In het kader van het ReAL-project is onderzocht of de algebraleerlijnen in de gangbare methodes doorlopen. Dat blijkt niet het geval te zijn: algebra wordt niet als een veralgemenisering van het rekenen gezien. **Truus Dekker**, **Monica Wijers**, **Wim Spek** en **Pieter van der Zwaart** hebben naast dit onderzoek ook voorstellen gedaan om de breuk in de lijn van rekenen naar algebra te herstellen. Een verslag.

Leerlijnen: van rekenen naar algebra, van basisschool naar voortgezet onderwijs

Inleiding

Je hebt van die woorden en begrippen die op een gegeven moment 'rondzingen' in onderwijsland. Iedereen heeft het erover, niet iedereen lijkt er altijd hetzelfde mee te bedoelen, maar iedereen heeft er een mening over. Leerlingen hebben onvoldoende vaardigheden op het gebied van rekenen, zo schijnt het. Over welke leerlingen hebben we het dan en welk niveau van beheersing zouden we op welk moment van ze moeten en kunnen verwachten? Ook met de vaardigheden op het gebied van de algebra lijkt er van alles mis te zijn. Maar we verwachten toch niet dezelfde vaardigheden op het gebied van de algebra van leerlingen die na het VMBO doorstromen naar de richting 'Zorg en Welzijn' in het MBO als van VWO-leerlingen die naar een technische universiteit zullen gaan? 'Keus' is een van de kernwoorden van het Nederlandse onderwijs en tenzij we dat willen veranderen, moeten we er rekening mee houden dat bij bepaalde keuzes bepaalde verwachtingen en eisen horen. Wat niet wegneemt dat er aan gesignaleerde problemen voor bepaalde groepen leerlingen iets gedaan moet worden. Alleen maar roepen: 'Ze kunnen niet eens meer....' helpt ons niet verder.

Een ander veelbesproken begrip is *doorlopende leerlijnen*. Als het goed is, lopen de leerlijnen door van de basisschool naar het voortgezet onderwijs, maar ook van de onderbouw naar de bovenbouw. Het ReAL-project houdt zich op dit moment bezig met leerlijnen, doorlopend of niet, met of zonder hiaten. Sommige lezers zullen zich misschien herinneren dat vorig schooljaar al een eerste artikel over de leerlijn 'breuken' in de *Nieuwe Wiskrant* werd opgenomen. Aan die leerlijn zal daarom in dit artikel minder aandacht worden besteed.

Proces

Het ReAL-project is een klein, maar bepaald niet onbelangrijk samenwerkingsproject van SLO en FIsme. De afkorting betekent Rekenen en Algebra Leerlijnen. Meer formeel is het project aangeduid als: *Concretisering kerndoelen wiskunde, algebraïsche vaardigheden*.

ReAL heeft betrekking op de onderbouw VO. Met het ministerie van OCW werden de volgende afspraken gemaakt met betrekking tot de reken- en algebra-kerndoelen 22, 23 en 25:

1. beschrijving van concepten bij het verwerven van reken- en algebraïsche vaardigheden die van belang zijn voor een succesvolle doorstroming naar de bovenbouw HAVO/VWO en in het VMBO.
2. beschrijving van de conceptuele netwerken waardoor leerlingen bedoelde reken- en algebraïsche concepten verwerven.
3. concrete uitwerkingen van punt 1 en 2 in de vorm van exemplarisch lesmateriaal met didactische aanwijzingen voor het aanleren en onderhouden en in complexere (wiskundige) situaties toepassen van algebraïsche vaardigheden en het verwerven van algebraïsch inzicht, rekening houdend met de verschillende eisen die voor wiskunde in de profielen Tweede Fase en voor VMBO van kracht zijn.

In tussentijds overleg met het ministerie kwam de wens naar voren om niveau-indicaties aan te geven op enkele cruciale momenten in de doorlopende leerlijn van basisonderwijs (PO) naar de bovenbouw van het voortgezet onderwijs (VO). Dat zou wel erg ambitieus zijn voor een klein project als ReAL. Deze wens is vertaald naar het maken van een aantal voorbeeldtoetsen over onderdelen van doorlopende leerlijnen voor verschillende leeftijdsgroepen/klassen.

