Analytische meetkunde en complexe getallen; twee domeinen van wiskunde D. **Dick Klingens** is lid van de werkgroep analytische meetkunde VWO, maar benadrukt dat onderstaand artikel op persoonlijke titel geschreven is en als inspiratiebron voor materiaal voor wiskunde D kan dienen.

Over analytische meetkunde en complexe getallen

Inleiding

Binnen het nieuwe profielkeuzevak wiskunde D voor het VWO-profiel NT staan in het schoolmodel naast elkaar de domeinen Meetkunde (en dat is dan de analytische meetkunde) en Complexe getallen. Dat van dit laatste domein in het eerste gebruik gemaakt kan worden, blijkt – en wellicht op een onverwachte manier – in onderstaand artikel, bij het onderzoek van een ellipseigenschap.

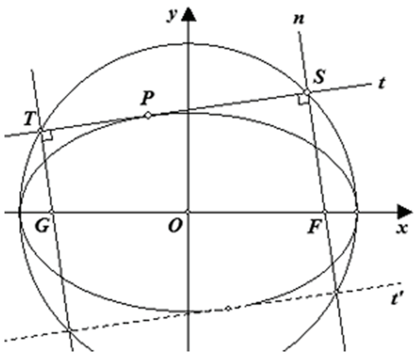
Een ellipseigenschap, analytisch bekeken

We bekijken de volgende probleemstelling.

> Uit een brandpunt F van de ellips met (standaard)vergelijking $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ wordt een loodlijn n neergelaten op de raaklijn t in een punt P van de ellips. S is het snijpunt van de lijnen t en n.
> Onderzoek de meetkundige plaats van de punten S als P de ellips doorloopt.

Analytische oplossing

We kiezen voor de raaklijn t de vergelijking: $y = mx + q$ waarbij we q zó moeten vastleggen dat t aan de ellips raakt (en het raakpunt is dan P). De raaklijn heeft dus een variabele richting; m is de *parameter* van de lijn t. Er zijn natuurlijk twee raaklijnen, t en t', die de door m bepaalde richting hebben; zie onderstaande figuur.



We lossen nu voor het bepalen van q het stelsel vergelijkingen naar x op. Dit geeft:

$$\begin{cases} y = mx + q \\ b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} b^2x^2 + a^2(m^2x^2 + 2qmx + q^2) &= a^2b^2 \\ (b^2 + a^2m^2)x^2 + 2a^2qmx + a^2(q^2 - b^2) &= 0 \end{aligned}$$

De discriminant van deze vergelijking in x is gelijk aan 0 (raken!), zodat:

$$\begin{aligned} 4a^4q^2m^2 - 4a^2(b^2 + a^2m^2)(q^2 - b^2) &= 0 \\ a^2q^2m^2 - (b^2 + a^2m^2)(q^2 - b^2) &= 0 \\ -b^2q^2 &= -a^2b^2m^2 - b^4 \\ q^2 &= a^2m^2 + b^2 \end{aligned}$$

We hebben dan de volgende vergelijkingen van de beschouwde lijnen:

$$\begin{aligned} t, t' &: y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2} \\ n &: y = -\frac{1}{m}(x - c) \end{aligned} \qquad (1)$$

waarbij $F = (c, 0)$ met $a^2 - b^2 = c^2$ (een bekende relatie bij de ellips).

De coördinaten (x, y) van het snijpunt S van t en n voldoen aan de vergelijkingen van t en n, dus ook aan een combinatie daarvan waarin m niet voorkomt. We elimineren dan ook m uit beide vergelijkingen, en we doen dat hier door te kwadrateren:

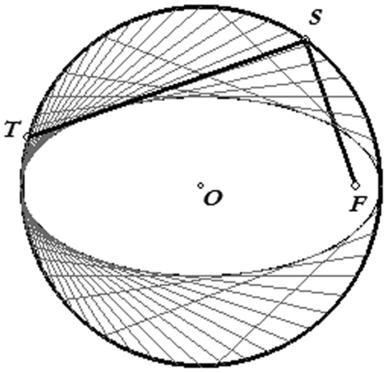
$$\begin{cases} y - mx = \pm\sqrt{a^2m^2 + b^2} \\ x + my = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2x^2 - 2mxy + y^2 = a^2m^2 + b^2 \\ x^2 + 2mxy + m^2y^2 = c^2 = a^2 - b^2 \end{cases}$$

En uit dit laatste volgt door optelling van beide vergelijkingen: $(m^2 + 1)(x^2 + y^2) = (m^2 + 1)a^2$

De coördinaten van het punt S voldoen dus aan de vergelijking: $x^2 + y^2 = a^2$.

