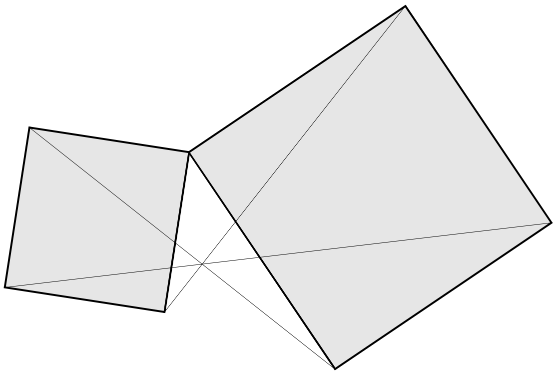
Analytische versus synthetische meetkunde? Als het aan **Aad Goddijn** ligt: hoe dan ook meetkunde! Aad is gevraagd namens de werkgroep meetkunde van CTWO dit artikel te schrijven, maar het bevat ook een reactie op een onderdeel van het artikel van Klaas Landsman in de vorige Wiskrant. Dit artikel is de verkorte versie van het oorspronkelijk artikel dat u vanaf de site kunt downloaden.

Meetkunde: waarom met én zonder algebra

Wie wil dát nou nog weten?

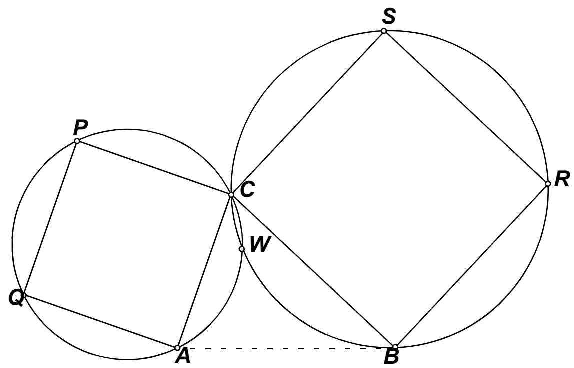


Bij zo'n plaatje hoef je echt niet veel te vertellen. Twee vierkanten met drie lijnen, dat zie je allemaal zo wel. Zelfs de vraag ligt voor de hand: is dat echt zo, dat die drie lijnen elkaar in één punt snijden? Het antwoord ligt ook voor de hand: natuurlijk, het staat niet voor niets in de *Nieuwe Wiskrant*! Bij veel mensen – schoolgangers of niet, probeer het eens uit met dit plaatje – blijft er toch iets knagen: waarom dan? Dat zijn de wiskundigen met het hart op de goede plaats. Maar bij anderen – vraag het uw collega's of lees het in de vorige aflevering van dit tijdschrift[1] – roept het de vraag op: wie wil dát nou nog weten? Daar zit het wiskundige hart duidelijk op een andere goede plaats.
Dit artikel gaat verder nauwelijks over deze twee vierkanten, maar wel over de manieren waarop je kunt motiveren wel of niet meetkunde te doen in de bovenbouw VWO, met name in de twee stromen B en D volgens de zoveelste herverkaveling van de schoolwiskunde; en vooral over twee goed onderscheidbare manieren van meetkunde bedrijven: de klassieke synthetische methode waarbij figuren en redeneringen de leiding hebben, en de moderne analytische manier waarbij de meetkunde gebruik maakt van algebra en coördinaten. De achtergronden van de verschillen en samenhangen tussen de twee kunnen mogelijk wat licht werpen op de huidige discussies rond de invulling van de nieuwe eindtermen. De no-nonsens getinte geluiden in deze discussie (basisvaardigheden! oefenen! dóórstroomrelevantie!) klinken het luidst en lijken dus de wind sterk mee te hebben; verspreid over dit artikel daarop een bescheiden aanvulling. In de tweede helft (vanaf het kopje Analyse en synthese) ga ik in op meer wiskundig-praktische kanten van de samenhang tussen meetkunde en algebra, die voor de analytische meetkunde van belang zijn.

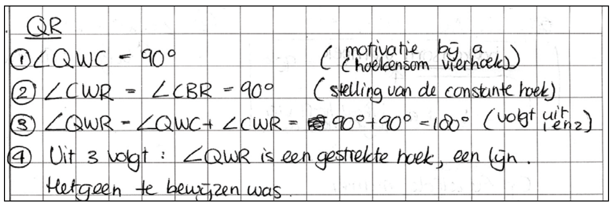
1. O.a. in *Toeval is logisch*; Klaas Landsman. *Nieuwe Wiskrant*, 26-4.

Leerlingen aan het woord

Willen leerlingen dat nou écht weten, dat van de drie lijnen door een punt? In dit geval hadden ze weinig keus, het was gewoon vraag 5 in een toets. Bij die toets ging het om hoeken en cirkels. De cirkels die juist om de vierkanten passen waren meegegeven, en de lijnen nog niet.



Hier zien we Kristel (Junior College Utrecht, VWO 5) in actie, in het bewijs dat Q, W en R op één rechte lijn liggen.



Bewezen wordt dat $\angle QWC$ en $\angle CWR$ beide 90° zijn; voor elk van die twee is slechts informatie nodig over de vierkanten afzonderlijk, het samennemen van de twee hoeken leidt tot de eindconclusie. Later wordt bewezen dat P, W en B ook op één lijn liggen, hier spelen andere hoeken bij W en C een rol.