Omdat er weinig tijd en geld beschikbaar was voor het ReAL-project, is geprobeerd om gebruik te maken van alle beschikbare expertise rond reken- en algebraïsche vaardigheden en rond de doorlopende leerlijn PO-VO.

Allereerst is een overzicht van belangrijke aandachtspunten gemaakt. Op basis daarvan zijn de eerste speerpunten voor nadere uitwerking in (deel)leerlijnen geformuleerd.

Twee veelgebruikte wiskundemethodes zijn geanalyseerd om eventuele hiaten in leerlijnen op te sporen en te beslissen waar aanvullend materiaal nodig is. Met het

Het uitvoerend team achter het ReAL-project bestaat uit vakinhoudelijke medewerkers van het FIsme (Freudenthal Instituut) en SLO, waarin expertise rond rekenen wiskunde in de bovenbouw PO, onderbouw VO, Tweede Fase en het leergebied Mens en natuur waren gebundeld. Prof. dr. Anne van Streun neemt ook deel aan het project en zorgt voor de afstemming met de commissie Toekomst Wiskunde Onderwijs (cTWO). Afstemming en contact met andere belangrijke groeperingen heeft plaatsgevonden door het instellen van een resonansgroep. De resonansgroep bestaat uit vertegenwoordigers van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (NVvW), cTWO, Lerarenopleiding Nijmegen (HAN), APS, een docent wiskunde van de Scholengemeenschap Lelystad en een docent wiskunde van het St Michaelcollege te Zaandam.

Aan het eind van het schooljaar 2006/2007 eindigde het eerste deel van het ReAL-project voor de onderbouw van HAVO en VWO. Het tweede deel van het project dat duurt tot eind 2007 zal zich vervolgens richten op het VMBO. Dit deel van het project zal anders van karakter zijn, aangezien daar immers de accenten voor rekenen en algebra anders liggen dan in HAVO en VWO. Raadpleeg voor een uitgebreide beschrijving www.slo.nl/real. Daar vindt u ook aanvullend lesmateriaal en leerlingbeschrijvingen.

Stedelijk Lyceum Enschede en het Montessori Lyceum Rotterdam is overlegd hoe het aanvullende materiaal het beste kan worden ingezet, en in Enschede zijn lessen geobserveerd.

Enkele scholen hebben zich aangemeld om ‘op afstand’ te werken met het lesmateriaal. Zij zullen hun ervaringen schriftelijk rapporteren. Overigens is het ontwikkelde materiaal beschikbaar via de website van SLO, www.slo.nl/real.

Conceptueel netwerk

Net zoals het onmogelijk is om een taal te leren door losse woordjes en grammaticaregels te oefenen, is het ook onmogelijk om ‘wiskundig geletterd’ te worden door op zichzelf staande definities te leren en standaardbewerkingen te oefenen. Er is een conceptueel netwerk nodig dat onderlinge verbanden weergeeft en samenhang aanbrengt. Pas dan kunnen er voor leerlingen doorgaande leerlijnen ontstaan. In de toetsen die voor het project gemaakt zijn, is geprobeerd zichtbaar te maken of leerlingen over een conceptueel netwerk beschikken.

We geven een voorbeeld op het gebied van breuken, afkomstig uit de niveautoets breuken die in het kader van het ReAL-project is gemaakt voor (toekomstige) leerlingen HAVO/VWO aan het eind van de basisschool of het begin van de brugklas.

6. Wat is meer, $\frac{1}{7}$ of $\frac{1}{8}$. Hoe weet je dat?

7. In de breuken is n een positief, geheel getal.

Welke is groter, $\frac{1}{n}$ of $\frac{1}{n+1}$. Hoe weet je dat?

Uit de resultaten van een kleine pilot bleek dat leerlingen van groep 8 met advies VWO heel goed in staat zijn om aan te geven dat $\frac{1}{7}$ groter is dan $\frac{1}{8}$. Ze hebben daartoe kennelijk een standaardprocedure geleerd, namelijk het gelijknamig maken van beide breuken: $\frac{1}{7} = \frac{8}{56}$ en $\frac{1}{8} = \frac{7}{56}$ en vervolgens worden de gelijknamige breuken vergeleken.

