

Ruim een jaar geleden is een werkgroep begonnen met het ontwikkelen van onderwijsmateriaal voor het domein Toegepaste Analyse. Namens deze werkgroep licht **Jan Blankespoor** een tipje van de sluier op, vermoedelijk in de vorm van een kettinglijn, van de voorgestelde inhoud.

Wiskunde D: Toegepaste analyse, 2 HAVO

Inleiding

Dat er een domein met de naam Toegepaste Analyse 2 is toegevoegd aan het programma van wiskunde D voor de HAVO ligt voor de hand. Het is een voortzetting van de module Toegepaste Analyse 1 uit het wiskunde B-programma en het biedt voldoende mogelijkheden voor leerlingen, die sowieso wiskunde als een uitdaging zien en/of door hun beoogde keuze voor een vervolg in een techniekopleiding in het HBO deze wiskunde denken te kunnen toepassen. De ontwerpcriteria voor wiskunde D (HAVO) zijn door cTWO vastgesteld. Voor Toegepaste Analyse 2 zijn deze criteria verder uitgewerkt tot:

- Netto studielast: 80 sluis
- Vervolg dan wel aanvullend op wiskunde B (vanaf 2007)
- Verdiepend en verbredend
- Uitdagend en actueel
- Toepassingen
- Nuttig in vervolgonderwijs (doorstroomrelevant, voor met name de sector Techniek HBO)
- Zelfwerkzaamheid stimuleren (streven naar een contactuur op een zelfstandig werkuur)
- ICT-gebruik integreren (niet alleen GRM, ook software zoals VU-grafiek, Nspire, Derive, Excel)

Voor de inhoud van Toegepaste Analyse 2 is, na rijp beraad binnen een voorbereidingscommissie van cTWO, gekozen voor vier subdomeinen: *differentiëren*, *goniometrie*, *logaritmische en exponentiële functies* en *het exploreren van evenredigheden en machtsverbanden*. De eerstgenoemde drie onderwerpen komen natuurlijk ook al aan bod binnen wiskunde B en moeten daarom binnen wiskunde D gezien worden als meer verdiepend, meer toepassingsgericht en meer gericht op het inzetten van hulpmiddelen via de computer (of de grafische rekenmachine) dan in wiskunde B.

In het voorjaar van 2006 is een werkgroep van vier wiskundedocenten (Nelly Michon en Gert Treurniet, beide uit het VO, Peter van der Velden en Jan Blankespoor, beide uit het HBO) aan de slag gegaan om onderwijsmateriaal te ontwikkelen. Hierbij is gebruik gemaakt van de vroe-

gere Hawex-boekjes (FI, 1990) en materiaal van het Profiproject (FI, 1998). Verderop in dit artikel wordt uit het door de werkgroep ontwikkelde materiaal een aantal kenmerkende voorbeelden uit de verschillende hoofdstukken gegeven. Het onderwijsmateriaal is aanvankelijk in conceptversie, samen met een domeinbeschrijving, op de website van cTWO geplaatst. Experimenteerscholen en andere belangstellenden konden dit materiaal downloaden voor gebruik of ter bestudering. Dat heeft geleid tot een aantal, meest positieve, reacties, die door de werkgroep zijn verwerkt in de eindversie, zoals die nu op de website van cTWO staat. Ook zijn docenthandleidingen en studiewijzers geschreven, eveneens downloadbaar van de cTWO-website. De eindtermen zijn geformuleerd en begin dit jaar zijn deze in het examenprogramma van Wiskunde D vastgesteld door OC&W.

Om het de experimenteerscholen in het cursusjaar 2006-2007 mogelijk te maken om wiskunde D aan het programma van wiskunde B1,2 te koppelen is een overlap met wiskunde B1,2 gecreëerd. Er staat daarom voor meer dan 80 sluis aan materiaal op de website van cTWO.

