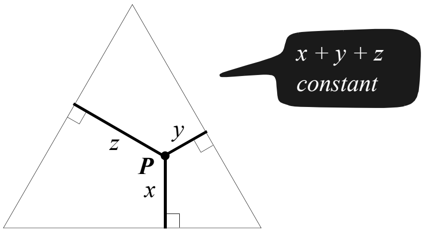
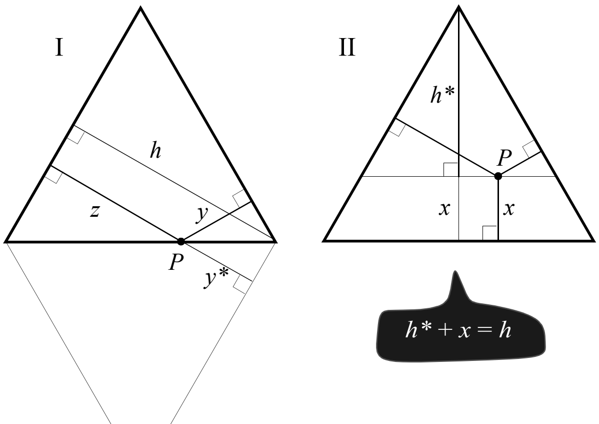
Wat te bewijzen is (36)

Rubriek

In een van de eerste afleveringen van deze rubriek besprak ik deze eigenschap van de gelijkzijdige driehoek:



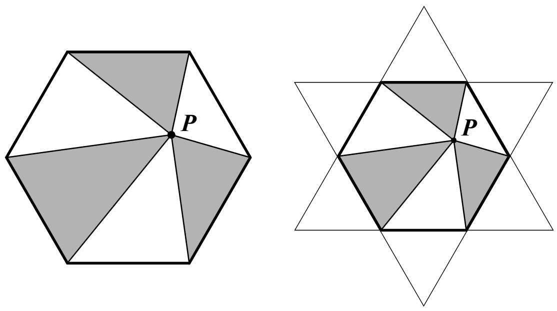
x, y en z staan voor de afstanden van een willekeurig punt P binnen (of op de rand) van de gelijkzijdige driehoek tot de zijden van die driehoek. Het bewijs verloopt gemakkelijk via de oppervlakte van de driehoek. Noem de zijde van de driehoek a en de hoogte h. Haar oppervlakte is dan enerzijds gelijk aan $\frac{1}{2}ha$ en anderzijds gelijk aan de som van de oppervlakten van de drie driehoeken met P als top en zijde a als basis, dus aan $\frac{1}{2}xa + \frac{1}{2}ya + \frac{1}{2}za$.
Gevolg: $x + y + z = h$. Daar valt niets op af te dingen en het is weer een voorbeeld hoe algebra (al is dat hier bescheiden) binnen de meetkunde kan (en moet!) functioneren. Dat is iets waar ik al jaren een lans voor breek.
Maar een mens is een vat vol tegenstrijdigheden en deze keer had ik zin om nog een puur meetkundig bewijs te zoeken voor de ‘stelling van de gelijkzijdige driehoek’. En als zo vaak in de wiskunde, lukt dat hier wonderwel door eerst eens naar een speciaal geval te kijken, namelijk dat waarbij het punt P op een van de zijden ligt (zie I).



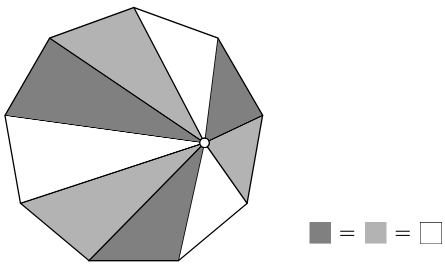
Ik spiegel de driehoek in een zijde zodat een ruit ontstaat waarbij P op de korte diagonaal ligt. De som van de afstanden van P tot de zijden van de driehoek is duidelijk gelijk aan de afstand h van twee overstaande zijden van de ruit (immers $x = 0$ en $y = y^*$).
In geval II ligt P binnen de gelijkzijdige driehoek.