Is naast een standaardprocedure ook het bijbehorende *conceptuele netwerk* aanwezig waarbinnen de leerlingen kunnen beredeneren dat $\frac{1}{7}$ groter is $\frac{1}{8}$ dan omdat de noemer bij $\frac{1}{7}$ kleiner is, dan is de basis gelegd om in het algemene geval te concluderen dat $\frac{1}{n}$ groter is dan $\frac{1}{n+1}$. Als het bijbehorende conceptuele netwerk echter ontbreekt, zijn de betreffende leerlingen niet in staat om te concluderen dat in het algemene geval $\frac{1}{n}$ groter is dan $\frac{1}{n+1}$ omdat bij de tweede breuk de noemer groter is geworden. Ze beschikken immers in groep 8 (nog) niet over de algebraïsche vaardigheden die nodig zijn om deze ‘letterbreuken’ gelijknamig te maken en te vergelijken! Dat zou overigens in dit geval ook niet de meest gewenste, want onnodig omslachtige strategie zijn.

Analyse van enkele veelgebruikte lesmethoden wiskunde VO

Een aantal opvallende punten met betrekking tot de leerlijnen rekenen en algebra die uit de analyse van de wiskundeboeken VO en van andere bronnen naar voren kwamen, zijn:

- Aan rekenen, en dan met name aan het ontwikkelen van kennis over getalsystemen en rekenregels, wordt weinig aandacht besteed.
- Algebra wordt niet of slechts marginaal gepresenteerd als een voortzetting, veralgemenisering dan wel abstractie van het rekenen. Van een overwogen aansluiting van PO naar VO is geen sprake.
- Elementaire algebraïsche vaardigheden worden gekoppeld aan vormkenmerken van de algebraïsche vormen. Betekenis geven, bijvoorbeeld door gebruik te maken van ondersteunende modellen, gebeurt nauwelijks en zeker niet structureel.
- Er is weinig tot geen aandacht voor het zelf construeren en manipuleren van formules en andere algebraïsche vormen.
- Er is voldoende oefenmateriaal voorhanden voor het oefenen en herhalen van ‘algebraregels’.

Docenten zien het belang van het ontwikkelen en onderhouden van een goede begripsmatige basis voor reken- en algebraïsche vaardigheden wel degelijk. Het is echter lastig die te realiseren wanneer leerlingen vooral zelfstandig het boek volgen en juist dit boek te weinig ondersteuning biedt. In overleg met de deelnemende scholen is bij enkele hoofdstukken aanvullend materiaal ontwikkeld, waarin juist aan de ontbrekende aspecten aandacht wordt besteed. Binnen de looptijd van het project kon hiermee maar zeer beperkt ervaring worden opgedaan en daarom kunnen er zeker geen verregaande conclusies aan worden verbonden.

Pas in een langer lopend traject kan structureel worden onderzocht in hoeverre leerlingen begrip en vaardigheid ontwikkelen in het hanteren van algebraïsche vormen en structuren als de leerlijnen beter doorlopen, als er gebruik wordt gemaakt van ondersteunende modellen en als er meer aandacht is voor de structuur van expressies en formules en het zelf opstellen daarvan in een vroeg stadium. Met andere woorden, wanneer niet alleen werken met de regels van de algebra maar vooral ook algebraïsch denken wordt ontwikkeld. Andere observaties wijzen er namelijk op dat leerlingen die onbegrepen op vormkenmerken de bewerkingen oefenen daar eerder nadeel van hebben dan dat zij daar vaardiger van worden.

Ook zou er voor de (toekomstige) leerlingen van HAVO en VWO al samenhangend materiaal ontwikkeld moeten worden voor de periode in groep 8 van het PO tussen de afname van de Cito-toets en de grote vakantie. Nu doen veel leerlingen in die periode, waarin ze sterk gemotiveerd zijn om zich 'voor te bereiden op de brugklas', juist weinig meer aan 'schoolse dingen' en wordt veel tijd besteed aan puzzels, spelletjes, eigen onderzoekjes en niet te vergeten de musical.

Wat valt op in de rekenboeken van het PO?