De eerste illustratie, zonder de cirkels, is uiteraard uitdagender. De tweede geeft veel van de oplossing weg door de cirkels en hun tweede snijpunt al te tekenen. Dat heeft natuurlijk met de toetssituatie te maken; de toets test verworven kennis en moet de leerling de kans geven die te demonstreren. Oppassen dus met vragen waar een vonkje over moet slaan, want dat vonkje ontbrandt vaak niet onder toetsspanning.
Kristel en haar klasgenoten hebben goed door dat het snijpunt van die drie lijnen door één punt niet van wereldschokkende betekenis is, maar het beoefenen van en kennismaken met de wiskundige methode wel. De kern van de zaak is niet dat je iets doet met hoeken en bogen, maar dat elke stap in het betoog gebaseerd wordt op wat je al zeker weet. Dat is een hoofdkenmerk van wiskunde en het wordt hier goed vertoond.
In dezelfde toets stond een 'schrijfvraag'; gevraagd werd een reactie op een gefingeerd interview met een leerling over meetkunde. Noor (zelfde klas als Kristel) neemt de kans het volgende mee te delen, naar aanleiding van een vraag over bewijzen en computers:

> .... Het is belangrijk dat mensen zelf leren na te denken en te beredeneren. Zonder deze vaardigheden kan de technische revolutie niet worden voortgezet. Hedendaagse zaken, zoals GPS, zijn gebaseerd op meetkundige kennis. In de klassieke oudheid was meetkunde al belangrijk en in de toekomst zal meetkunde dit ook zeker blijven.

Er is eerst de opmerking over het belang van denken en redeneren, in dit kader een stellige verwijzing naar de zogenaamde *vormende waarde* van de meetkunde. Die staat echter al heel lang stevig ter discussie! Verder klinkt de trotse kreet van de kenniseconomie: wiskunde heeft nut, nut, nut, al is het maar voor de GPS. Hier staat Noor toch wat zwak, want met hoeken- en bogenmeetkunde alleen kan een GPS geen oceaan van een schapenpaadje onderscheiden, daar is echt andere wis/meetkunde voor nodig. We gaan nu eerst wat dieper in op 'vorming' en daarna op de noodzakelijkheid van een andere systematische methodes in de meetkunde. Die maakt de 'oude' meetkunde mogelijk toegankelijker, maar is zeker geschikter voor het steunen van het buitenwiskundige nut, nut, nut.

De mythe van de vormende waarde

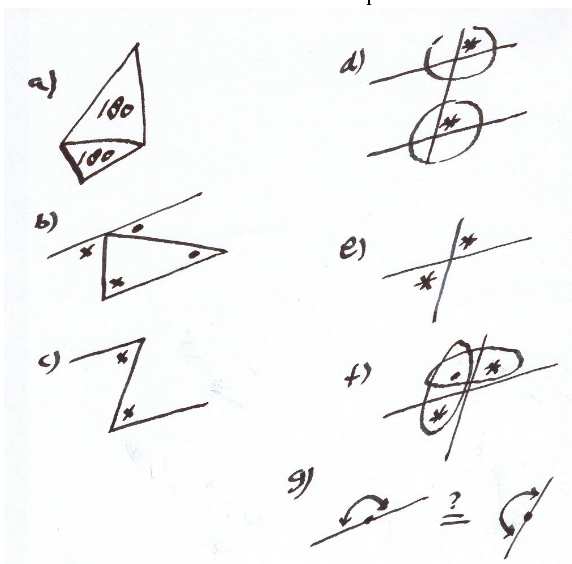
Tijdschrift *Euclides* van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren is in 1924 in het leven geroepen om in de eerste aflevering van de eerste jaargang op bladzijde 1 ruimte te bieden aan een artikel van E.J. Dijksterhuis: *Moet het meetkunde-onderwijs gewijzigd worden?* Dijksterhuis' betoog is vooral gericht tegen Tatjana Ehrenfest, die pleitte voor een intuïtieve inleidende cursus in de meetkunde, die aan de formeel opgebouwde meetkundecursus voorafging. In dit fragment steunt Dijksterhuis Noor onvoorwaardelijk:

> ….. een feit is echter, dat de opgroeiende jeugd bij kennismaking met de wiskunde, welker grondslagen voor haar volkomen evident zijn, zich plotseling verplaatst vindt in een spheer, waar vage beweringen, slordige uitdrukkingen en onbegrepen woorden niet langer worden geduld, waar iedere zonde tegen de eerlijkheid van het denken zich zelf onmiddellijk verraadt …..

In de wereld van meetkunde, daar kan de jeugd pas werkelijk en zuiver leren denken. Dijksterhuis geloofde sterk in de vormende waarde van de wiskunde, dus dat beoefenen van wiskunde ook in andere vakdisciplines én terreinen des levens tot logischer denken zou leiden.
Skeptici, zoals de historicus G. Kalff Jr. in 1930, vroegen om harde onderzoeksresultaten, maar deze zijn eigenlijk nooit geleverd. De vormende waarde van de meetkunde lijkt dus op zijn best een geloof dat voor op vorming gerichte docenten een steun in de rug kan zijn.[2]
Maar dat de klassieke meetkunde een geschikt terrein is om het deductieve karakter van de wiskunde in behoorlijk sterke vorm te beleven, voor die gedachte zijn vele voorstanders te vinden. Die gedachte is ook niet in strijd met de matige fundeerbaarheid van de 'vormende waarde', al wordt dit fijne onderscheid door (wiskundige) tegenstanders van de synthetische meetkunde in het huidige VWO niet altijd begrepen.

