet de methode van trial-and-error. Ik wil dan ook besluiten met de stelling – nu vanuit het onderzoeksperspectief van de lerarenopleiding waar ik sinds kort bij betrokken ben – dat er veel onderzoek nodig is. Onderzoek om de complexe samenhang te begrijpen tussen algebraïsche vaardigheden, algebraïsch begrip en de digitale leeromgeving.

Rob van Oord, Coenecoop College, Waddinxveen

Overpeinzingen bij het lezen van Wat a is, dat kun je niet weten

Als doorgewinterde docent wiskunde (VWO B) onderschrijf ik van harte de inhoud van het boek van Paul Drijvers. Vooral ook de uitgebreide analyse van wat algebra is en waar vooral de problemen liggen, spreken me aan. Algebra op school moet, maar toch vooral betekenisvol. Het moeilijke daarvan is dat je vaak eerst pure algebraïsche vaardigheden moet beheersen om er betekenisvolle algebra mee te kunnen bedrijven. Ik ben er dan ook voorstander van om op het moment dat je ze nodig hebt, de 'vergeten' vaardigheden eerst op te halen en dan daarmee in de betekenisvolle situatie aan de slag te gaan.

Algebra is al jarenlang het zorgenkind van het wiskundeonderwijs. Nu ook de vervolgopleidingen steen en been klagen over het bedroevende niveau van de algebraïsche vaardigheden die de studenten aan de dag leggen, komt de discussie over de algebra op de middelbare school pas goed op gang. Er zijn volgens mij verschillende factoren die bij deze ontwikkeling een rol spelen.

Na de invoering van de basisvorming kwamen er leerlingen uit de onderbouw die veel minder algebraïsche vaardigheden kenden dan we tot dan toe gewend waren. Daar komt nog bij dat het aantal contacturen met name voor de B-leerlingen bij de invoering van de tweede fase drastisch afnam, terwijl de leerstof werd uitgebreid met Kansrekening en Statistiek. Enerzijds verwachtte je dat de leerlingen op zijn minst herkenden wanneer je een kwadratische vergelijking kan oplossen door ontbinding en wanneer de abc-formule moet worden toegepast, anderzijds ontbrak het aan tijd om een gedegen herhalingsprogramma af te werken. De werkwijzers die, voordat de eerste les gegeven werd, al voor het hele jaar af moesten zijn, kon je nauwelijks aanpassen, want de leerstof van de tweede fase zorgde voor een overvol schema. Door de invoering van de profielen en de daarbij behorende indeling van de wiskunde, kwamen er klassen 4v met uitsluitend A- en uitsluitend B-leerlingen. Zaten ze vroeger nog allemaal bij elkaar, dan kreeg je ze allemaal nog op een behoorlijk niveau.

Ook de invoering van dossiertoetsen en de daarmee gepaard gaande lesuitval tijdens de in de mode geraakte toetsweken, zette het hele programma extra onder druk. Tenslotte heeft de invoering van de grafische rekenmachine ertoe bijgedragen dat de leerlingen steeds vaker hun toevlucht nemen tot dit apparaat. In de examens staan veel opgaven die gewoon met de GR mogen worden opgelost (‘Bereken...’ in tegenstelling tot ‘Bereken exact …’), terwijl een algebraïsche aanpak misschien wel net zo snel tot een juist antwoord leidt.

Een voorbeeld

Dit jaar moest bij vraag 1 van het examen VWO-B1 opgelost worden: $200 - 180 \cdot e^{-0,29t} = 100$.

Het antwoord kan met enkele eenvoudige stappen worden berekend. Gelukkig zag ik dat van mijn leerlingen er nog heel wat het op die manier gedaan hebben, en niet de formule $Y1 = 200 - 180 \cdot e^{-0,29t}$ hebben ingevoerd in de GR en via CALC INTERSECT met Y2 = 100 het antwoord berekend hebben.