Van de meeste vraagstukken zijn inmiddels ook de antwoorden beschikbaar. Reacties op basis van ervaringen zijn nog altijd welkom; de meeste scholen die ook voor hun HAVO voor wiskunde D gekozen hebben, zullen het materiaal vermoedelijk pas tegen de zomer van 2007 downloaden (of zij hebben gekozen voor een bestaande methode waarvan inmiddels ook een wiskunde D-deel is verschenen).

Voor elk subdomein is een hoofdstuk geschreven, met zoals gezegd, veel materiaal waarmee een leerling zelfstandig aan de slag kan, en voorzien van vele oefenvraagstukken.

Hoofdstuk 1 – Differentiëren, geknipt voor jou

Beoogd is het leer materiaal van dit hoofdstuk zo op te zetten dat het kan worden ingepland vanaf het begin van HAVO 4. Om dat te kunnen bereiken, bevatten de paragrafen 1 en 2 onderwijsstof uit wiskunde B, die leerlingen

aan het begin van HAVO 4 nog niet hebben doorgewerkt. Nieuw in dit hoofdstuk ten opzichte van wiskunde B is:

- Een iets andere, wat meer praktische, invalshoek, waarmee het begrip differentiaalquotient wordt ingevoerd
- De quotiëntregel (verdwenen uit wiskunde B)
- Meer aandacht voor de kettingregel
- Rationale functies en hun grafieken
- Het gebruik van verschillende notaties van de eerste afgeleide
- Meer aandacht voor contexten, waarin het modelleren wat meer centraal staat

Voorbeeldvraagstuk 1: Het fileprobleem



Belangrijk bij het fileprobleem is de onderlinge afstand van de auto's. Hoe groter de snelheid van de file, hoe groter de onderlinge afstand moet zijn, en dat is van invloed op de doorstroming. Anderzijds is de onderlinge afstand bij lage snelheid wel klein, maar in een slakkengang kan er ook niet veel doorstromen. De onderlinge afstand bepalen we met behulp van de vuistregel: $r = 0,0075v^2$ met r = remweg in meters en v = snelheid in km/u.

Hoeveel meter afstand tot zijn voorligger zou een automobilist tenminste moeten aanhouden bij een snelheid van 60 km/u? En bij een twee keer zo grote snelheid?

Stel je voor dat een file een snelheid van 60 km/u heeft en uit louter personenauto's bestaat. Neem voor het gemak aan dat elke auto vier meter lang is en dat iedere automobilist de voorgeschreven remafstand in acht neemt. Op een zeker punt heeft de politie een teller geplaatst. Laat zien dat er per minuut ongeveer 32 auto's de teller passeren.

Hoe groot is het aantal auto's dat de teller passeert bij een snelheid van 120 km/u?

Het aantal auto's ($=N$) dat de teller per minuut passeert is een functie van de snelheid v (in km/u).

Toon aan dat geldt:
$$N = \frac{1000v}{0,45v^2 + 240}$$

Bereken $\frac{dN}{dv}$

Toon aan dat de optimale snelheid van een file onder de hierboven geschetste voorwaarden ongeveer 23 km/u is.

Hoofdstuk 2 – Goniometrie: trillingen en golven

De sinus- en cosinusfunctie komen vanaf 2007 (opnieuw) aan bod in wiskunde B, maar wel summier. In dit subdomein van wiskunde D wordt een verdieping nagestreefd. Ook wordt gebruik gemaakt van de afgeleide van de go-

niometrische functies bij de analyse van periodieke functies, vaak ook vanuit een bepaalde context. De tangensfunctie (niet meer in wiskunde B) wordt ingevoerd. De leerling zal vanuit contexten uit de signaalanalyse periodieke verschijnselen analyseren en doorgronden. Ook wordt van hem verwacht dat hij goniometrische functies kan optimaliseren met behulp van differentiaalrekening. Het gebruik van diverse IT-hulpmiddelen wordt gestimuleerd, waardoor zowel inzicht als motivatie zullen toenemen. In de het door de werkgroep ontwikkelde lesmateriaal wordt de leerling geconfronteerd met:

- Het programma NCH Tone Generator versie 2.01.
- De GR.
- Een applet voor Fourierreeksen.

