Pas in 1933 werd de waarschijnlijkheidstheorie geaxiomatiseerd. Daarmee werd voor de wiskundigen alles eenduidig. Maar daarmee kwam geen einde aan de verscheidenheid van interpretaties van de theorie door de gebruikers, integendeel. **Manuel Nepveu** en **Nico Krijn**, wiskundige en filosoof, in gesprek met elkaar.

Waarschijnlijkheid, een wiskundig buitenbeentje?

Inleiding

Er zijn inmiddels veel wiskundige theorieën met een erkende status. Het is al heel lang niet meer zo dat de wiskunde overzichtelijk ingedeeld wordt in slechts enkele deelgebieden, zoals de algebra en meetkunde van de schoolwiskunde in de eerste vijf, zes decennia van de vorige eeuw: de wiskunde beslaat een immens gebied.

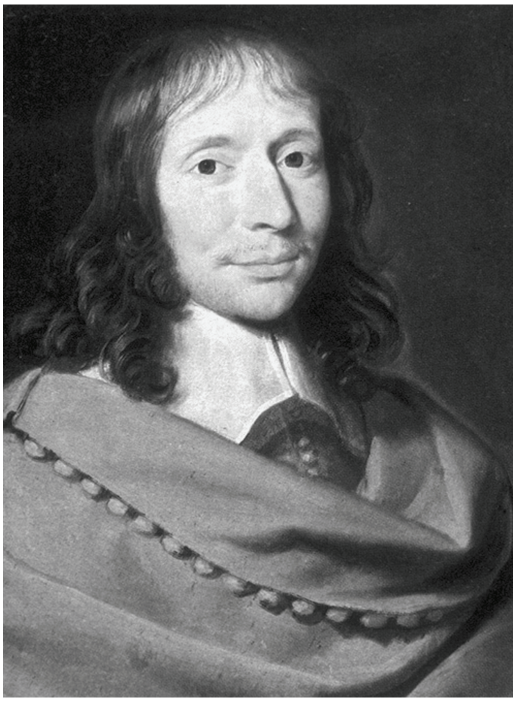

fig. 1 Blaise Pascal (1623 – 1662)

In dit immense gebied bevindt zich de waarschijnlijkheidstheorie. Het is niet duidelijk wat er in de vroegste tijden met het begrip waarschijnlijkheid werd gedaan. Rond het midden van de zeventiende eeuw begint het begrip in de intellectuele geschiedenis van Europa duidelijk vorm te krijgen en vanaf die tijd begint er een goed te volgen stroom van artikelen en boeken over te ontstaan. Beroemde namen die in de eerste honderdvijftig jaar een rol spelen: Blaise Pascal, Fermat, Christiaan Huygens, Johan de Witt (inderdaad, de door het grauw schandelijk vermoorde raadpensionaris) in de zeventiende eeuw, de telgen uit het geslacht der Bernoulli's, Abraham de Moivre, Thomas Bayes, Pierre-Simon Laplace in de eeuw daarna.

Pas in 1933 vindt een axiomatisering plaats van de waarschijnlijkheidstheorie door de veelzijdige Rus Andrey Kolmogorov. Die axiomatisering is een codificering van een vaag, intuïtief begrip 'kans' of 'waarschijnlijkheid' dat we allemaal wel hebben. Zoals de Euclidische meetkunde axiomatisch is opgezet, zo kan van ieder gebied in de wiskunde een axiomatische opzet worden gepresenteerd. Dat is alleen lange tijd helemaal niet zo gebruikelijk geweest. In 1812 bijvoorbeeld laat Laplace aan zijn behandeling van de waarschijnlijkheidstheorie geen axiomastelsel in de huidige strenge betekenis voorafgaan.
Vanaf het moment dat zo'n axiomasysteem bestaat, is het duidelijk hoe er met dit mathematische begrip moet worden gewerkt. Maar de gebruiker van zo'n systeem kan nog altijd zijn eigen interpretatie aan deze mathematische waarschijnlijkheid hangen. Het is niet de taak van de wiskundige om daarover 'bindende' uitspraken te doen: het toepassen van een wiskundige theorie is de verantwoordelijkheid van de gebruiker.
Merkwaardig genoeg hebben waarschijnlijkheidstheoretici in het verleden heel vaak juist wel de toepasbaarheid aan de orde gesteld. Of beter gezegd, zij laten zich uit over een 'correcte' opvatting van het begrip waarschijnlijkheid. Een paar voorbeelden. In het eerste deel van het gezaghebbende leerboek van Feller wordt het gebruik dat Laplace maakte van waarschijnlijkheid veroordeeld (Rule of succession). In het fraaie Nederlandse boek van Stam is de toon iets gematigder, maar ook hier spreekt de auteur zijn voorkeur uit. In het moderne boek van Grimmett en Stirzaker laten de auteurs zich bij een van de voorbeelden (in een juridische context) ook iets ontvallen over de toepasbaarheid.
Waarom vallen de hier genoemde wiskundigen zo uit hun rol en spreken zij zich uit over iets waarover zij gemeenlijk hun mond houden?