Hiervoor moet je de structuur van de formule doorzien (er zit slechts een enkelvoudige variabele in), en doorhebben dat de bordjesmethode (zie p. 61) – ik noem dat ‘Jomanda’ (= hand/vinger opleggen, bij de uitleg op het bord) – stap voor stap naar het antwoord leidt. Dat de meeste leerlingen moeite hebben met deze methode bij het oplossen van een gebroken vergelijking, hangt samen met het gebrek aan inzicht bij het rekenen met breuken.

In het boek *Wat a is, dat kun je niet weten* wordt prachtig beschreven wat er zo moeilijk is aan algebra (p. 16 e.v.). Het oefenen en bijhouden van basisvaardigheden moet hand in hand gaan met het trainen van ‘symbol sense’ (p. 20). Telkens moet de leerling een beslissing nemen over de te kiezen strategie. Om een juiste beslissing te nemen, moet hij ook inzicht in hebben in de structuur van de algebraïsche objecten, en basisvaardigheden paraat hebben om bijvoorbeeld snel een formule of uitdrukking anders, handiger, te kunnen schrijven. Ik wil de lezer een voorbeeld hiervan geven uit mijn dagelijkse lespraktijk: Enerzijds wordt van de leerlingen een aantal basisvaardigheden verwacht ($\frac{1}{a/b} = \frac{b}{a}$), en tegelijk moeten ze ook een ‘algebraïsch inzicht’ hebben, dat je $\frac{2}{x}$ kunt schrijven als $2 \cdot \frac{1}{x}$, vergelijkbaar met het inzicht dat $\frac{x}{2}$ gelijk is aan $\frac{1}{2}x$.

Deze week vroeg een leerling waarom je functies als kettingen moet kunnen schrijven. Ik hoopte dat ik duidelijk heb kunnen maken dat je alleen bij een voorschrift waarin maar één keer een x staat een ketting kunt maken, waarmee je stap voor stap een functiewaarde kunt uitrekenen, en dat bij elke ketting een omgekeerde rij schakels hoort, waarmee je dan eenvoudig kunt terugrekenen als je een vergelijking moet oplossen. Bij het oplossen van $f(x) = 53$ met $f(x) = 2x^3 - 1$ kun je dit mooi illustreren. Dat de omgekeerde ketting van

$$\boxed{\square^3} \rightarrow \boxed{\times 2} \rightarrow \boxed{-1} \rightarrow$$

de ketting (van rechts naar links lezen)

$$\leftarrow \boxed{\sqrt[3]{\square}} \leftarrow \boxed{\div 2} \leftarrow \boxed{+1}$$

is, vinden ze allemaal duidelijk. Dus terugrekenen vanuit 53 levert $53 \rightarrow 53 + 1 = 54 \rightarrow 54 \div 2 = 27 \rightarrow \sqrt[3]{27} = 3$, is geen probleem.

Toen kwam de vraag hoe de functie $k(x) = \frac{2}{x}$ met een ketting van pijlen geschreven kan worden. Ook het oplossen van de vergelijking $k(x) = 3$ met $k(x) = \frac{2}{x}$ met behulp van de omgekeerde pijlenketting lukt hen niet. Dat daarvoor eerst $\frac{2}{x}$ geschreven kan worden als $2 \cdot \frac{1}{x}$, is al het eerste probleem. De ketting wordt dan

$$\boxed{\tfrac{1}{\square}} \rightarrow \boxed{\times 2} \rightarrow .$$

Het tweede probleem is dat je moet snappen dat bij de pijl

$$\boxed{\tfrac{1}{\square}} \rightarrow$$

‘1 gedeeld door blokje’, de omgekeerde pijl ook ‘1 gedeeld door blokje’,

$$\leftarrow \boxed{\tfrac{1}{\square}}$$

is. Ik grijp dit altijd aan om het nut van de rekenmachine aan te tonen. Ik ga ervan uit dat de leerlingen nauwelijks rekenregels met breuken geleerd hebben, en zeker dat ze die in de vierde klas niet (meer) zo goed weten. Dan is het handig dat er een breukfunctie op de GR zit: MATH > FRAC[1]. Zo kun je met het gebruik van getallen snel duidelijk maken hoe het zit.