De rekenboeken van het PO zijn minder volledig en minder systematisch onderzocht dan de wiskundeboeken van het VO, omdat dit buiten de opdracht van het ReAL-team viel. Toch zijn er wel een aantal opvallende punten te noemen waar docenten in het VO zich misschien niet van bewust zijn en waar ze om die reden ook weinig of geen rekening mee houden:

- Er worden nauwelijks grotere contextopgaven aangeboden waarbij leerlingen eerst een instapvraag beantwoorden (a) en daarna enkele vragen (b, c, d..) waarbij in toenemende mate een beroep gedaan wordt op hun vermogen tot 'probleemoplossen'. Dit heeft tot gevolg dat leerlingen bij dergelijke opgaven in het vo elk onderdeel als geheel zelfstandig en los van de rest zien.
- Er wordt zelden gevraagd 'schrijf je redenering op of laat zien hoe je aan het antwoord bent gekomen'. In het PO lijkt vooral het product belangrijk en niet het proces. In het VO is dat vaak andersom.
- Regels worden gezien als 'voorschrift om een goed antwoord te vinden', niet als veralgemenisering van informele strategieën. De vraag 'is dat altijd zo en hoe kun je dat zeker weten?' zou veel vaker gesteld moeten worden.

De nadruk ligt in het PO duidelijk in de eerste plaats op het 'leren rekenen' en minder op het toepassen en gebruiken van het rekenen voor probleemoplossen.

Dat betekent niet dat docenten in het PO hun werk niet goed doen. Wat in het rekenboek staat, zijn immers met name de opgaven die de leerlingen maken en is niet de uitleg van de leerkracht. Toch kan in het PO meer aan informele voorbereiding op de algebra worden gedaan dan er nu gebeurt. Het heeft niet veel zin om het bestaan van negatieve getallen eenmaal in een boek te laten zien aan de hand van één voorbeeld (thermometer) en de negatieve getallen het jaar erna slechts een keer in een assenstelsel te gebruiken. Als het vriest en de thermometer wordt afgelezen, is dat een goed moment om over negatieve getallen te spreken. Maar negatieve getallen komen wellicht ook op een 'natuurlijke' manier aan de orde als er wordt teruggeteld vanaf 100 met 7 tegelijk: stop je bij 2 of kun je nog verder?
Ook als er leerlingen zijn die in plaats van '74 – 28 = ...'opschrijven '28 – 74 = ...' kan dit een aanleiding zijn om over negatieve getallen te praten: waarom kunnen we die opgave niet maken? Bestaan er ook negatieve breuken en negatieve decimale getallen (als je met dat onderwerp bezig bent), enzovoort.
Er zijn ongetwijfeld leerkrachten die dergelijke gelegenheden aangrijpen, maar daarmee is het nog geen leerlijn. Daarvoor is het nodig dat er ook in de boeken systematisch aandacht aan wordt besteed. Voor de leerlingen die na de zomervakantie naar HAVO en VWO gaan, is gedifferentieerd lesmateriaal – op hun niveau – noodzakelijk.

Producten uit het project

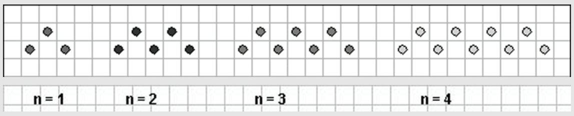
In het kader van het project zijn enkele doorlopende leerlijnen beschreven en dan vooral de leerlijnen waarbij in veelgebruikte methoden hiaten zijn geconstateerd.
Aan de *breukenlijn* werd al eerder aandacht besteed. De bewerkingen met getalsmatige breuken moeten naar onze mening overgaan in analoge handelingen met breuken waarin variabelen zijn opgenomen. De *helft* van vijf kun je schrijven als $\frac{1}{2} \times 5$; als $5 : 2$, als 5/2 en als $\frac{5}{2}$. De helft van $\frac{2}{3}$ is $\frac{1}{3}$, de helft van $\frac{2}{n}$ is $\frac{1}{n}$.

De *vermenigvuldiglijn* laat zien hoe het vermenigvuldigen van getallen inzichtelijk gekoppeld kan worden aan het vermenigvuldigen van algebraïsche expressies. Dit wordt geïllustreerd met behulp van een achterliggend model; het zogenoemde rechthoeks- of oppervlaktemodel. Het gaat hierbij om het illustreren van een vermenigvuldiging met het berekenen van de oppervlakte van een rechthoek en niet die van andere vormen. De keuze voor dit model is mede ingegeven omdat de distributieve en associatieve eigenschappen er helder mee kunnen worden geïllustreerd. Het rechthoeksmodel kan eventueel geabstraheerd worden tot een tabel.