Discussie

NK: In het algemeen staat de wiskundige praktijk ver van de filosofie. Het verschil tussen actuele en potentiële oneindigheid speelt geen rol in de wiskundige praktijk, ook de vraag of de verzameling van alle verzamelingen bestaat, doet niet ter zake. De wiskundige praktijk geeft niet direct aanleiding tot filosofische vragen. Bij de waarschijnlijkheidstheorie ligt dat anders. Bertrands paradoxen beslaan een scala van problemen binnen de waarschijnlijkheidstheorie. Van Wesley Salmon leende ik de volgende variant:
Stel dat we weten dat een auto tussen de één en twee minuten nodig heeft om een kilometer af te leggen, verder weten we niets over de tijd die nodig is. Als we het principe van indifferentie[1] toepassen, dan kunnen we concluderen dat de tijd die nodig is met dezelfde kans ligt tussen de één en anderhalve minuut, als tussen de anderhalve en twee minuten. Deze gegevens kunnen ook anders uitgedrukt worden. We weten dat de gemiddelde snelheid van de reis ligt tussen de dertig en zestig kilometer per uur. Verder weten we niets over de gemiddelde snelheid. Als we weer het beginsel van indifferentie toepassen, dan kunnen we concluderen dat de gemiddelde snelheid van de auto met dezelfde kans ligt tussen zestig en vijfenveertig kilometer per uur, als tussen vijfenveertig en dertig kilometer per uur. Helaas zijn de bovenstaande resultaten tegenstrijdig. De reistijd van anderhalve minuut komt overeen met een gemiddelde snelheid van veertig kilometer per uur, niet met vijfenveertig kilometer per uur.
Hoewel één contradictie genoeg is, staat dit voorbeeld niet op zichzelf. Gelijksoortige tegenstrijdigheden doen zich voor in elke situatie waarbij we te maken hebben met twee grootheden waartussen geen lineair verband is. Uiteraard kun je veel voorkomen door geen gebruik te maken van niet-lineaire functies, zoals logaritmische, kwadratische, en e-machtfuncties en dergelijke, maar zelfs als je uitgaat van primaire grootheden als snelheid en tijd kom je in dit soort problemen. Bertrands paradoxen stemmen wiskundigen wellicht tot nadenken, want wat is de betekenis van de bepaalde waarschijnlijkheid?

MN: Aha, de werkelijke of schijnbare contradicties. Nemen we jouw voorbeeld. Inderdaad, als je voor de genoemde tijd een uniforme verdeling kiest, dan is de bijbehorende verdeling voor de gemiddelde snelheden zeker geen uniforme verdeling en natuurlijk ook andersom. Dit voorbeeld laat zien dat je een keuze moet maken welke parameter je als de meest fundamentele beschouwt. Hier hebben we niet te maken met een 'contradictie', maar veeleer met een keuzeprobleem. Als je de ene verdeling kiest, dan ligt de andere vast. Je intuïtieve idee dat een uniforme verdeling van de ene grootheid met een uniforme verdeling van de inverse moet corresponderen is wiskundig onjuist. Je moet de wiskunde niet de schuld geven, zoals een enkele filosoof wel eens doet, maar je gebrekkige intuïtie! Dit soort voorbeelden leert je dat je intuïtie soms bijgeslepen moet worden. De inmiddels gestorven natuurkundige Jaynes wijdt in zijn fraaie boek een dik hoofdstuk aan paradoxen, schijnbare tegenstrijdigheden. Steeds weer ontrafelt hij deze als zijnde het gevolg van 1) gebrekkige intuïtie, 2) verborgen aannames die fout blijken en eventueel 3) slordig gebruikte wiskunde. Het kost mij niet de minste moeite je gek te krijgen met een aantal van zulke paradoxen. Steeds weer blijkt dat niet de kansrekening foutief is, tegenstrijdige resultaten geeft, maar dat de fout of impliciete slordigheid ligt bij degene die met de paradox op de proppen komt. Het is eigenlijk afgrijselijk platvloers. Vooral filosofen breken hier nogal eens hun nek. Zie je me lekker vals kijken?

NK: Laat ik dan maar teruggaan naar een historische vraag. Het is niet duidelijk wat er in de vroegste tijden met het begrip waarschijnlijkheid werd gedaan. De Grieken ontwikkelden geen waarschijnlijkheidstheorie. Zij waren hartstochtelijke gokkers en bekwame wiskundigen, maar hun wiskunde was niet geschikt om het gokken te analyseren. Als reden wordt vaak aangevoerd dat de Grieken niet over een algebraïsch systeem beschikten. Zou de binomiaaldistributie kunnen worden geformuleerd zonder een goede algebraïsche notatie? Kunnen de limietstellingen van Jakob Bernoulli en Abraham de Moivre ontwikkeld worden zonder gebruik te maken van de algebra en de analyse?

fig. 2 Abraham de Moivre (1667 – 1754)

MN: Wanneer je beseft dat de Grieken er een duidelijk meetkundige of meetkundig geïnspireerde denktrant op na hielden, zul je begrijpen dat zij die vrij zeker ook in de kanswereld hadden ingevoerd, als zij daar werk van hadden gemaakt. De oude Grieken waren dan vlot in de problemen gekomen. En wel als volgt. De binomiale verdeling ontstaat als je de macht $(p + q)^n$ als een veelterm schrijft en stelt dat p (= kans op optreden van een bepaalde uitkomst) + q (= kans op niet-optreden daarvan) = 1. De macht $(p + q)^n$ kan nu ontwikkeld worden in een som van termen van het type $C^n_k\ p^k q^{n-k}$ waarbij de C^n_k de zogenaamde binomiaalcoëfficiënten zijn. Voor de gevallen $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ hebben al deze termen een eenvoudige meetkundige interpretatie en een kansinterpretatie (kans dat precies k van n experimenten een 'beoogd' optreden oplevert). Die meetkundige interpretatie zou voor de Grieken zonder enige twijfel geen enkel probleem zijn geweest en zij zouden dan kansen in termen van (delen van) oppervlakten en volumes hebben kunnen of moeten opvatten. Maar wat gebeurt er in het geval dat je binomiaalverdelingen beschouwt die betrekking hebben op vier of meer experimenten? Dus wanneer $n = 4$ en meer? De Grieken zijn nooit tot hogerdimensionale meetkunden gekomen. Zij zouden een probleem hebben gehad. Dit alles is een 'als'-redenering. As is verbrande turf, zegt men wel.