Neem de breuk $\frac{3}{4}$. Hoe groot is dan $1 \div \frac{3}{4}$? Tik maar in: 1 ÷ ($\frac{3}{4}$) = … .? Er komt 1.333333333 op het scherm. Tik nu maar MATH > FRAC ENTER, en er verschijnt 4/3 op het scherm. Nog een paar van zulke voorbeelden en het wordt duidelijk dat $\frac{1}{a/b} = \frac{b}{a}$. Het is een zwak ‘bewijs’, maar ik wil leerlingen op deze manier stimuleren om vergeten regeltjes snel weer even op te halen. Natuurlijk is er ook een leerling die opmerkt dat je gewoon ‘keer 4’ moet doen, waarmee ze bedoelt ‘teller en noemer keer 4’. Dus $\frac{1}{3/4} = \frac{1 \times 4}{3/4 \times 4} = \frac{4}{3}$, waarmee het ‘bewijs’ ook rond is.

Nu weet je dat het omgekeerde van

$$\boxed{\tfrac{1}{\square}} \rightarrow$$

hetzelfde doet, dus ook

$\boxed{\frac{1}{\square}}$.

We vonden samen dat ook de omgekeerde pijl van

$\boxed{\frac{2}{\square}}$

hetzelfde doet. De vergelijking $\frac{2}{x} = 3$ kan dan worden opgelost met

$$3 \rightarrow \boxed{\div 2} \rightarrow \frac{3}{2} \rightarrow \boxed{\frac{1}{\square}} \rightarrow \frac{2}{3}$$

Natuurlijk is het oplossen van deze vergelijking veel eenvoudiger als je aan een andere structuur denkt. Ik probeer mijn leerlingen ertoe te bewegen dat ze bij een breukvergelijking een getallenvoorbeeld nemen, bijvoorbeeld $\frac{12}{3} = 4$ want $3 \times 4 = 12$ of, als je al weet dat je de positie van 4 moet berekenen, $\frac{12}{\square} = 3$ hoort bij $\square = \ldots$, (dus $\frac{12}{3}$). Zo kun je meteen de oplossing berekenen van $\frac{2}{\square} = 3$, door de overeenkomstige posities van 2 en 3 in die van het antwoord van het getallenvoorbeeldje te zetten: dus '$\frac{12}{3}$' wordt nu $\frac{2}{3}$.

Een ander voorbeeld van slim GR-gebruik kom ik altijd tegen bij rekenen met wortels. Het differentiëren van bijvoorbeeld $f(x) = \sqrt{2x}$ gaat makkelijker als je $\sqrt{2x}$ eerst anders schrijft: $\sqrt{2x} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{x}$. Kan dit zo maar? Ja ...
Doe maar $\sqrt{2} \times \sqrt{3}, \sqrt{2} \times \sqrt{5}, \sqrt{2} \times \sqrt{8}$, en vergelijk die met $\sqrt{2 \times 3}, \sqrt{2 \times 5}$ respectievelijk $\sqrt{2 \times 8}$.
Ook $\sqrt{2} \times \sqrt{2}, \sqrt{3} \times \sqrt{3}, \sqrt{11} \times \sqrt{11}$, enzovoort doet het goed; dus $\sqrt{x} \times \sqrt{x} = \ldots$?
Ik dril mijn leerlingen dat ze de afgeleide van $\sqrt{x}$ (en van $\frac{1}{x}$) uit hun hoofd kennen. Op elk moment in klas 5 en 6, na het behandelen ervan, moeten ze de afgeleiden van deze twee functies kunnen opdreunen. Weet een leerling het niet, dan moet hij ze twintig keer opschrijven voor de volgende les. En het helpt.
Ik dril dit om het gedoe met de x^n-regel te vermijden ($\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ heeft afgeleide $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$,

en $\frac{1}{x} = x^{-1}$ heeft afgeleide $-1 \cdot x^{-2}$) , waarmee het vaak fout gaat. In het examen komen ze regelmatig voor: zie examens VWO-B1 2004-2 'Twee halve parabolen' en 2006-1 'In een vierkant'.