Verder kan door de leerlingen gebruik gemaakt worden van VU-Grafiek, TI-Interactive (of TI-Nspire). Voor demonstraties door de docent kan gebruik worden gemaakt van bovenstaande programma's en van Cabri.

In de docenthandleiding wordt een groot aantal, vrij toegankelijke IT-hulpmiddelen (vooral applets) genoemd, waarmee de docent zijn lessen kan illustreren. Omdat in de meeste techniekopleidingen in het HBO een dringend beroep gedaan wordt op kennis en inzicht van goniometrie bij de signaalanalyse, wordt gefocust op sinusoiden als wiskundig model voor trillingen en golven.

Hoofdstuk 3 – Exponentiële en logaritmische functies

Net als bij de andere hoofdstukken is het leer materiaal zo op te zetten dat leerlingen dat grotendeels zelfstandig kunnen doorwerken. Een studiewijzer voor de leerling (downloadbaar) is dan onontbeerlijk.

Het eerste deel van de leerstof in dit subdomein is een overlap met wiskunde B. De docent kan beslissen dit deel over te slaan als deze stof reeds behandeld is. Een andere mogelijkheid is deze stof als vervanging van de wiskunde B te gebruiken. Verder bestaat de mogelijkheid de eerste paragrafen te gebruiken als herhaling voor de leerling die dat nodig heeft. Daarom is in de studiewijzer aangegeven welke paragrafen in elk geval doorgewerkt moeten worden en bij welke paragrafen keuzes gemaakt moeten worden.

De hoeveelheid ontwikkeld onderwijsmateriaal is veel groter dan twintig uur, omdat er bewust een overlap is gemaakt met wiskunde B (zie de opmerking hierboven)

Het instapniveau van het materiaal is eind HAVO 3. Om alle leerdoelen te bereiken, moet echter eerst de differentiaalrekening behandeld worden, want in dit subdomein (en niet meer in wiskunde B) worden logaritmische en exponentiële functies ook gedifferentieerd. Het kan dan ook niet anders dan dat het getal e (uit wiskunde B verdwenen) wordt geïntroduceerd. De docent krijgt in de docenthandleiding weer een aantal suggesties om zijn lessen met demo's (veelal applets) te verrijken.

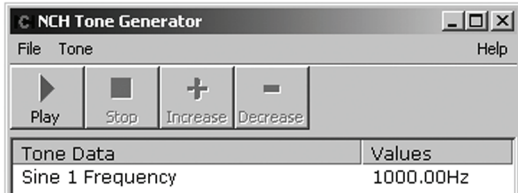
Voorbeeldvraagstuk 2: Introductie van de toongenerator

Het hoofdstuk *Goniometrie* begint met de volgende opdracht:

Download het programma NCH Tone Generator versie 2.01 van <http://www.nch.com.au/tonegen/index.html>.

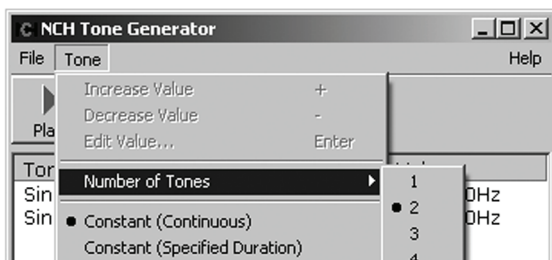
Installeer het programma.

Het programma start op met als voorbeeld een sinusvormige toon van 1000 Hz (=trillingen per seconde).



Klik op 'play' en luister. Stop de toon.

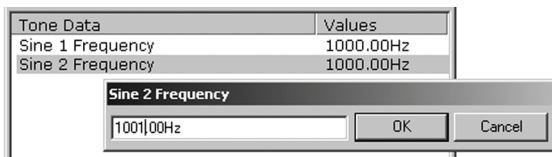
Zet het aantal tonen op 2:



Klik op 'play' en luister. Stop de toon.