JACOBI BERNOULLI,
Profess. Basil. & utriusque Societ. Reg. Scientiar. Gall. & Pruss. Sodal.
MATHEMATICI CELEBERRIMI,
ARS CONJECTANDI,
OPUS POSTHUMUM.
Accedit
TRACTATUS
DE SERIEBUS INFINITIS,
Et EPISTOLA Gallicè scripta
DE LUDO PILÆ
RETICULARIS.

BASILEÆ,
Impensis THURNISIORUM, Fratrum.
CIↃ IↃCC XIII.

Voor de limietstellingen die jij aanvoert (Wet van de grote aantallen en de Limietstelling van De Moivre), heb je echt het vak mathematische analyse nodig om ze te kunnen vinden. Bovendien heb je bij de eerste wet het inzicht nodig dat kansen iets te maken hebben met frequenties van resultaten op de lange duur. Als je ziet hoe lang het heeft geduurd voordat ook maar iemand (Jakob Bernoulli) expliciet een duidelijke definitie gaf van wat kansen zijn in de context van herhaalbare experimenten, kun je je voorstellen dat de afwezigheid van de Grieken op het gebied van de kansrekening niet zo vreemd was. Maar dit is alles speculatie, gevoed omdat wij op een paar duizend jaar geschiedenis terug kunnen kijken.

fig. 3 Jakob Bernoulli (1654 – 1705)

Misschien heeft het ontbreken van kansrekening als mathematische discipline iets te maken met het wereldbeeld van de Grieken. Het aardige is dat in dat wereldbeeld de Kosmos en het Lot een hoofdrol spelen en dat de goden op het tweede plan komen. Ook de goden hebben niet alle macht om dingen steeds naar believen te veranderen. Je kunt wel proberen om ze via offers gunstig te stemmen, maar je weet nooit of ze wat voor je willen en zelfs maar kunnen doen; de Griekse goden hebben beperkte bevoegdheden. De Grieken hadden weliswaar de notie van regelmaat, zoals trouwens zoveel volkeren, maar is een door goden bevolkte wereld er eentje waarin het begrip waarschijnlijkheid kan floreren? The answer, my friend, is blowing in the wind.

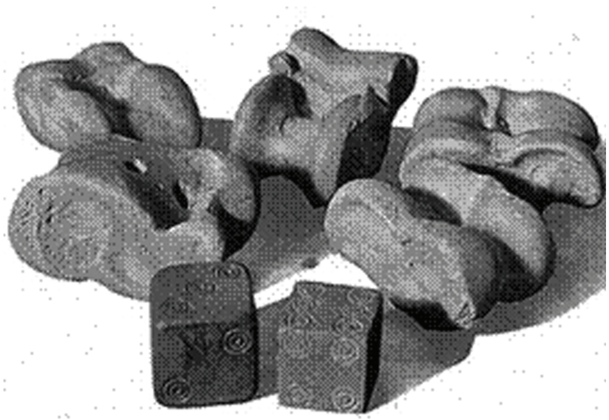

fig. 4 een verzameling astralagi met een paar vroege dobbelstenen

NK: De eerste waarschijnlijkheidsproblemen hadden betrekking op regelmatige dobbelstenen. De aanname dat alle zijden dezelfde mogelijkheid hebben was voor de wiskundige behandeling van belang. In de oude wereld kende men onze dobbelsteen niet. Men dobbelde met een astralagus, dat is een klein bot uit de hiel van een schaap of een hert. Het heeft vier enigszins rechte vlakken waarop het kan rusten en twee ronde vlakken. Het is duidelijk dat de empirische waarschijnlijkheid varieerde van astralagus tot astralagus. De onzuivere astralagi lenen zich niet voor een waarschijnlijkheidstheorie. Echter, de Grieken beschikten wel over zuivere munten. Die hadden toch ook aanleiding kunnen zijn voor een waarschijnlijkheidstheorie?

MN: Zoals ik daarnet al zei, de wiskunde zou een probleem zijn geweest en misschien is een wereldbeeld dat nogal verwarrend is en bezaaid met 'acteurs', niet de meest gelukkige achtergrond voor een ontwikkeling van de kansrekening. Het is speculatie, ik weet het.
Je had het over 'empirische waarschijnlijkheid'. Daar zouden we een fikse boom over kunnen opzetten. Laat ik je zeggen dat het bepalen van kansen aan de hand van experimenten pas vrij laat in de geschiedenis aan de orde komt. Het is bepaald niet voor niets dat een artikel uit 1763, op naam van de Engelse plattelandsdominee Thomas Bayes – maar belangrijk geredigeerd en aangevuld door zijn vriend Richard Price – de aandacht trekt van een wiskundige kanjer als Laplace. In dat artikel wordt namelijk het probleem aangesneden hoe je uit opgedane ervaring in experimenten iets over een kans op herhaling kunt afleiden. Maar dat is dus iets uit een andere tijd.

Rev. T. Bayes

Trouwens, het is op zich pikant dat een discipline die zich met onzekerheid in optima forma bezighoudt, nu juist tot de wiskunde behoort, een vakgebied dat traditioneel niet direct met onzekerheid geassocieerd wordt. Iets anders nu. Filosofen hebben zich niet uitsluitend hartstochtelijk gestort op paradoxen, maar ook op de interpretatie van het begrip kans. Ik ben van de klassieke lijn van Laplace.