En dat is een vergelijking van de cirkel met O als middelpunt en de halve hoofdas a van de ellips als straal. Deze cirkel heet hoofdcirkel (ook wel voetpuntscirkel) van de ellips. Laten we uit het andere brandpunt $G = (-c, 0)$ loodlijnen neer op de raaklijnen, dan blijkt uit het bovenstaande eliminatieproces (vervang overal c door $-c$) dat ook de snijpunten T van loodlijnen en raaklijnen op de genoemde cirkel liggen.

Opmerking
Een ellips is hierdoor op te vatten als de omhullende van één der benen van een rechte hoek, waarvan het hoekpunt S op een cirkel (de hoofdcirkel van de ellips) ligt, terwijl het andere been door een vast punt F (één der brandpunten van de ellips) binnen die cirkel gaat.

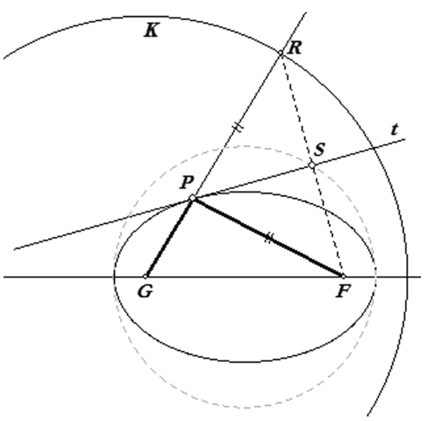


Een synthetische oplossing

Het is vandaag de dag bij VWO-wiskunde B12 gebruikelijk – en dat zal in het nieuwe B-programma wel niet anders zijn – een ellips te definiëren als de zogenoemde conflictlijn tussen een cirkel K en een punt F dat *binnen* K ligt:

> voor elk punt P van de conflictlijn (dus van de ellips) geldt dan dat de afstand van P tot F gelijk is aan de afstand van P tot K (dat is (de lengte van) het kortste verbindingslijnstuk van P en de punten van K).

In de figuur hieronder is G het middelpunt van K. P is een punt van de conflictlijn tussen K en F (dus van de ellips): P ligt op de lijn GR (hierdoor is PR de afstand van P tot K) én P ligt op de middelloodlijn van FR (dus $PF = PR$).

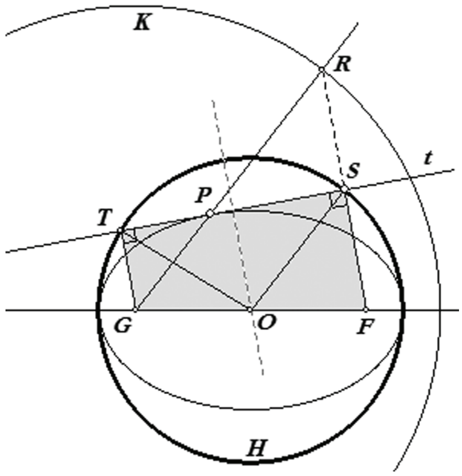


Overigens laten we het aan de lezer te bewijzen dat die middelloodlijn de raaklijn is in P aan de ellips.

Merk op dat als $GR = 2a$ (de straal van K) geldt:
$PF + PG = PR + PG = 2a$
(En dit is de ‘oude’, gebruikelijke definitie van ellips.)

We zullen in hetgeen volgt bewijzen dat het midden van het lijnstuk FR op de hoofdcirkel H van de ellips ligt.

We bekijken daartoe een willekeurige raaklijn t (in P) aan de ellips, bepaald door het punt R op K. Zij nu S het voetpunt van de loodlijn uit F op t. S is dan het midden van het lijnstuk FR.
Is O het midden van FG, dan is $OS \parallel GR$ (middenparallel in driehoek FRG), zodat $OS = \frac{1}{2}GR = a$. S ligt dus op een cirkel met middelpunt O en straal a, en dat is cirkel H.



Zij verder T het voetpunt van de loodlijn uit G op t. De middelloodlijn van ST gaat door O (middenparallel in het rechthoekige trapezium $STGF$). Zodat $OT = OS = a$. Het punt T ligt dus eveneens op cirkel H.