Het ontdekken van de axiomatiek

Axiomatiseren als denkproces had plaats in het gesprek waarin onderstaande kleine kladstrip ontstond.



De startvraag in het boek is: waarom is bij vierhoeken de som van de inwendige hoeken 360°?
Het eenvoudige antwoord staat in figuurtje a), maar Geretta is daarmee niet tevreden en vraagt waarom dat dan zo is van die 180° bij driehoeken; een perfecte kritisch-wiskundige grondhouding. Figuur b) werd geleverd door een leerling die dat vast al eens eerder gezien had. Geretta vraagt dóór: en hoe weet je dat dan van die Z-hoeken?

2. Een uitvoerige beschrijving van de Nederlandse strijd om de vormende waarde staat in E.W.A. de Moor, *Van Vormleer naar Realistische Wiskunde.* Freudenthal Instituut, 1999.

Op dat moment word ik erbij geroepen en ik schets figuurtje d): door de evenwijdigheid kun je het ene snijpunt opvatten als een verschuiving van het andere. Al die opgeschoven hoeken zijn gelijk. Nu zou ik om de oren moeten worden geslagen wegens al mijn misvattingen rond het parallellenaxioma, maar Geretta is veel scherper: ja, maar dan moet je wel weten dat die overstaande hoeken gelijk zijn: plaatje e). Dat geeft mij de kans rollen te wisselen in de discussie: kun jíj dat misschien bewijzen? Geretta komt meteen met figuur f). Stipje plus ene kruisje is stipje plus andere kruisje. Dus kruisje is kruisje. Klaar!
Hoezo? Waarom zijn die twee hoeken (figuur g) gelijk?
Geretta: Ja, je moet wel wát aannemen!
Zo is het maar net!

Het gesprek liep uit in het axioma, het is niet een afleiding vanuit gegeven axioma's. Volledige axiomatisering van de meetkunde is een belachelijke optie voor het meetkundeonderwijs op het VWO. Daar gaat het helemaal niet om. Het gaat er wel om ooit in je wiskundige groei eens aan den lijve te ervaren dat de deductieve opbouw van de wiskunde een bodem heeft of moet hebben. Dat is een inzicht dat veel verder gaat dan de meetkunde zelf; de meetkunde was een aanleiding om te kunnen zeggen: je moet wel wát aannemen.
Zijn er andere gebieden van de schoolwiskunde (huidig, toekomstig?) waar axiomatiek een (bescheiden) rol speelt? Andere bruikbare voorbeelden van deductieve opbouw zijn er zeker, de elementaire getaltheorie is een vaak genoemd voorbeeld. Maar het zoeken naar een begin, naar axiomatiek dus, dat is wel iets anders.
Een nieuw vluchtig voorstel, bijvoorbeeld voor een axiomatiek van de waarschijnlijkheidsrekening zoals in *Toeval is logisch* werd gedaan door Klaas Landsman, voldoet waarschijnlijk ook niet aan die eis van natuurlijke bereikbaarheid. Dit is een axiomatiek die voor de bouwers van de theorie in een zeker stadium van belang is, maar nu van boven af door de docent, het boek of een andere instantie moet worden voorgesteld.[3]
Opvallend is dat het gesprek met Geretta zo dicht in de buurt van de historische axioma's van Euclides terecht kwam. Bij de waarschijnlijkheidsrekening zal dat niet zo makkelijk 'naturel' gebeuren; een aanwijzing daarvoor is dat een historische benadering (van bijvoorbeeld Christiaan Huygens en tijdgenoten) radicaal afwijkt van een moderne benadering (zoals die van Kolmogorov).

Meetkunde ís redeneren?

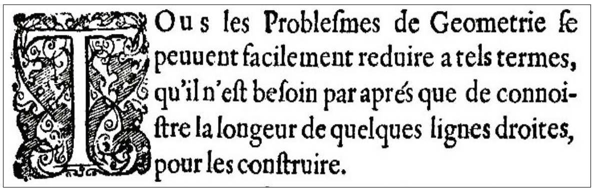
Toch is al het bovenstaande niet voldoende om meetkunde in het VWO, en met name de synthetische meetkunde, in het schoolprogramma te legitimeren.

3. Schoolmeester Euclides likte ook zijn vingers niet af bij het voorstel, maar draaide zich om in zijn graf omdat het als definitie van kansfunctie werd geformuleerd en niet als axioma.