NK: Er zijn twee soorten interpretaties van de kansrekening. In de epistemologische interpretatie wordt waarschijnlijkheid beschouwd als een graad van kennis die wij mensen hebben, de klassieke interpretatie van Laplace behoort tot deze categorie. Volgens de objectieve interpretatie is waarschijnlijkheid een objectieve eigenschap van de wereld; deze waarschijnlijkheid is onafhankelijk van het menselijk kennen. Helaas worden verschillende namen voor de twee stromingen gebruikt. De epistemische interpretatie wordt ook wel de subjectieve interpretatie genoemd, en de objectieve interpretatie noemen sommigen de wetenschappelijke interpretatie.
Het lijkt of de waarschijnlijkheidstheorie een januskop heeft. Aan de ene kant heeft het als statistiek betrekking op de wereld, aan de andere kant is het epistemisch, ontdaan van de statische achtergrond.

fig. 5 Janus, de Romeinse god van de overdekte doorgang en ingang. Als god van de poort ziet Janus voor- en achterwaarts, en heeft daarom op Romeinse munten een dubbel gelaat.

Het verschil tussen de twee interpretaties wordt fraai geïllustreerd door een voorbeeld van Laplace. Stel, je hebt een niet-zuivere munt en je weet niet in welke richting hij onzuiver is. Wat is de kans op munt bij een worp met deze munt $P(munt) = p$, waarbij $0 \le p \le 1$? Als je aanhanger bent van de epistemische interpretatie, zoals Laplace, dan luidt het antwoord: $p = \frac{1}{2}$. Als je de objectieve traditie volgt dan is het antwoord: alles wat we weten van de waarde p is dat $p \neq \frac{1}{2}$.

MN: Ik ben een aanhanger van de zogenaamde subjectieve school, al vind ik de naam 'subjectief' niet echt passend en de naam 'objectief' al helemaal niet. Stel dat we een dobbelsteen hebben die qua bouw volkomen symmetrisch is. Jouw 'objectieven' zullen dan zeggen dat de kansen over de zes mogelijkheden identiek zijn en beschouwen dit als een eigenschap van de dobbelsteen. Maar dat is helemaal niet zo! De uitkomst van een worp is niet alleen afhankelijk van de eigenschappen van de dobbelsteen, maar ook van de manier van werpen. Iedereen kan ook zo'n eerlijke dobbelsteen volkomen 'oneerlijke' uitkomsten laten geven, door de beginvoorwaarden bij de worp te manipuleren. (Jaynes gaat daar in zijn boek redelijk diep op in. De fysicus Jaynes zou een uitmuntend goochelaar zijn geweest.)

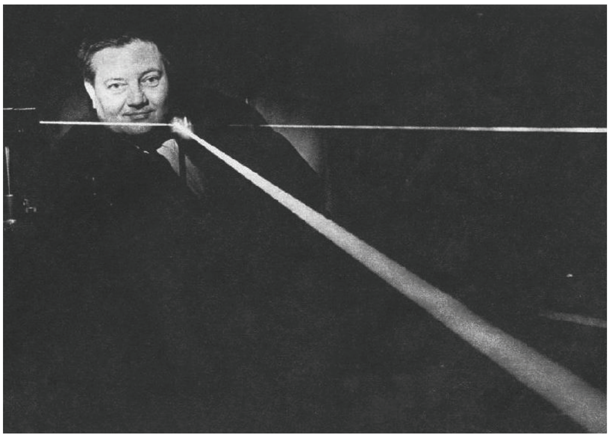

fig. 6 Ed T. Jaynes in zijn fysisch laboratorium (1967)

Dat betekent dat je niet alleen naar de steen moet kijken, maar dat je ook de ruimte van de beginvoorwaarden van de worp in je beschouwing moet betrekken. En dan is het gebeurd met de 'objectieve' interpretatie. Het is dan ook natuurlijker om te zeggen dat je kennispositie is dat je aan alle uitkomsten dezelfde kans toekent. Dan gebruik je het principe van indifferentie (of een moderne generalisatie daarvan, Maximum Entropie) om dat laatste te rechtvaardigen.

NK: De term 'subjectief' heeft in het dagelijks taalgebruik vaak een negatieve betekenis. In de filosofie betekent een subjectieve interpretatie dat het ijkpunt, de referentie, in de mens ligt, in het subject. Daarentegen ligt bij de objectieve interpretatie het ijkpunt in de wereld buiten de mens. Laplace ging uit van een universum dat volledig deterministisch is. Hij stelde zich een 'Intelligentie' voor die de volledige toestand van het universum op een bepaald moment kent en op basis daarvan in staat zou zijn het hele verleden en de hele toekomst van het universum uit te rekenen. Zo een wezen heeft geen kansrekening nodig, daar hebben alleen mensen met hun beperkte kennis behoefte aan.

MN: Hij schrijft dat in ongelofelijk mooi Frans. Elke keer als ik het lees, krijg ik weer kippenvel. Hoofdstuk één in zijn *Essai philosophique sur les probabilités*. Lezen dat hoofdstuk!

NK: In de fysica is waarschijnlijkheid gerelateerd aan tijd – als de tijd waarop een gebeurtenis die is voorspeld plaats vindt of niet. Op macroniveau met 'normale' oorzaak-gevolgrelaties zal de kans van bijna alle gebeurtenissen dicht bij 1 of 0 liggen, maar door het indeterminisme van de kwantummechanica op microniveau zullen microscopische gebeurtenissen waarden hebben tussen 0 en 1. Het deterministisch universum van Laplace werkt niet op microniveau volgens de standaardopvattingen in de fysica.

MN: Ho, ho. Als ik een dobbelsteen in een kogelbaan weggooi, zal ik aan ieder van de zes uitkomsten kans $\frac{1}{6}$ toekennen. Mijn kennispositie immers is dat ik met geen mogelijkheid iets definitievers zeggen kan.