Op de een of andere manier kom ik juist deze eerste weken van het jaar veel van die algebraïsche problemen tegen. In 4v starten we op onze school met een aantal bladen herhalingsopgaven van de boeken uit klas 3. Op deze manier leer ik het niveau van de B-leerlingen goed kennen, en laat ik hen ook meteen zien welk niveau ik van hen verwacht. Dat de *taal van de algebra* een belemmering vormt bij het oplossen van een probleem, openbaarde zich bij de opgave:

> Van een kubus met zijden van r cm wordt een plak van 2 cm breed afgesneden. De inhoud van de overgebleven balk is 98 cm^3 minder dan de inhoud van de kubus.

Een mooi voorbeeld waarin de drie genoemde aspecten (zie p. 60) van het formulebegrip aan de orde komen. Ten eerste vinden veel leerlingen het moeilijk om de som met een tekening van een kubus te visualiseren (ook het tekenen van een kubus levert veel problemen op, hierover hield Jan van de Craats al eens een lezing). Als de tekening er is, dan moet nog de vertaalslag gemaakt worden naar de breedte van de balk: $r - 2$ cm. Er komt dan een formule voor de inhoud van de balk $r \cdot r \cdot (r - 2)$ (*model-leerproces*). Vervolgens moet de voorwaarde uit de tweede zin omgezet worden in een vergelijking $r^2 \cdot (r - 2) = r^3 - 98$ (*opstellen van een formule*). Tenslotte moet inzicht in de structuur van de vergelijking leiden tot de oplossing: je moet de haakjes uitwerken (*objectkarakter en structuur van de formule*) (Dan moet je erop vertrouwen dat het stappenplan ook tot een oplossing van het probleem leidt. Omdat de leerling de oplossing niet van te voren weet, blijft hij/zij onzeker over de ingeslagen weg.
Je kunt je afvragen of de algebra van patronen en structuren betekenisvolle algebra is. In feite ga je op ontdekkingsreis binnen de algebra. Maar als dat nieuwe inzichten oplevert, dan vind ik dat een legitieme manier van algebra bedrijven.

Met grote regelmaat geniet ik van de rubriek *Wat te bewijzen* is in dit tijdschrift. Martin Kindt schrijft daarin prachtige artikelen over getalpatronen met 'betekenisvolle' algebra. Zelf geloof ik ook in het nut van het ontdekken van regelmaat in getalpatronen.
In mijn lessen over differentiëren maak ik daar vaak gebruik van; bijvoorbeeld bij het vinden van een formule voor de afgeleide van $\sqrt{x}$. De leerlingen weten inmiddels dat ze de helling in een punt van een grafiek kunnen benaderen met de GR door $\frac{f(x + .001) - f(x)}{0.001}$. Samen met de klas maak ik dan een tabel, zoals ik dat ook al bij de hellingfunctie van x^3 gedaan had. Elke leerling benadert met behulp van de GR een helling in een punt op de grafiek, en probeert te ontdekken bij welke 'mooie' breuk dit in de buurt ligt. Bij $\sqrt{x}$ neem ik dan 1, 2, 4, 9, 16 en 25 nadat ik met behulp van de grafiek al heb besproken dat het benaderen van de helling bij $x = 0$ geen zin heeft.
Meestal laat ik een hele rij leerlingen (achter elkaar) de helling in een zelfde punt berekenen. Eerst vraag ik aan de voorste leerling wat hij/zij er uit heeft en daarna of er iemand iets anders heeft (of nog helemaal niets). Dan neem ik nog eens door hoe het ook al weer moest. Voor de leerling die het door heeft, en bijvoorbeeld de helling bij $x = 9$ moet berekenen, is het een koud kunstje want ik heb in een vorige les alvast $Y_0 = (Y_1(x + 0.001) - Y_1(0)) / 0.001$ in de GR laten zetten. Hij/zij tikt eerst bij '$Y_1 =$' $\sqrt{x}$, en dan VARS > Y – VARS 1: Function 1: Y_0 , vervolgens krijgt hij met $Y_0(9)$ het getal .1666620373 in zijn venster.
Welke mooie breuk zal dit ongeveer zijn? Een trucje om dit te vinden is: neem 1/ANS; dat levert in dit geval 6.000166662 op. Dus de 'mooie' breuk zal ongeveer $\frac{1}{6}$ zijn.
Zo loop ik rij voor rij langs en kom tot de volgende tabel:

Tabel 1

x	0	1	2	4	9	16	25	a
$\sqrt{x}$	0	1	$\sqrt{2}$	2	3	4	5	$\sqrt{a}$
helling met GR benaderd	-	$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1}$	0.35355 ???	$\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$	$\frac{1}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$	$\frac{1}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$	$\frac{1}{10} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}$	welke formule ???
hulpregel 2 × helling	-	1	.7071 Is dit $\frac{1}{\sqrt{2}}$?	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	lijkt op ($\frac{1}{\sqrt{a}}$)?

Ik laat de leerlingen zelf de regelmaat ontdekken en laat hen iets opschrijven onder de a in de laatste kolom.Bij de waarden 4, 9, 16 en 25 zie je een duidelijke regelmaat: zodat je bij a al gauw op $\frac{1}{2\sqrt{a}}$ uitkomt, afgezien van een enkeling die nog $\frac{1}{2a}$ opschrijft. Dan nog controleren of het ook bij 1 en 2 overeenkomt met de formule.
Bij $\sqrt{2}$ wordt eerst nog niets gevonden. Ook hier kun je met een trucje op de GR tot een bevredigend antwoord komen.
Doe eerst $\frac{1}{\text{ANS}} = 2.828427$; als je nu ANS^2 doet, krijg je ongeveer 8, zodat 0.35355 dus ongeveer $\frac{1}{\sqrt{8}}$ is, en dat is weer $\frac{1}{2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$. De conclusie van dit deel van de les is uiteindelijk dat de afgeleide van $\sqrt{x}$ gelijk is aan $\frac{1}{2\sqrt{x}}$. Maar dit is geen bewijs!

Een mooie gelegenheid om nog meer algebraïsche vaardigheden aan te slepen. De worteltruc... Eerst laat ik de leerlingen de haakjes uitwerken van $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$. Dat levert al genoeg problemen op. Als iedereen snapt dat er $a - b$ uitkomt, gaan we terug naar de definitie van de hellingfunctie en krijgen we:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} \cdot \frac{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}, \textit{(worteltruc)};$$

haakjes uitwerken van de teller geeft:

$$\frac{(\sqrt{a+h} - \sqrt{a})(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})}{h \cdot (\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} =$$

$$\frac{a+h-a}{h \cdot (\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} = \frac{h}{h \cdot (\sqrt{a+h} + \sqrt{a})}$$