Het tragische lot van de meetkunde is dat het vak als eerste de ijzersterke combinatie van abstractie en redeneren op de wiskundige kaart heeft gezet. Dit noodlot zit de meetkunde nog steeds na: het vak wordt veelvuldig verward met zijn methode. Meetkunde is natuurlijk voor alles ook *meetkunde*. Dat wil zeggen dat het een onderwerp heeft: het onderzoeken van vormen, figuren en ruimte. Identificeren van meetkunde met redeneren is heilloos. Meetkunde, dat gaat uiteindelijk om grip krijgen op ruimte en geconstrueerde ruimte, in heel algemene zin, met alle middelen die er voor geschikt zijn. In de wiskunde zijn die middelen onder meer redeneren en bewijzen, maar ook het meer verborgen redeneren en afleiden in de vorm van rekenen, algebraïsch of numeriek. Maar beide zijn middelen.
Een discussie over al dan niet meetkunde in wiskunde B VWO mag dan ook niet draaien om de vraag of 'redeneren en bewijzen' ook buiten de meetkunde van belang is. Allicht is het dat. En dat is geen zinnige reden om meetkunde als onderwerp te schrappen, wanneer redeneren elders in het programma al gebeurt.

Analyse en synthese

De echte bezwaren tegen de synthetische meetkunde, die draait om opbouwen van meetkundige constructies via redeneringen, horen we regelmatig in de klas. Leerlingen zeggen vaak: ik snap het wel, maar ik kan zelf zo'n bewijs niet vinden. Dat is een heel wezenlijk probleem.
Wat blijkbaar gebeurt, is dat de leerling binnen de gegeven duur van de meetkundecursus op school (nog) niet een algemene methode verwerft om redelijk zelfstandig oplossingen van bewijsvraagstukken te vinden.
De oorzaken liggen verspreid: de kwaliteit van de leerling, de beschikbare tijd en concentratie, de vaardigheid van de docent om op dit niveau iets van methodiek en heuristiek over te dragen en... liggen ook in het beestje synthetische meetkunde zelf. Over dat laatste gaan we het nu hebben: de vraag naar een systematische aanpak binnen de meetkunde zelf.
Pappos (begin vierde eeuw na Christus) gaf een systematische aanpak bij het vinden van de oplossing van een (meetkundig) probleem, waarvan de eerste stap is: *doe alsof het probleem opgelost is*. De volgende stap is de eigenschappen en kenmerken van die oplossing onderzoeken; dat is wat Pappos de *analyse* noemt. De analyse laat op zeker moment (als het lukt) het verband met de gegevens van het probleem zien, en dan is het nog zaak te kijken of de gevonden weg ook in de andere richting kan worden gevolgd, waar dan vanuit de gegevens de oplossing wordt opgebouwd: de *synthese*.
Pappos' heuristiek is zeer bruikbaar in de vorm 'maak een tekening en probeer van achteraf te werken'; het gesprek met Geretta is ook een stukje 'analyse'.
René Descartes gaat een wezenlijke stap verder in 1637, in *La Géométrie.* De eerste zin valt met de deur in huis:


TOus les Probleſmes de Geometrie ſe peuuent facilement reduire a tels termes, qu'il n'eſt beſoin par aprés que de connoi-ſtre la longeur de quelques lignes droites, pour les conſtruire.

Descartes realiseert zich dat elke meetkunde-opgave vertaald kan worden in de vraag naar bepaalde te construeren lijnstukken. De essentiële stap is nu dat Descartes zich richt op de *lengte* van de lijnstukken. Daartoe kiest hij een lijnstuk dat de lengte 1 heeft; de lengten zijn getallen. Nu kan er mee gerekend worden, en als we de lengten van de lijnstukken met letters aangeven, kan er ook nog algebra mee bedreven worden.

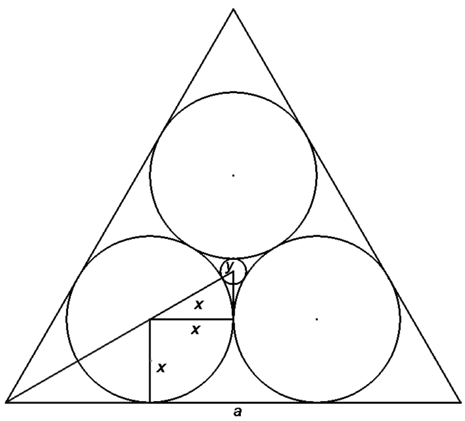
Bij Descartes heeft de analytische methode dit model:

1. Neem aan dat de oplossing gevonden is.
2. Zet letters bij de relevante lijnstukken, zowel bij de bekende als de onbekende; gebruik a, b, c voor de bekende lijnstukken en x, y, z voor de onbekenden.
3. Zet de meetkundige eigenschappen van de figuur in algebraïsche verbanden om. Probeer vooral één lijnstuk op twee verschillende manieren te bepalen. Gelijkstelling geeft een vergelijking.
4. Gebruik de gevonden vergelijkingen om (algebraïsch) de oplossing – dat wil zeggen de lengtes x, y, z – te vinden.

Aan de hand van een niet-triviaal voorbeeld (niet van Descartes) mag blijken hoe effectief deze aanpak is, en ook dat de methode toch nog wel wat praktische vragen oproept. Het voorbeeld:

> Neem een gelijkzijdige driehoek met daarin drie even grote cirkels (die elkaar en de driehoek raken, dus maximale grootte). Hoe groot is dan de straal van het kleine cirkeltje dat in het midden past?