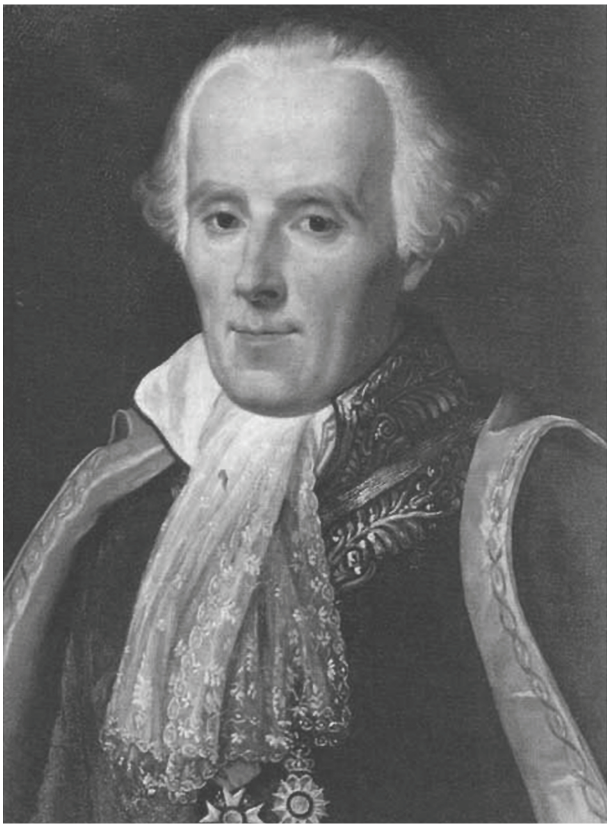

fig. 7 Pierre-Simon Laplace (1749 – 1827) 'Ik ga hier zonder mathematische analyse de principes en algemene resultaten weergeven van de kansrekening [...] door ze toe te passen op de belangrijkste vragen van het leven, die inderdaad, voor het grootste deel, slechts problemen van waarschijnlijkheid zijn.'

NK: Degene die met de dobbelsteen werpt, is ook onderdeel van het deterministische systeem. Manipulaties worden dus ook in de berekening van Laplace verwerkt, als dat tenminste lukken wil, waardoor de combinatie van 'eigenschappen dobbelsteen' plus 'manipulatie' niet meer per se zes identieke mogelijkheden oplevert.

MN: Nog even over het onderscheid 'subjectief/objectief'. De aanhangers van de 'objectieve' school worden meestal 'frequentisten' genoemd. Een kans is voor hen onlosmakelijk verbonden aan wat experimenten op de lange duur doen. De Bayesianen – de 'subjectieven' – zijn hun tegenpolen. Voor hen is kans in principe aan kennis gelieerd. Dat hoeft overigens niet te betekenen dat de beide stromingen bij hetzelfde probleempje andere antwoorden krijgen. Neen, het betekent vooral dat Bayesianen toepassingen van de waarschijnlijkheidstheorie aanvaarden waar de frequentist zich geen raad mee weet. Of beter nog, waarvan de frequentist zegt dat het niet zijn competentie is, maar die van de statistici.
Want dat is nog een bijkomend verschil: de frequentist ziet waarschijnlijkheidstheorie en statistiek als twee afzonderlijke disciplines, de Bayesiaan daarentegen trekt de statistiek geheel binnen de waarschijnlijkheidstheorie.

Immers, alles wat hij nodig heeft wordt hem methodisch binnen die theorie aangeleverd. In de adhoc-oplossingen van de klassieke statistiek heeft hij geen trek en hij heeft ze ook niet nodig.
Dit was een hele mondvol. Laat ik daarom een, hopelijk aansprekend, ludiek voorbeeld geven. Je zit in de nachttrein naar het zuiden en je valt in slaap. Midden in de nacht word je wakker. De trein staat stil op een Duits station, maar je ziet geen naamborden. Voor het station staan taxi's. Vier om precies te zijn. Elke taxi heeft een 'rugnummer'. De rugnummers kun je lezen: 12, 32, 33, 54. Vraag: hoeveel taxi's zijn er in die stad?
De frequentist verslijt je voor gek: Idioot die je bent! Slecht gedefinieerde vraag, geen antwoord! De Bayesiaan is het daar zeer beslist niet mee eens. Hij zal een aanname maken over de a priori kans op het bestaan van N taxi's, op basis van wat hij weet, zijn kennistoestand. Hij zal in het onderhavige geval bijvoorbeeld stellen dat voor N een uniforme a priori kansverdeling op zijn plaats is, met N tussen 54 en een limietwaarde N^*.
De stelling van Bayes, een eenvoudig resultaat uit de waarschijnlijkheidstheorie, maakt het hem nu mogelijk om de waarschijnlijkheid van zijn observatie (de vier rugnummers), gegeven de a priori-kennis, om te zetten in een a posteriori-uitspraak over N.
Waar de frequentist het zichzelf verbiedt om aan een kennistoestand een kansverdeling te verbinden, doet de Bayesiaan dat wel. De een kan dus een antwoord geven, dat uiteraard afhangt van de kennis waar hij van uitgaat, de ander kan slechts schaapachtig toekijken.

NK: Op basis van de vier rugnummers en vooral door alledaagse kennis van de wereld kun je aannemen dat er in een stad geen 10.000 taxi's rondrijden. Maar het is best mogelijk dat er 54 taxi's zijn. Het probleem blijft dat er geen unieke methode is om a priori-kennis te bepalen. Elke waarde die je aan N^* toekent, blijft arbitrair.