De lijn door P evenwijdig aan de basis, snijdt een kleinere gelijkzijdige driehoek af van de oorspronkelijke driehoek. Omdat P op een zijde van die kleine driehoek ligt, geldt dat $y + z$ gelijk is aan de hoogte h^* van die kleine driehoek, die samen met x gelijk is aan h. Klaar.
Ik merk nog even op dat voor elk punt buiten de gelijkzijdige driehoek de som van de afstanden tot de dragers van de zijden groter is dan h. Dat kan zowel als vervolg van het eerste als van het tweede bewijs worden ingezien.
Het eerste bewijs heeft nog wel een sterke troef: het is gemakkelijk generaliseerbaar naar andere veelhoeken, maar daar kom ik verder in dit stukje op terug.
Beide bewijzen zijn helder genoeg om in 3 VWO te worden behandeld. Wat de relevantie met betrekking tot het doorstromen naar hogere regionen van het onderwijs ook moge zijn, het lijkt me de moeite waard dit eens te doen!

Eerlijk delen met driehoeken
Een leuke toepassing van de ‘stelling van de gelijkzijdige driehoek’ is de volgende. Neem een regelmatige zeshoek en kies daarbinnen een punt P. Verbind dit punt met de zes hoekpunten waardoor er zes driehoeken ontstaan (in de tekening om en om wit en grijs). Waar P ook ligt, het grijsgekleurde deel van de zeshoek heeft precies dezelfde oppervlakte als het witte deel.



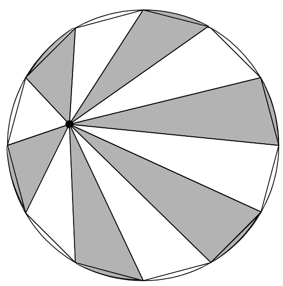
Voor het bewijs kijk ik eerst naar de afstanden van P tot de bases van de grijze driehoeken. De som van die afstanden is gelijk aan de hoogte h van de gelijkzijdige driehoek waarvan de zijden langs de grijze bases vallen.
Spiegel die omhullende driehoek nu ten opzichte van het middelpunt van de zeshoek. Het is dan duidelijk dat de afstandensom van P tot de bases van de drie witte driehoeken ook gelijk is aan h. Dus de drie grijze driehoeken zijn samen in oppervlakte de helft van de zeshoek.
Deze techniek van het omhullen met gelijkzijdige driehoeken kan ook worden toegepast op andere regelmatige veelhoeken, waarvan het aantal zijden een drievoud is. Zo kan in een regelmatige negenhoek een willekeurig binnenpunt een eerlijke verdeling in drie kleuren bewerkstelligen. Een kwestie van drie congruente gelijkzijdige driehoeken om de negenhoek maken.



Driehoeken in een cirkel
De eerder voor de zeshoek gesignaleerde eigenschap geldt ook voor andere regelmatige veelhoeken met een even aantal zijden. Om dit te bewijzen generaliseer ik eerst de stelling van de gelijkzijdige driehoek:
de som van de afstanden van een punt P binnen (of op de rand van) een regelmatige n-hoek tot de zijden van die n-hoek is constant.
Het bewijs is analoog aan het 'oppervlakkige' bewijs van de stelling voor het geval $n = 3$.
Noem de zijde van de n-hoek a en de afstanden van P tot de zijden $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en de oppervlakte van de n-hoek O.
Er volgt nu:

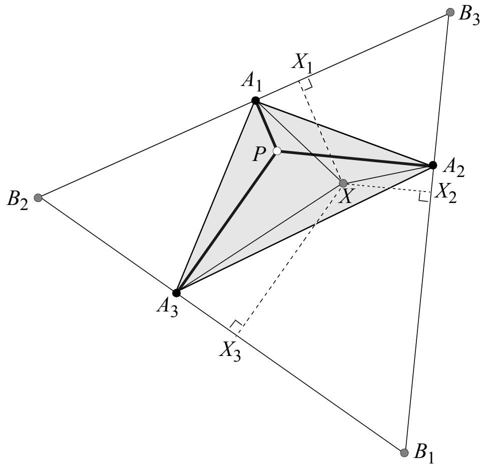
$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \frac{2O}{a}$$