Stap één en twee zijn verbeeld in het feit dat we een tekening kunnen maken waarin de bekende zijde van de driehoek met a is aangegeven en de onbekende stralen van de cirkels met x en y. Vinden van de lengte y is ons doel.



Stap drie gebruikt de meetkundige eigenschappen van de figuur. In dit geval manifesteren die zich mooi in de aangegeven driehoeken, die nauwe banden hebben met lengtes x, y en a. De driehoeken zijn van een bekend type. Hier wordt duidelijk voorkennis gebruikt, zeker bij het opstellen van de vergelijkingen, voor elke driehoek één:

$$\frac{x+y}{x} = \frac{2}{\sqrt{3}} \qquad \text{en} \qquad \frac{x}{a/2-x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Bij stap vier van Descartes' schema zetten we onze algebraïsche vaardigheid in en komen uiteindelijk uit op:

$$y = \frac{a}{18+10\sqrt{3}}$$

De moderne probleemoplosser is tevreden met dit eindresultaat, maar Descartes begint nu eigenlijk pas! Immers, dit is de analysefase en die is alleen een manier om een mogelijke constructie te vinden. Descartes begint in *La Géométrie* dan ook met laten zien hoe de algebraïsche bewerkingen met passer en liniaal kunnen worden uitgevoerd. In het voorbeeld betekent dat: y wordt *geconstrueerd* als a gegeven is. In de moderne Analytische Meetkunde komt dit deel van de synthetische methode niet meer voor.

We merkten wel op dat vooral bij punt drie allerlei kennis uit de synthetische (in de zin van traditionele) meetkunde wordt gebruikt. Ook hier is Descartes heel expliciet over welke kennis nodig is om de vergelijkingen op te stellen: kennis van verhoudingen in relatie tot gelijkvormigheid en de stelling van Pythagoras zijn volgens hem voldoende. De ervaring leert dat dit wel wat mager is. Enige kennis van hoeken en bogen, en zeker van de stelling van Thales over de rechthoekige driehoek en de cirkel dragen zeker bij aan de effectiviteit van de methode. Maar de boodschap is duidelijk: toepassen van de analytische methode is afhankelijk van een basis van kennis van figuren en hun meetkundige relaties.

Coördinaten en verder

Descartes is bekend geworden door wat de Cartesische methode bij uitstek lijkt te zijn: het gebruik van coördinaten in de meetkunde. (Historisch is dit wat aanvechtbaar, Fermat, Mersenne en Wallis mogen een deel van de eer claimen.)

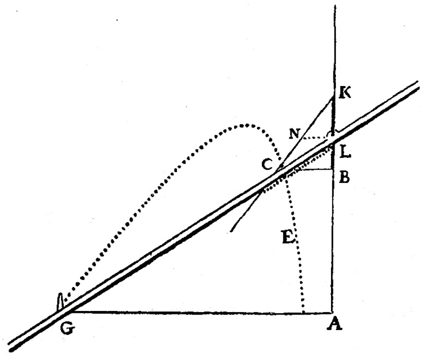
In de volgende figuur zien we het eerste moment waarop Descartes voor ons herkenbare coördinaten gebruikt.

We moeten ons hier driehoekje NLK als van vaste vorm en grootte voorstellen; het kan langs de vaste lijn boven A op en neer schuiven.

De grondlijn GA is eveneens vast, maar GL is een lijn die van stand verandert als NKL en dus L beweegt. C is het beweeglijke snijpunt van de lijnen NK en GL.

Wat is de baan waarover C beweegt?

In de figuur van Descartes is B het voetpunt van de loodlijn uit C, is x de lengte van AB en y de lengte van BC; dat staat in de tekst. Descartes beschrijft de positie van C dus met de *afstanden* van C tot twee gegeven lijnen; hier zit nog wel verschil met de moderne zienswijze waarin C bepaald is door de projecties op twee gegeven lijnen.



Aprés cela prenant vn point a diſcretion dans la courbe, comme C, ſur lequel ie ſuppoſe que l'inſtrument qui ſert a la deſcrire eſt appliqué, ie tire de ce point C la ligne C B parallele a G A, & pourceque C B & B A ſont deux quantités indeterminées & inconnuës , ie les nomme l'vne y & l'autre x. mais affin de trouuer le rapport de

De vergelijkingen ontstaan vanuit twee paren gelijkvormige driehoeken: *KNL* met *KCB* en *LCB* met *LGA*.
Omdat het gestelde probleem in Descartes' termen 'onbepaald' is, gaat het om al de oplossingsparen (x, y) van een vergelijking in twee onbekenden. De door een vergelijking beschreven meetkundige plaats! In Descartes' notatie:

$$yy \propto cy - \frac{cx}{b}y + ay - ac.$$

de laquelle on connoiſt que la ligne E C eſt du premier genre , comme en effect elle n'eſt autre qu'vne Hyperbole.

De slotregel stelt dat de figuur een hyperbool is. Die conclusie lijkt getrokken uit de aard van de vergelijking, maar dat is niet geheel duidelijk in de tekst.