MN: Het aardige is wel dat je in het onderhavige probleem met de vier taxi's de limiet kunt nemen voor N^* naar oneindig, waardoor die door jou genoemde willekeur verdwijnt. De beste schatting zou bij de genoemde a priori zijn, dat er 81 taxi's in de stad rondrijden en je kunt aan dat getal nog een standaardafwijking hangen ook. Zie je slechts een enkele taxi, dan gaat dat niet. Je moet dan echt serieuze 'domeinkennis' toevoegen. Je weet bijvoorbeeld dat het een wat grotere stad aan de Rijn moet zijn – de trein stopt tenslotte niet in een gat – en je weet misschien wat de opties zijn, omdat je op de hoogte bent van de geografie van Duitsland…

NK: Even wat anders. Een zekere bisschop Joseph Butler, een tijdgenoot van Bayes en eveneens theoloog, schreef al in 1736 'probability is the very guide of life'. En Laplace stelde dat 'de waarschijnlijkheidstheorie uiteindelijk alleen tot calculus gereduceerd gezond verstand is'. Je zou dus denken dat waarschijnlijkheidstheorie aansluit op onze menselijke intuïtie. Helaas blijkt dat in veel gevallen niet zo te zijn. Mensen vertrouwen op hun gevoel bij het nemen van besluiten, maar ons gevoel heeft het, als het kansen betreft, vaak bij het verkeerde eind. De mens schijnt een zwakke intuïtie voor kansen te hebben, in het bijzonder als onafhankelijke en voorwaardelijke kansen in het geding zijn. Ik geef een paar sprekende voorbeelden.

fig. 8 Giuseppe Maria Crespi (1665 – 1747), Bolognese school, 'Drie maal een zes gooien'

Het toekennen van gelijke kansen aan alle mogelijke uitkomsten van het werpen met een dobbelsteen heeft twee aspecten. Ten eerste moet de dobbelsteen zuiver zijn, de kansen van elk vlak zijn gelijk aan $\frac{1}{6}$. Ten tweede moeten alle opeenvolgende worpen onafhankelijk zijn. De kans dat je met drie worpen achter elkaar een zes gooit met een dobbelsteen is $\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$. Maar als je al twee keer een zes gegooid hebt, is de kans dat je met de derde worp nog een zes gooit gelijk aan $\frac{1}{6}$. Veel gokkers schatten die kans abusievelijk veel lager in.
Tijdens een loopgravenoorlog kruipen soldaten instinctief in een granaatkrater, omdat ze ervan overtuigd zijn daar nooit een tweede granaat zal inslaan. Ze denken dat er een magische kracht is die toevallige verbanden weet tegen te houden.

MN: Nou, nou. Hun intuïtie deugt hier niet. Ze hebben alleen maar een onzuiver beeld van 'kans'. Iets preciezer, hun niet-gearticuleerde begrip van 'voorwaardelijke kans' rammelt.

NK: Het kan nog bonter. Marc Kac vertelt in zijn autobiografie een leuke grap van een passagier die de kans wilde verlagen dat een bom aan boord is van een vliegtuig waarmee hij van plan was te reizen. De kans dat iemand een bom bij zich heeft is gelukkig laag. Laten we aannemen dat deze kans p een op een miljoen is. De kans dat twee mensen een bom bij zich hebben in hetzelfde vliegtuig is p^2, dus een kans van $\frac{1}{1000000}^2$. De conclusie is dat je zelf alvast maar een bom mee moet nemen! ...
En deze. Stel dat een bepaalde ziekte bij 1% van de bevolking voorkomt. Een test die nagaat of iemand die ziekte heeft, is voor 90% betrouwbaar. Een willekeurig proefpersoon wordt getest met positief resultaat. De betrouwbaarheid van de test was 90%, de kans dat de proefpersoon de ziekte heeft is 90%. Nee dus! Stel dat de bevolking uit 10.000 personen bestaat. Hiervan zijn er dan naar verwachting ongeveer 100 ziek en 9900 niet ziek. Van alle zieke mensen geeft de test bij 90% een positief resultaat, dat zijn er 90. Van alle niet zieke mensen geeft de test bij 90% een negatief resultaat, dat zijn er 8.910.

n = 10.000	positief	negatief	totaal
niet ziek	990	8910	9900
ziek	90	10	100
totaal	1080	8920	10.000

In totaal zijn er dus 1080 mensen die positief getest worden. Hiervan zijn er in werkelijkheid 90 ziek. De kans dat een willekeurige proefpersoon bij een positieve test ziek is, is gelijk aan $\frac{90}{1080}$, dus slechts 8,3%. Doordat slechts 1% van de populatie ziek is en de testnauwkeurigheid nogal tegenvalt, worden er relatief veel mensen ten onrechte positief getest.

MN: Exact! Mensen schijnen moeilijk te kunnen verdisconteren dat de uiterst geringe a priori-kans op ziekte bij een vrij beroerde testnauwkeurigheid tot gevolg heeft dat er vaak loos alarm zal zijn.

NK: Uitbaters van casino's, kermisexploitanten en loterijverkopers kennen onze gebrekkige intuïtie en spinnen er garen mee. In het evolutionair proces heeft de ontwikkeling van onze hersenen – en natuurlijk de bijbehorende denkkracht – bijgedragen aan de overlevingskans van onze soort. Je zou denken dat we over een sterk ontwikkelde intuïtie voor kansen zouden beschikken. Het tegendeel blijkt waar te zijn. Heb jij daar een verklaring voor?