Welk verschil hoor je met de situatie dat er maar één toon aan staat?

Dubbelklik nu op de 'Sine 2 Frequency'. Verander nu de frequentie van de tweede sinus in 1001 Hz.



Klik op 'play' en luister. Stop de toon.

Welk verschil hoor je met de vorige situaties? Hoeveel keer per seconde verandert de toon?

Verander nu de frequentie van de tweede sinustoon in 1005 Hz. Laat de toon weer horen.

Hoeveel keer per seconde verandert de toon nu?

Verander de frequentie van de eerste sinustoon nu in 1004.80 Hz. Laat de toon weer horen.

Hoeveel keer per seconde verandert de toon nu?

Wat is het verband tussen de frequenties van de tonen en je waarnemingen?

Voor wat betreft IT-hulpmiddelen wordt in het lesmateriaal voornamelijk gebruik gemaakt van de GRM voor het gewone reken- en tabellenwerk. Voor diverse opdrachten wordt de leerling echter gestimuleerd te werken met computersoftware zoals VU-grafiek, TI-interactive (Nspire) of zelfs Excel. Bij de betreffende opgaven is dit vermeld (zie voorbeeldvraagstuk *De hangbrug*). Het leren omgaan met dergelijke software is niet bij de studielast be-

groot (en ook niet bij de andere hoofdstukken/subdomeinen).

Naast veel inzichtvragen, die tot een beter begrip van exponentiële en logaritmische functies moeten leiden is een aantal onderzoeksvragen opgenomen. Hiervan twee voorbeelden:

Voorbeeldvraagstuk 3: De langeafstandloper



Hoe presteert een langeafstandloper op een korte afstand? En wat is een sprinter waard op bijvoorbeeld de 5000 m? Emil Zatopek (zie foto hiernaast, bijnaam: de 'locomotief' liep halverwege de vorige eeuw, zowel de marathon als verschillende kortere afstanden en oogste daarbij veel succes.

Iemand beweert een formule te hebben gevonden waarmee uit een prestatie op een bepaalde afstand de prestatie op een andere afstand kan worden voorspeld.

Die formule luidt: $v_1 - v_2 = {}^2 \log s_2 - {}^2 \log s_1$.

Hierin zijn s_1 respectievelijk s_2 afstanden in meters en v_1 respectievelijk v_2 de bijbehorende gemiddelde snelheden in km per uur.

Een lange-afstansloper loopt de 10 kilometer in 30 minuten. Hij gebruikt de formule om een voorspelling te kunnen doen over zijn prestatie op de 400 meter.

- Bereken zijn gemiddelde snelheid in km per uur op de 400 meter. Rond je antwoord af op een geheel getal.
- Hoe kun je in de formule zien dat bij een langere afstand een lagere gemiddelde snelheid hoort?
- Wat voor effect heeft verdubbeling van de afstand op de gemiddelde snelheid?

Hoofdstuk 4 – Het exploreren van evenredigheden

In veel praktijksituaties (opnieuw wordt hier naar het vervolgonderwijs gekeken) komen evenredigheidsverbanden voor van de vorm: $a = c \cdot b^d$. Daarin zijn a en b grootheden die in de betreffende situatie een rol spelen. De constante c is de evenredigheidsfactor en d is de exponent die in praktijksituaties soms wel een geheel positief getal is, maar ook vaak juist niet. De exponent is dan een negatief en/of een gebroken getal.

In dit subdomein worden middelen aangereikt om dergelijke verbanden te onderzoeken, met name om bij een (gedeeltelijk ingevulde) tabel met twee grootheden (a en b) te onderzoeken wat de exponent d en de evenredigheidsconstante c is. Enkele onderwerpen komen ook aan bod bij subdomein 3: *Exponentiële en Logaritmische functies*, echter de nadruk valt veel sterker op exploratie, onderzoek.