Nu zijn belangrijke ingrediënten van de analytische meetkunde in hun historische context geplaatst: de analytische methode zelf, algebraïsering door benoeming van lijnstukken, de toepassing daarvan op coördinaten, een vergelijking in x en y met oneindig veel oplossingsparen, die voor de baan van een bewegend punt staat, het uit de vergelijking afleiden van de aard van de kromme. In dit voorbeeld van Descartes wordt de analytische meetkunde zichzelf.[4]

Ook wat wij tegenwoordig 'analyse' noemen, begon op dit speelveld van mechanisch beschreven bewegingen in het platte vlak. Raaklijnen, afgeleiden en integralen hadden voor een deel hun geboortegronden in deze met de algebraïsche-analytische methode verrijkte meetkunde, en groeiden groot in de vruchtbare tuin van de 'mathematica mixta', waar navigatie, astronomie, landmeetkunde, fortenbouw, en mechanica toe behoorden. Toegepaste wiskunde zouden wij nu zeggen, gewend als we zijn aan de negentiende-eeuwse scheiding in zuiver en toegepast, in echt en maar zo'n beetje.
Noor noemde enkele bladzijden eerder het belang van meetkunde voor bijvoorbeeld de GPS en andere toepassingen. Mijn corrigerende opmerking verwees natuurlijk naar de analytische methode in de meetkunde.

De analytische meetkunde kreeg een eigen gezicht, ze werd geen voortzetting van de synthetische meetkunde met andere middelen, maar vond haar eigen figurenwereld. De gelijkwaardigheid van vergelijking en figuur is een centraal thema van de methode en die figuren die zich op deze manier goed laten hanteren, verschenen prominent in beeld. Bij tweedegraadsvergelijkingen blijken dat precies de mogelijke doorsneden van een kegel met een vlak te zijn. Cirkel, parabool, ellips, hyperbool plus de ontaarde gevallen: lijnenpaar, dubbellijn, punt. Voor een evenwijdig lijnenpaar wijken we uit naar de tot cilinder ontaarde kegel en pietje-precies mag de lege verzameling met als vergelijking bijvoorbeeld $y^2 = -3$ verkrijgen door snijding van de cylinder $x^2 + y^2 = 1$ met het vlak $x = 2$.
Er bestaat uiteraard een recht-toe-recht-aanmethode om bij een gegeven kwadratische vergelijking vast te stellen wat de bijhorende figuur is.
Uiteraard is ruimtelijke en meerdimensionale analytische meetkunde ook mogelijk. Naarmate de dimensie hoger wordt, stijgt de behoefte aan meer systematiek in de algebraïsche beschrijving. De lineaire algebra met zijn gestandaardiseerd omgaan met stelsels lineaire vergelijkingen, vectoren, in- en uitproducten, matrices en determinanten functioneert heel fraai op dit gebied. Er ligt hier wel de didactische vraag of het dienstig is van meet af aan, dus ook in dimensie twee en als het nog helemaal niet zeker is of veel verder gegaan wordt, die methoden in het onderwijs mee te nemen.

Zie toe op B en D!

In de periode 2007-2010 is Analytische Meetkunde een keuzevak in wiskunde D. In deze periode staat er nog synthetische meetkunde op het wiskunde B-menu. De werkgroep meetkunde van cTWO (Lia van Asselt, Dick Klingens, ondergetekende) heeft tegen die achtergrond een kader voor de Analytische Meetkunde aangegeven en voorlopige lesmaterialen ontwikkeld en verzameld. Plunder http://www.ctwo.nl; zoek Wiskunde D > Meetkunde
Het afgelopen schooljaar is al heel wat ervaring met dit materiaal opgedaan, zie bijvoorbeeld het artikel van Jacques Jansen van het Strabrecht College in deze *Nieuwe Wiskrant*. Het materiaal bevat voorbeelden die in eerdere levens van het schoolvak Analytische Meetkunde niet direct voorkwamen; voorbeelden waar het algebraïsch modelleren (dat is Descartes' stap drie) heel expliciet wordt beoefend zónder dat er coördinaten aanwezig zijn, zoals

4. Een veel diepgaande analyse van de betekenis van *La Géométrie* is te vinden in *Redefining Geometrical exactness*, Henk J. M. Bos (2001, Springer-Verlag). Zie ook de informatie op http://www.ctwo.nl, bij meetkunde in wiskunde D.

in eerdergenoemd driehoek-met-cirkels-voorbeeld. Het gebruik van meetkundige coördinaten wordt door dit type onderwerpen vaak ook wel uitgelokt.
Anderzijds zijn er veel problemen te vinden die tot de klassieke stroom van de analytische meetkunde horen: het onderzoek van figuren in samenhang met vergelijkingen, vooral lijnen en kegelsneden. Op de cTWO-site staat ook een kopie van een schoolboek Analytische Meetkunde uit de periode rond 1960: dat van C. J. Alders. Voor wie nog niet zo vertrouwd is met de ins en outs van dit stuk wiskunde: aanbevolen.
Een goede opgave wordt niet stoffig doordat het papier waarop hij gedrukt staat, vergeelt; niettemin moeten we in de nabije toekomst de moderne toepassingen en vooral ICT meer naar voren brengen op dit gebied.
Vooral omdat, juist nu deze *Nieuwe Wiskrant* verschijnt, de discussies over de eindtermen wiskunde B en D voor 2010 in volle gang zijn. Op moment van schrijven van dit artikel kan daar niet heel veel over gezegd worden, maar enkele basale vragen liggen er vast wel en aan de hand van het voorgaande deel van dit artikel is wel te bedenken hoe de standpunten althans bij de werkgroep meetkunde van de cTWO liggen:

– Maak het wiskunde B-programma niet te eenzijdig van kleur door het te beperken tot dat deel van de wiskunde waar het rekenen het redeneren gemakkelijk overschaduwt. Wiskunde gaat over getallen én over ruimte. Voor de aansluiting op het WO is het niet goed een eenzijdig beeld van wiskunde te geven.
– Combineer synthetische en analytische meetkunde bij zowel wiskunde D als B maar geef ook de synthetische meetkunde een stuk zelfstandige ruimte in B.
– Analytische meetkunde biedt een zinvol en motiverend kader voor algebra. Vooral algebra waar het uitvoeren van algebraïsche bewerkingen geschiedt in het verhelderende licht van een meetkundige situatie; algebra waar reflecteren op het algebraïsch proces de noodzakelijke verdieping geeft en stuurt. Algebra doen op een manier die uitgroeit boven het niveau van rekenmachientje spelen.
– Schep binnen de meetkunde van wiskunde D gelegenheid voor ruimtemeetkundetoepassingen en ICT. Een mooie kans zou zijn ruimtemeetkunde met de computer op te voeren als standaardonderdeel van het programma; denk aan Google's Sketchup bijvoorbeeld. Zulke constructieprogramma's doen een praktisch beroep op de mix van redeneren en ruimtelijk inzicht en bieden een constructief alternatief voor een altijd stroef lopend onderwerp als 'ruimtelijk redeneren'.

Algebra 2007, bottleneck of gouden kans?

De algebra bij de analytische meetkunde, dat is natuurlijk het hete hangijzer, de bottleneck of wat voor moeilijks dan ook.
We gaan weer even terug naar de klas. Ik versla twee typerende gebeurtenissen, met redelijk goede leerlingen in de hoofdrollen.

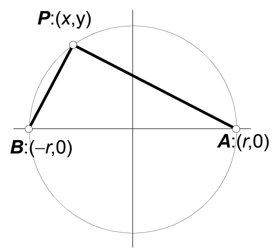
Eerste voorbeeld: opstellen van de vergelijking van de cirkel met middelpunt (2, 1) en gaande door (4, 2).
De straal werd door Sietske goed berekend en haar vergelijking ziet er meteen goed uit:

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2} = \sqrt{5}$$

Maar een tijdje later staat er (met nog wat tussenstappen) onder een berekening:

$$(x-2)^2+(y-1)^2 = 5$$
$$x^2-4x = -y^2+2y$$

Antwoord op mijn vraag naar het waarom van deze laatste (correcte) herleiding: ik dacht dat dat moest.
Van mij niet, maar het is wel begrijpelijk. Een gesprek (ook met de leerlingen eromheen) over de vraag welke vergelijking nu het beste de 'cirkel' liet zien, loste veel op. Volgens sommige de wortelvorm, volgens andere de Pythagorasvorm. Maar niet de laatste!
Ernstig is dit voorbeeld misschien niet, maar het laat wel zien dat aan de betekenisvolle koppeling vergelijking-figuur gewerkt moet worden. Algebra is maar al te vaak een te verrichten boetedoening met letters, wortels, kwadraten en deelstrepen. Van dat misverstand moeten we echt af en laten we daar de analytische meetkunde voor gebruiken!



Wel ernstig is het als leerlingen vastlopen in hun algebra, of dat lijken te doen in dit tweede voorbeeld!
De opgave bij deze figuur is uit de loodrechtheid van hoek *P* (Thales!) een vergelijking van de cirkel af te leiden. Leerlingen weten op dat moment wat het resultaat moet zijn. Remco is gekomen tot

$$\frac{y}{x-r}\cdot\frac{y}{x+r} = -1$$

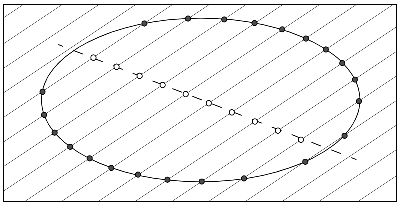
maar zit met de handen in het haar: Hoe moet ik nu verder?
Moeten we maar samen de keus maken dit soort vragen niet te stellen, vóór de leerlingen van nu weer collectief op het gymnasiale algebrapeil van 1957 zijn? Ik denk dat we dat niet moeten doen, want we hebben hier een leerling die door het probleem zelf gemotiveerd is zijn algebra op te poetsen, hij stelt zijn vraag toch niet voor niets. Hij is dan ook snel geholpen met een lichte tip. De bevrediging van het kloppende resultaat is een natuurlijke beloning.
Ik wil het voorbeeld Remco-en-Thales niet idealiseren, het onvermogen van veel andere leerlingen is vaak nog

vele malen groter en dan zitten we echt met de handen in het haar. Ik houd wel de twijfel gaande of oefenen in de droge vorm (zoals heden nogal zwaar gepropageerd wordt) op den duur werkt, omdat het niet vanuit een echte wiskundige nood of behoefte wordt gevoed. Motivatie door functioneel gebruik met ingebouwde beloning, het is nogal wat extra's dat de meetkunde ons hier biedt.
We hebben twee problemen gesignaleerd: gebrek aan binding van algebra aan betekenis en gebrek aan vaardigheid. Bij beide schoot de meetkunde ons te hulp!