MN: Ik moet bij deze vraag denken aan wat de hoogleraar Wagenaar in een tv-interview ooit zei over de functie van het geheugen: 'Het gaat niet per se om het vastleggen van de waarheid [..]' Inderdaad, het zou voor iemands functioneren wel eens veel beter kunnen zijn om de waarheid over een gebeurtenis niet, niet in volle omvang of gekleurd op te slaan.
Bij het taxeren van gevaar doet zich, denk ik, iets dergelijks voor. Wij hebben allemaal een redelijke intuïtie als het gaat om vallen van een bepaalde hoogte. Jij weet gewoon dat een sprong van het dak van je huis dodelijk is, althans tot groot letsel leidt. Maar hoe zit het met het taxeren van het gevaar van vliegen? Deze kans wordt door mensen vaak erg hoog ingeschat. Een vliegkilometer levert gemiddeld minder verliezen aan mensenlevens op dan een autokilometer, maar veel mensen zien dat niet zo. Je zou kunnen zeggen dat deze overdreven perceptie van het gevaar van vliegen er misschien voor zorgt dat mensen 'wel uitkijken' om het vliegtuig in te stappen. Laten we wel wezen, er bestaat de mogelijkheid dat je naar beneden komt op ongewenste wijze. (Overdreven) angst voor vliegen werkt in elk geval niet tegen je overlevingskansen in...
De volgende vraag ligt voor de hand: zijn er ook gevallen waarbij mensen kansen op gevaar te lichtvaardig nemen? Speculatie: ik kan me voorstellen dat de soldaten die in de Eerste Wereldoorlog uit de loopgraven moesten kruipen, recht tegen de mitrailleurs in, op zeker moment hun overlevingskansen zijn gaan overschatten. Mentaal lijfsbehoud.
Om het samen te vatten: als gevaren die men kan vermijden, worden overschat werkt dat niet tegen je; als gevaren die je niet ontlopen kunt, worden onderschat is dat misschien een betere voorwaarde om er het beste van te maken.

NK: De voorbeelden van mensen die geen gebruik maken van de waarschijnlijkheidstheorie spreken voor zich, maar ook bij het toepassen van waarschijnlijkheidstheorie gaat het niet altijd goed. Door de opkomst van de natuurwetenschap nam vanaf de zeventiende eeuw het gezag van bijbelteksten af. Laplace toonde aan dat ondanks de onderlinge gravitatiewerking van hemellichamen het zonnestelsel stabiel is, zodat men niet meer Gods corrigerende werking hoeft te postuleren (zoals Newton deed) om de stabiliteit van het stelsel te verklaren. 'Je n'ai pas besoin de cette hypothèse', zou hij tegen Napoleon over God gezegd hebben.
De bekendste weerlegging van Genesis werd door Darwin gegeven. De les die de gelovige kan trekken, is dat hij beter geen exacte wetenschap kan toepassen op religie. Er zit echter een andere kant aan de zaak, waardoor de rationele theologie tegenwoordig weer actueel is. Professor Herman Philipse gaf over dit onderwerp onlangs een collegecyclus voor een tot aan de nok gevulde aula, toehoorders werden zelfs achter de spreker op het podium geplaatst.

Richard Swinburne is van mening dat de rationele theologie dezelfde onderzoeksmethoden dient te hanteren als de empirische wetenschappen om intellectueel aanvaardbaar te zijn. De stelling van Bayes wordt door Swinburne in stelling gebracht om het bestaan van een scheppende god als wetenschappelijke hypothese te aanvaarden. Dat vergt het nodige kunst- en vliegwerk. Hoe bepaal je welke schepping op grond van het monotheïsme te verwachten is? En hoe bepaal je de a priori-waarschijnlijkheid? Dat was bij het taxivoorbeeld al lastig! Swinburne pretendeert dat we uitsluitend het criterium van eenvoud moeten hanteren, waardoor het monotheïsme het wint van rivalen zoals het polytheïsme. Volgens Philipse leidt dit tot onaanvaardbare consequenties, want volgens Swinburne is, ongeacht het empirisch bewijsmateriaal, de a priori-waarschijnlijkheid dat het monotheïsme waar is reeds groter dan een half. Geen wetenschapper zal het criterium van eenvoud zwaarder laten wegen dan het empirisch bewijsmateriaal. Swinburnes rationele theorie is niet geloofwaardig omdat hij criteria voor theoriekeuze op een absurde manier toepast.

fig. 9 Herman Philipse behandelt Bayes tijdens de drukbezochte Studium Generale colleges

MN: De bezwaren van Philipse zijn binnen de waarschijnlijkheidstheorie pregnanter te formuleren. Stel, we hebben waarnemingen of beweringen genaamd '*Data*' en verschillende hypotheses H_k waartussen gekozen kan worden. De hypothese H_k staat dan bijvoorbeeld voor: er zijn k goden, $k = 0,1,2,3..$ De stelling van Bayes impliceert dat de a posteriori-kans, de *likelihood* en de a priori-kans gelieerd zijn volgens

$$P(H_k|Data) = \frac{P(Data|H_k)P(H_k)}{P(Data)}$$

We willen de a posteriori $P(H_k \mid Data)$ bepalen. Er moet natuurlijk een algemeen aanvaarde wijze zijn waarop die likelihood te bepalen of te schatten is. Dat komt overeen met het probleem dat Philipse signaleert over het bepalen van de te verwachten schepping als er een monotheïstische god is. Hiervoor geldt $k = 1$. Niet alleen de bepaling van de a priori-kans is in het genoemde probleem een lachertje, zonder serieuze leidraad, de vaststelling van een likelihood is dat nog veel meer. Swinburne kwalificeert zich als een pseudowetenschapper, een rommelaartje.

Het is dit soort bezopen toepassingen – het bestaan van Atlantis aantonen middels de stelling van Bayes is er ook zo een – die het 'Bayesianisme' ooit in een kwade reuk hebben gebracht. Bij Feller is er bijtend commentaar te vinden op dergelijke toepassingen. Helaas wordt door hem niet alleen het badwater weggespoeld, maar ook het lieve kind.

A propos, in 1710 publiceerde de Schotse arts John Arbuthnot een 'statistisch' godsbewijs met als feitenmateriaal dat er in Londen in 82 opvolgende jaren meer jongens dan meisjes geboren waren. Hij kreeg zijn essay gepubliceerd in de *Philosophical Transactions of the Royal Society*. Het geldt als de eerste moedige poging om een hypothese op grond van gegevens te verwerpen (namelijk de hypothese dat het numeriek overwicht van de jongetjes een kansspelletje was à la kruis en munt). Er ging in de redeneerketen nogal wat mis. Ook hier was de 'goddelijke' likelihood een probleem, maar Arbuthnot leefde in een tijd dat de kansrekening in de kinderschoenen stond.