Een derde oplossing

We gebruiken nu een iets andere methode van elimineren van de parameter m uit het met (1) aangegeven stelsel van vergelijkingen in de paragraaf over de analytische oplossing:

$$\begin{cases} (y - mx)^2 = a^2m^2 + b^2 \\ m = \dfrac{c-x}{y} \end{cases}$$

Het is een min of meer ‘gebruikelijke’ eliminatiemethode, door substitutie van m:

$$\left(y - \frac{(c-x)x)}{y}\right)^2 = a^2 \cdot \frac{(c-x)^2}{y^2} + b^2$$

$$(y^2 - cx + x^2)^2 = a^2(c-x)^2 + y^2(a^2 - c^2)$$

Deze relatie lijkt in het geheel niet op het eerder gevonden antwoord. Na uitwerking – en de lezer kan dat gemakkelijk nagaan – blijkt dat de laatste vergelijking evenwel te schrijven is als:

$$(x^2+y^2-a^2)(x^2+y^2-2cx+c^2) = 0$$

We zien hierin de eerdere oplossing (de vergelijking van de hoofdcirkel) én een vergelijking van een *tweede*, ietwat bijzondere, cirkel:

$$x^2+y^2-2cx+c^2 = 0$$
$$(x-c)^2+y^2 = 0$$

Dit is de vergelijking van de cirkel met het punt $F = (c, 0)$ als middelpunt en met een straal die gelijk is aan 0, een puntcirkel dus. Behoort het punt F dan ook tot de meetkundige plaats? Nee natuurlijk! Maar waar komt die tweede 'cirkel' dan vandaan? We zullen in de volgende paragraaf trachten deze vraag te beantwoorden.

Complexe getallen

We laten nu bij het werken met vergelijkingen binnen de analytische meetkunde ook complexe getallen toe. Eerst enkele gevolgen daarvan:

– We kunnen de puntcirkel $x^2+y^2 = 0$ opvatten als zijnde ontaard in twee imaginaire rechte lijnen, immers:

$$x^2+y^2 = 0 \Leftrightarrow -x^2-y^2 = 0 \Leftrightarrow (ix+y)(ix-y) = 0$$

De lijnen $y = -ix$ en $y = ix$ snijden elkaar in het punt O, het enige reële punt van de puntcirkel.

– En, deze lijnen staan beide loodrecht op zichzelf (!), immers $(-i)^2 = -1$, $(i)^2 = -1$.

– Op reële (kromme) lijnen liggen ook imaginaire punten (punten met complexe getallen als coördinaten), zoals bijvoorbeeld $(\pm a\sqrt{2}, \pm ai)$ op de cirkel met vergelijking $x^2+y^2 = a^2$.

En nu terug naar het probleem. We beschouwen weer de (reële) ellips met vergelijking $b^2x^2+a^2y^2 = a^2b^2$. waarvan $F = (c, 0)$ een brandpunt is. Door F denken we ons een imaginaire lijn n' die evenwijdig is met de lijn $y = ix$. Een vergelijking van die lijn is dan:
$n' : y = i(x-c)$
NB:. Ook de lijn n' staat loodrecht op zichzelf.

'Snijden' we de ellips met de lijn n', dan vinden we door substitutie van y:

$$\begin{aligned} &b^2x^2+a^2(i(x-c))^2 = a^2b^2 \\ &(b^2-a^2)x^2+2a^2cx-a^2(c^2+b^2) = 0 \\ &-c^2x^2+2a^2cx-a^4 = 0 \\ &(cx-a^2)^2 = 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

We concluderen hieruit dat n' raakt aan de ellips. Immers, n' en de ellips hebben twee samenvallende imaginaire snijpunten:

$$P' = \left(\frac{a^2}{c}, \frac{b^2}{c}i\right)$$

Met andere woorden: de lijn n' is een lijn die loodrecht staat op een raaklijn (hier toevallig ook n') aan de ellips, en die lijn n' gaat door het punt F.

Het punt F is het enige reële gemeenschappelijke punt van die lijnen. Het punt F behoort dus eveneens tot de eerder bedoelde meetkundige plaats, althans in deze 'complexe' context.

Opmerking
Het imaginaire punt P' is gelegen op de (reële) rechte lijn met vergelijking

$$x = \frac{a^2}{c};$$

dit is de zogenoemde poollijn van het punt F bij de ellips.

Tot slot

Maar hoe zit het dan met het andere brandpunt $G = (-c, 0)$ van de ellips?
We denken ons ook nu een imaginaire lijn n'' door G die evenwijdig is met $y = ix$. Een vergelijking van die lijn is: $n'' : y = i(x+c)$

'Snijden' met de ellips leidt, met vervanging van c door $-c$ in de vergelijkingen (2), tot: $(-cx-a^2)^2 = 0$

Ook de lijn n'' raakt aan de ellips, en wel in het imaginaire punt

$$P'' = \left(-\frac{a^2}{c}, \frac{b^2}{c}i\right).$$

Of anders gezegd: ook de lijn n'' is een lijn die loodrecht staat op een raaklijn (ook hier is dat n'') aan de ellips, en die lijn gaat door het punt G.

In de 'complexe' context bestaat de gezochte verzameling dus uit de hoofdcirkel én de beide brandpunten van de ellips.

Met dank aan Jan Meerhof voor zijn commentaar bij een eerdere versie van dit artikel.

Dick Klingens
Krimpenerwaard College, Krimpen aan de IJssel