In de wereld om ons heen zijn vele patronen en verbanden aan te geven waarin een rekenkundige relatie tussen variabelen aan de orde is. Het ontdekken van deze rekenkundige relaties en het verwoorden daarvan met behulp van de taal van de algebra is de kern van de *formulelijn*.

Bij de laatstgenoemde leerlijn volgt nu een voorbeeldopgave uit de toets voor klas 2 HV. Een dergelijke opgave waarbij vooral naar structuren wordt gekeken, komt in de methoden nauwelijks voor.

Opgave stippenpatroon



a. Laat zien (bijvoorbeeld in een tekening) dat elk van deze drie formules bij dit stippenpatroon past. In elke formule is s het aantal stippen en n het patroonnummer

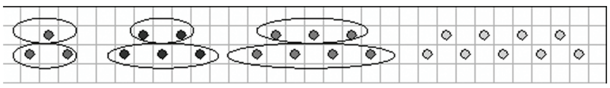
$s = (n + 1) + n$
$s = 3 + (n - 1) \times 2$
$s = 3n - (n - 1)$

b. Schrijf alle drie de formules zo kort mogelijk.
c. Laat zien hoe je de korte formule ook in de plaatjes van het stippenpatroon kunt zien.

Mogelijke antwoorden:

a.
$s = (n + 1) + n$

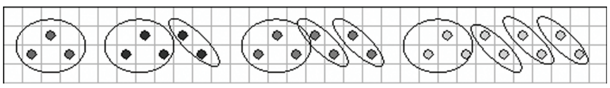
Tekening:



Uitleg: onderste rij $n + 1$ stippen, bovenste rij n stippen

$s = 3 + (n - 1) \times 2$

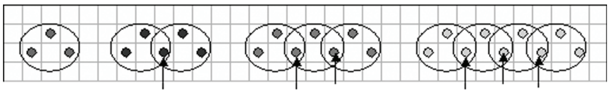
Tekening:



Uitleg: drie stippen in een driehoekje plus 'eentje-minder-dan-n' schuine rijtjes van twee stippen.

$s = 3n - (n - 1)$

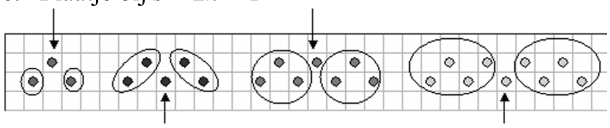
Tekening:



Uitleg: n keer een driehoekje (dus n keer drie stippen), min de dubbelgetelde stippen (dat zijn er n–1).

b. Alle formules kunnen worden vereenvoudigd tot $s = 2n + 1$
Dat algebraïsch doen doet een beroep op verschillende vaardigheden: gelijksoortige termen samennemen, verwisselen van termen (commutatieve eigenschap), haakjes uitwerken, correct omgaan met min-tekens en haakjes.

c. Plaatje bij $s = 2n + 1$



Conclusies

Wij zien in veelgebruikte wiskundemethoden voor HAVO en VWO het volgende:

– Zij bieden ruime mogelijkheden om algebraïsche vaardigheden te oefenen en te onderhouden, echter rekenvaardigheden krijgen niet veel aandacht.
– Algebra wordt in het algemeen niet of slechts in de marge gepresenteerd als een voortzetting, veralgemenisering dan wel abstractie van het rekenen. Van een overwogen aansluiting van PO naar VO is geen sprake.
– Elementaire algebraïsche vaardigheden worden gekoppeld aan vormkenmerken van de algebraïsche vormen. Betekenis geven, bijvoorbeeld door gebruik te maken van ondersteunende modellen, gebeurt nauwelijks en zeker niet structureel.
– Er is weinig tot geen aandacht voor het zelf construeren en manipuleren van formules en andere algebraïsche vormen.

Aan beide zijden van de overgang van PO naar VO zouden de auteurs van lesmethoden en de docenten beter vertrouwd moeten zijn met doorlopende leerlijnen, in dit geval op het gebied van rekenen en algebra.

Truus Dekker, Monica Wijers,
FIsme
Pieter van der Zwaart, Wim Spek,
SLO

Noot

[1] Dekker, T. & M. Kindt (2006). Wat doen we (niet) met breuken? *Nieuwe Wiskrant, 26*(2), 6-10