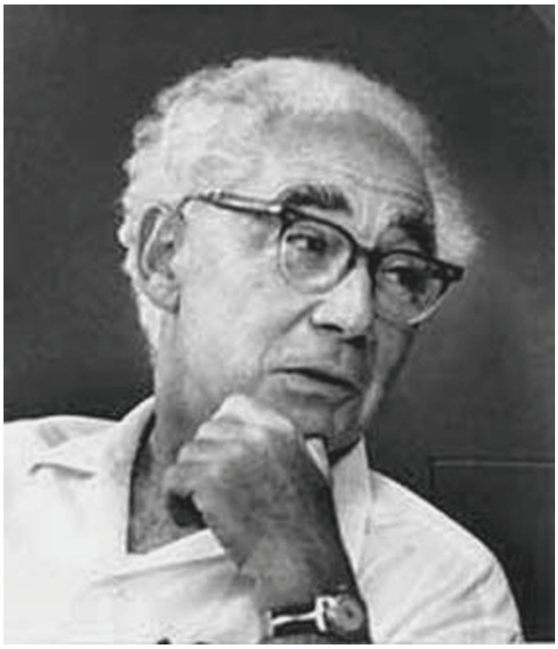

fig. 10 William Feller (1906 – 1970) 'All possible definitions of probability fall short of the actual practice.'

NK: Zo, dat was dan het hoofdstuk wetenschappelijke incompetentie. Heb jij nog wat over de toepassing van de kansrekening te zeggen?

MN: Ja, ik wil nog wel iets benadrukken. De menselijke intuïtie mag niet al te geweldig zijn, je kunt ongelukken voorkomen door je strikt aan de regels van de waarschijnlijkheidstheorie te houden. Die regels zijn gecodeerd in het axiomasysteem van Kolmogorov. Als je het erover eens bent dat die axioma's omschrijven wat jij ziet als eigenschappen van het begrip 'kans', dan ben je gevrijwaard tegen ellende. Je bent op zijn minst ook gewapend om zogenaamde paradoxen te lijf te gaan. Je moet je ook zeer strikt houden aan allerhande mathematische gedragsregels. In een eerder gesprek hadden we het over de oneindigheid in de wiskunde. Toen heb ik gezegd dat een en ander in operationele zin zo werkt dat je een systeem eerst in een eindige parameter beschrijft en pas daarna de limiet van die parameter naar oneindig neemt. Doe je het anders, dan bestaat het risico op faliekant verkeerde resultaten. Ook daarvan zijn voorbeelden in de kansrekening. Ik verwijs je weer opnieuw naar het boek van Jaynes.

fig. 11 Andrey N. Kolmogorov (1903 – 1987)

Enfin, door de axioma's van Kolmogorov ben je in staat om met het hele uitgekookte apparaat van de wiskunde tot resultaten te komen die onbetwijfelbaar zijn, ook al kunnen ze wel eens tegen onze intuïtie in gaan. Het blijkt dan bijvoorbeeld nodig om resultaten uit de maattheorie te gebruiken om stellingen te krijgen waar geen speld tussen te krijgen is. In de eenvoudige leerboekjes van het genre 'kansrekening voor de praktische geoloog' wordt dat alles niet behandeld, maar in de strikt wiskundige literatuur komen de subtiliteiten aan de oppervlakte die nodig zijn om tot werkelijk stevige resultaten te komen. De wiskunde is een machtig wapen, Nico, een machtig wapen!

Tot slot nog even aandacht voor heuse literatuur. Laplace schreef een overtuigend en prachtig verhaal met zijn *Essai philosophique sur les probabilités*, een didactisch meesterwerkje. Buitengewoon goed te volgen, ook na tweehonderd jaar. In de allerlaatste paragraaf begint hij met de beroemde zin 'Men ziet, [...] dat de waarschijnlijkheidstheorie in feite niets anders is dan gezond verstand herleid tot berekening'. Tenslotte eindigt hij met '[...] zal men inzien dat er geen wetenschap is waardiger om over na te denken, en nuttiger om er iedereen kennis van te laten nemen'. We kunnen ons slechts volmondig aansluiten bij deze woorden van de Franse grandmaître…

Manuel Nepveu, Nico Krijn, TNO, Utrecht

Noot

[1] Volgens het principe van indifferentie (principle of indifference) hebben twee uitkomsten dezelfde mogelijkheid – dezelfde kans – als we geen reden hebben de een te prefereren boven de ander. Als we bijvoorbeeld constateren dat een munt volmaakt symmetrisch is, dan zeggen we dat de kans op kruis gelijk is aan de kans op munt.

Literatuur

Laplace, P-S. (1812). *Théorie analytique des probabilités*. Paris.

Feller, W. (1967). *An introduction to probability theory and its applications, volume I*. New York: John Wiley & Sons.

Stam, A.J. (1964). *Inleiding tot de waarschijnlijkheidsrekening*. Haarlem: Technische uitgeverij H. Stam.

Grimmett, G.R. & D.R. Stirzaker (1982). *Probability and Random Processes*. Oxford: Oxford University Press.

Salmon, M.H. (et al.) (1999). *Introduction to the philosophy of science*. Cambridge: Hackett Publishing Company.

Jaynes, E.T. (2003). *Probability Theory, the logic of science*. Cambridge: Cambridge University Press.

Kac, M. (1974). *Enigmas of chance, an autobiography*. London: University of California Press, London.

Philipse, H. (2005). 'De wederopstanding van de rationele theologie, godsdienstwijsbegeerte volgens Richard Swinburne'. In: *Academische boekengids*, (november).