Nu herkennen de leerlingen dezelfde structuur als bij het bewijs van de hellingfuncties van x^3 en x^7 die in de lessen hieraan voorafgaand gegeven zijn. Je kunt in teller en noemer een h wegdelen (niet wegstrepen!).
Bij het lezen van de *algebra van verbanden en functies* denk ik aan de paragrafen in 5v over asymptoten en perforaties.
Verrassend als je op de GR de grafieken van $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$ en $f(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 2}$ laat PLOTTEN. Na enig heen en weer gepraat komen de leerlingen er wel achter dat de eerste grafiek een lijn met een gaatje is. De tweede grafiek is een parabool, maar welke formule hoort daar bij? Eerst maar eens zelf uitzoeken op grond van enkele mooie punten met het laten tekenen met het bolletje -o. Daarmee kun je zien of een grafiek precies over een al getekende grafiek loopt; op zich al een leuke oefening. Dan gaan we met staartdelen aan de gang. Er blijkt dan dat meer dan de helft van de leerlingen die techniek niet kent. Geeft niets. Eerst doen we een paar staartdelingen met getallen, en dan hupsakee met de letterformules.
Ook al is het nog geen contextrijke wiskunde, de leerlingen ervaren dit als een interessant stuk aanvulling op hun rekenen van de basisschool. Ik zie dat ze even later snappen hoe je in elke grafiek gaatjes kunt maken bij $x = 1, 2, 3$ enzovoort door in het voorschrift teller en noemer te vermenigvuldigen met $x - 1$, $x - 2$, $x - 3$ enzovoort. Voor de liefhebbers haal ik de stelling van Gauss er nog bij. Maak een vierdegraads formule zo dat hij 0 is bij bijvoorbeeld $x = 2$, dan krijg je met die formule gedeeld door $x - 2$ een derdegraads grafiek met een gaatje.

Bij *algebra om problemen op te lossen* denk ik in eerste instantie aan contextrijke problemen. Aan het vouwen van pakken en dozen onder bepaalde voorwaarden, waarbij gezocht wordt naar een optimale situatie: met zo weinig mogelijk materiaal of een zo groot mogelijke inhoud. Hiervan zijn in de methoden en examens voorbeelden te over te vinden. Voor de lezers die geïnteresseerd zijn heb ik nog een variatie op dit thema in voorraad.

Het is een opgave over het cellofaan van koffiepakken. In figuur 1 zie je waarover het gaat. Misschien dagen de plaatjes wel uit om er zelf een opgave bij te fabriceren.
In de rubriek *Wat te bewijzen is* $(31)^2$ schrijft Martin Kindt een mooi stukje betekenisvolle algebra, al moet gezegd dat het wel een wiskundige context is. Hij laat hierin een bewijs zien dat het midden van een raaklijnstuk aan een hyperbool, dat wil zeggen het lijnstuk dat door de coördinaatassen van de raaklijn wordt afgesneden, juist het raakpunt op de hyperbool is. Toch merkt hij fijntjes op: ‘Een meetkundig bewijs schenkt op de een of andere manier vaak meer voldoening dan een algebraïsch-analytisch bewijs.
Dat het vereiste algebrawerk waarschijnlijk voor de huidige VWO-leerlingen te hoog gegrepen zal zijn, zou wel eens kunnen.’ Cynisch voegt hij er aan toe dat, ‘gelet op de stijl van de huidige examens, er waarschijnlijk eerst wel een opstapvraag bij zou komen’.

Wie weet wordt een opgave over dit probleem in een examen na de opwaardering van de algebra in de programma's na 2007 goed mogelijk. We zullen het zien.