en daarmee is het bewijs geleverd.
Beschouw nu een regelmatige $2n$-hoek met een punt P daarbinnen. Verbind dit punt met alle hoekpunten en er ontstaan $2n$ driehoeken, die om en om grijs en wit worden gekleurd. Door nu een regelmatige n-hoek te maken waarvan de zijden langs de bases van de grijze deeldriehoeken vallen en die vervolgens te spiegelen in het middelpunt van de $2n$-hoek, volgt na toepassing van bovenstaande stelling dat de som van de oppervlakten van de grijze driehoeken gelijk is aan de som van de oppervlakten van de witte. Voor grote waarden van n gaat zo'n regelmatige veelhoek heel erg op een cirkel lijken. Dat brengt me in de verleiding om te poneren dat bij een verdeling van een zekere cirkelomtrek in $2n$ gelijke bogen en bij een willekeurig punt P binnen die cirkel er n grijze en n witte 'driehoeken' vanuit P kunnen worden getekend, waarbij dan alle grijze driehoeken samen evenveel oppervlakte beslaan als de witte.



Het bewijs is na het voorgaande flauw.
De ingeschreven $2n$-hoek levert n grijze en n witte driehoeken die aangevuld worden met gelijke grijze en witte cirkelsegmenten.

Een bewijs van Torricelli
Als laatste toepassing van de stelling van de gelijkzijdige driehoek behandel ik nu een bekend optimaliseringsprobleem. Als in een driehoek elk van de hoeken kleiner dan 120° is, dan ligt er binnen die driehoek precies één punt met de eigenschap dat de verbindingslijnen naar de hoekpunten gelijke hoeken met elkaar (dus hoeken van 120°) maken. In onderstaande figuur is dat het punt P binnen driehoek $A_1A_2A_3$,
Dit kan worden bewezen met 'hoeken-en-bogen-meetkunde'. De punten binnen de driehoek van waaruit A_1A_2 gezien wordt onder een hoek van 120° liggen op een cirkelboog met eindpunten A_1 en A_2. Net zo voor A_2A_3.
De twee bogen snijden elkaar in één punt binnen de cirkel en dat is het gezochte punt P.
Nu komt het: van alle punten in het vlak van de driehoek is P het punt waarvan de som van de afstanden tot de drie hoekpunten minimaal is.



Het punt P heet naar keuze het punt van Fermat of dat van Torricelli. De laatste heeft een fraai bewijs van de minimale afstandensom gegeven. Dat komt er nu aan.
Verbind P met de drie punten A_1, A_2 en A_3 en trek door die punten loodlijnen op PA_1, PA_2 en PA_3.
Die lijnen vormen een gelijkzijdige driehoek $B_1B_2B_3$:

$$\angle A_1PA_3 = \angle A_2PA_1 = \angle A_3PA_2 = 120°$$
$$\text{Dus: } \angle B_1 = \angle B_2 = \angle B_3 = 60°$$

Laat X nu een punt binnen (of op de rand van) de driehoek $B_1B_2B_3$ zijn. De som van de afstanden van X tot de zijden van $B_1B_2B_3$ is gelijk aan die van P tot die zijden:

$$|XX_1| + |XX_2| + |XX_3| = |PA_1| + |PA_2| + |PA_3|$$

Als X niet samenvalt met P ligt X zeker buiten twee van de drie loodlijnen vanuit P op de zijden van $B_1B_2B_3$ en daarom weet ik dat:

$$|XA_1| + |XA_2| + |XA_3| > |XX_1| + |XX_2| + |XX_3|$$

Combinatie van de twee betrekkingen leert dat de afstandensom tot A_1, A_2 en A_3 van X groter is dan die van P.
Bedenk ook nog dat voor X buiten driehoek $B_1B_2B_3$ die afstandensom groter is dan de hoogte van die driehoek.

Martin Kindt, martin@fi.uu.nl