Voorbeeldvraagstuk 4: De hangbrug

De vorm van een hangbrug (bijvoorbeeld de Golden Gatebrug bij San Francisco) kan worden voorgesteld door een functie van het type

$$y = f(x) = c(e^{-ax} + e^{ax}).$$

Hierbij zijn a en c constanten, y en x zijn beide in meters uitgedrukt. Voor een hangbrug met een weglengte van 100 meter geldt $c = 2,5$ en $a = 0,05$ waarbij x loopt tussen -50 en $+50$.



- Plot de grafiek van $f(x)$ in een geschikt venster. Bepaal de maximale hoogte van de brug.
- Waar is de brug meer dan 10 meter hoog? (laat de computer dit voor je uitrekenen).
- Bepaal de afgeleide van $f(x)$.
- Toon aan dat de brug aan het begin en aan het eind het steilst loopt.
- Vanaf welk punt stijgt $f(x)$ meer dan 25 cm per m?

Leerdoelen in dit subdomein zijn:

- kunnen: bepalen van de evenredigheidsconstante bij een evenredigheid
- kunnen: gebruiken wetten schaalvergroting
- kunnen: onderzoeken van evenredigheden met behulp van tabellen van een praktijksituatie
- kunnen: werken met dubbel-logaritmische schalen (10-staps-papier)
- kunnen: werken met evenredigheden met gebroken en/of negatieve exponent
- kunnen: bepalen van een machtsverband in een praktijksituatie uit de natuur en/of uit de techniek,
- én zo mogelijk bespreken het verschil tussen theorie en praktijk

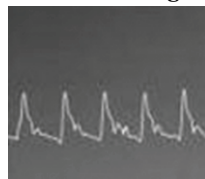
Nationale Wiskunde Dagen

Op vrijdag 1 en zaterdag 2 februari 2008 worden de 14e Nationale Wiskunde Dagen gehouden in Congrescentrum de Leeuwenhorst te Noordwijkerhout.

Kosten per persoon: € 360,00 bij overnachting op een tweepersoonskamer en € 395,00 bij overnachting op een eenpersoonskamer.

Meer nog dan in de andere subdomeinen is in dit subdomein een aantal vraagstukken opgenomen met een onderzoekskarakter. Hiervan een voorbeeld:

Voorbeeldvraagstuk 5: Ieder evenveel hartslagen?



Voordat je deze opdracht kunt gaan uitvoeren, moet je voldoende bekend zijn met paragraaf 4.9 *Schaalvergroting in de natuur en in de techniek*.

Je hebt de volgende formule

gevonden die gemiddeld voor zoogdieren geldt:
 $skelletgewicht = (\text{lichaamsgewicht})^{1,1}$.

In de natuur bestaan meer van zulke verbanden.

Heel ruw geldt bijvoorbeeld de volgende relatie tussen gemiddelde levensduur en gemiddeld lichaamsgewicht voor veel diersoorten:

$$\text{gemiddelde levensduur} = (\text{gemiddeld lichaamsgewicht})^{0,2}.$$

Over de (normale, gemiddelde) hartslag van enkele zoogdieren hebben we gegevens opgezocht, gecombineerd met het gemiddeld lichaamsgewicht.

dier	gewicht	hartslagen per minuut
spitsmuis	15 gram	700
kat	2,5 kg	200
zeehond	75 kg	100
olifant	3500 kg	30

Onderzoek of hier een evenredigheidsverband geldt en hoe dat er dan uitziet.

- Kun je uiteindelijk een conclusie onderbouwen over het aantal hartslagen dat zoogdieren in hun leven gemiddeld tot hun beschikking hebben? Wat is dat aantal dan ongeveer? (kijk ook naar jezelf!)

*Jan Blankespoor, De Haagse Hogeschool,
TH Rijswijk / Academie voor Engineering*

Begin september wordt de programmaproject met aanmeldingsformulier naar de scholen gestuurd. Meer informatie over de NWD is nu al te vinden op <http://www.fi.uu.nl/nwd>.

Inlichtingen:

Ank van der Heiden, telefoon: 030 263 55 55 of e-mail: nwd@fi.uu.nl.