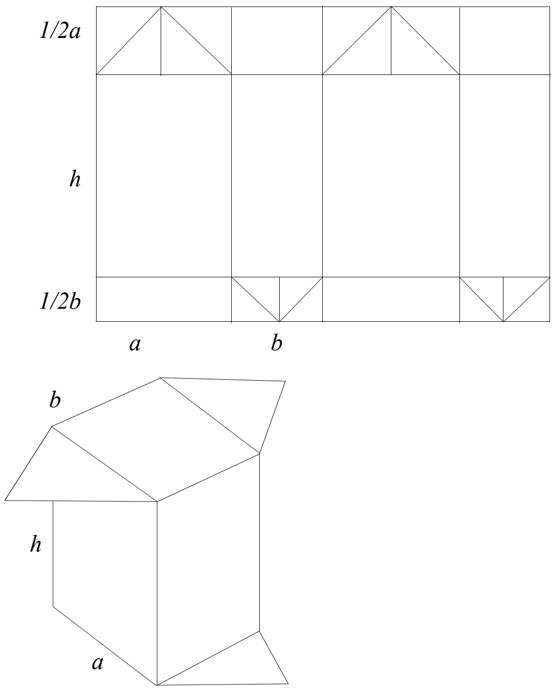

fig. 1 Cellofaan van koffiepakken

Dat een van de grootste hindernissen bij het aanleren van algebra de overgang *van concreet naar abstract* is, kan niet treffender geschetst worden dan met het voorbeeld van p. 42. Hier moet een leerling in een tabel onder gegeven getallen de uitkomst van een getallenmachine zetten. Hij snapt dat hij telkens 8 moet aftrekken van het in de 'machine' gestopte getal. Maar als hij de uitkomst moet geven wanneer je a erin stopt, dan zegt hij: 'Wat bij a [in de tabel (rvo)] komt, dat kun je niet weten.' Een soortgelijke ervaring had ik afgelopen week in 5v. We hadden net de regelmaat ontdekt van de afgeleide functies van x^2, x^3, x^7 en x^{11}. Ik wilde naar de formule van de afgeleide van x^n. Toen stokte het bij een aantal leerlingen.

Van 3, 7 en 11 kun je makkelijk 1 aftrekken, maar hoe moet dat dan bij n? Dit voorval versterkt bij mij het gevoel dat we met het algebraonderwijs op een dieptepunt zijn beland. Het pleidooi van dit boek 'voor een grotere plaats in de tweede fase' (zie p. 80) kan ik alleen maar onderschrijven. Ik zou er zelfs aan willen toevoegen 'én vooral ook in de onderbouw'. We zullen ons terdege bewust moeten zijn van de (soms triviale) problemen waar de leerlingen mee zitten als ze van concreet naar abstract moeten denken. Onder het motto 'Zeg 'ns *a*' moeten we de leerlingen aansporen om getallen die je niet weet met een letter aan te geven; hen leren hoe je met letters net zo goed kunt rekenen als met getallen, als je maar weet welke regels je kunt gebruiken; hen met regelmaat laten oefenen met anders schrijven van uitdrukkingen en formules. Er bestaat al een kruisjeslijst met algebraïsche vaardigheden die gewenst worden door de universiteiten en hogescholen. Ik denk dat het nuttig is deze aan te vullen met een lijst met veel eenvoudiger vaardigheden die we zelf graag zien bij onze leerlingen, die daaraan vooraf gaan. Laten we als docenten maar eens bijhouden met welke eenvoudige algebraïsche dingetjes de leerlingen al moeite hebben. We kunnen hen niets verwijten, maar moeten hen juist helpen om die vaardigheden aan te leren, in te slijpen en te blijven oefenen. Ik merk dat ik nu na één week school al een artikel vol kan schrijven met probleempjes waar de leerlingen mee zitten. Dus met z'n allen krijgen we vast wel een boek vol.

Rob van Oord
e-mail: robvanoord@tiscali.nl

Noten

[1] In deze tekst gebruik ik opties die gebruikt worden op de TI83
[2] *Nieuwe Wiskrant*, 25.2, p. 15, 16

Nationale Wiskunde Dagen 2007

Op vrijdag 2 en zaterdag 3 februari 2007 worden de 13e Nationale Wiskunde Dagen gehouden in Congrescentrum de Leeuwenhorst te Noordwijkerhout.

Kosten per persoon: € 360,00 bij overnachting op een tweepersoonskamer en € 395,00 bij overnachting op een eenpersoonskamer.

Kosten per persoon: € 325,00 zonder overnachting.

Half september is de programmafolder met aanmeldingsformulier naar de scholen gestuurd.

Inlichtingen: Ank van der Heiden, telefoon: 030 263 55 55 of e-mail: nwd@fi.uu.nl