Driemaal algebra in de ellips

De algebraïsche optimist gelooft dat, heeft hij of zij een probleem in de taal van de algebra overgezet, noeste vlijt hem of haar tot succes zal leiden. Geen geniale flitsen van mooie hulplijnen meer nodig, gewoon een standaardpad via de TomTom van de algebra. De resulterende vergelijkingen moeten opgelost worden met standaardmethoden zodat de meetkunde eindelijk voor gewone mensen toegankelijk wordt. Gegarandeerd resultaat met vaste rente. We proberen de droom eens waar te maken met een klassiek vraagstuk:

> Neem een ellips en snijd die met een bundel evenwijdige lijnen. De middens van al de afgesneden koorden liggen op een rechte lijn. Toon dit aan.



We gebruiken een ellips met standaardvergelijking:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

De evenwijdige lijnen hebben allemaal dezelfde richtingscoëfficiënt, zeg m, dus die stellen we voor met

$$y = mx + p$$

Snijden met de ellips; in vergelijkingentaal dus de uitdrukking voor y van de lijnvergelijking in de standaard ellipsvergelijking substitueren (haakjes toevoegen!):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(mx+p)^2}{b^2} = 1$$

Nu de rest van het plan: Herleiden naar een vierkantsvergelijking in x, vierkantsvergelijking oplossen, twee oplossingen vinden, bijhorende twee y-waarden bepalen met de lijnvergelijking, middens bepalen, kijken of er een eenvoudig lineair verband is tussen coördinaten van dat punt. Het moet allemaal kunnen, en misschien wel in een uurtje als we goed uitgerust zijn...

Een voor de hand liggende versnelling vinden we, als nwe iet de twee oplossingen x_1 en x_2 zelf van de vierkantsvergelijking bepalen, maar alleen $(x_1 + x_2)/2$; die uitdrukking kan direct in twee van de coëfficiënten van de vierkantsvergelijking worden uitgedrukt. Dit wordt de halfuurse oplossing, want hiermee lukt het echt redelijk.

Toch zit er één ongemotiveerde keuze in de hele aanpak, namelijk die voor de keuze van het type vergelijking van de lijn. Lijnkeuze $y = mx + p$ was een te algemene. Die vorm is sterk georiënteerd op het coördinatenstelsel zelf en minder op de specifieke geometrie van het vraagstuk: de p in de vergelijkingen heeft geen meetkundige betekenis, die bij het probleem hoort. Dat maakt het rekenverhaal zo moeizaam. Wat we willen, is kijken naar het midden van een koorde die de gegeven helling heeft, we willen dat snijden zelf niet nog eens herhalen.

Dit is een belangrijk punt en daarom weer even de blik verruimen naar de toekomstige eindtermen Analytische Meetkunde in wiskunde B of D voor we het probleem verder oplossen. Die eindtermen gaan hoogst waarschijnlijk ongeveer zo'n formulering bevatten:

De leerlingen moet de vergelijking van een lijn op kunnen stellen:
a. in standaardvorm met r.c en y-afsnijding
b. door twee gegeven punten.

Jammer, een gemiste kans. Moge het worden:

De leerling kan afhankelijk van het gegeven probleem, een keuze maken uit verschillende vormen van de vergelijking van een lijn, zoals ... etcetera.

Verstandig omgaan met algebra eist méér dan basisvaardigheden in een lijstje. Want het kiezen van de verkeerde vorm brengt je in zwaar weer, en we hebben niet allemaal de fabelachtige algebraïsche vaardigheid van een Descartes in huis.

Nu volgt een algebra-expertoplossing van hetzelfde probleem. De expert zelf doet het normaliter vrij vlot, maar nu denkt hij of zij hier en daar even hardop.
Begin eens met de eindpunten P_1 (x_1, y_1) en P_2 (x_2, y_2) van zo'n koorde. We weten nu:

a. P_1P_2 heeft vaste helling, zeg m. Dus

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = m$$

b. P_1 en P_2 liggen op de ellips. Dus:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \qquad \text{en} \qquad \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1$$

Bij het maken van een algebraïsch plan hoort, dat je weet wat je bereiken wilt. Wat we willen weten is of er een (lineair) verband is tussen

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \qquad \text{en} \qquad \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Hoe kom ik nu van de uitdrukking met het x-verschil en y-verschil naar een uitdrukking met met x-som en y-som, en wel via die vergelijkingen met de kwadraten?

Mogelijk kunnen we zoiets gebruiken zoals dit:

$$(x_1 + x_2) \cdot (x_1 - x_2) = x_1^{\,2} - x_2^{\,2}$$

De algebra-expert heeft dit paraat; en dan niet eens paraat in de zin dat het op afroep beschikbaar is, maar dat het opgeroepen wordt door de noden van de vraag.

De verdere afleiding ligt nu voor de hand: de twee vergelijkingen voor P_1 en P_2 van elkaar aftrekken en deze identiteit (en de analoge voor de y's) gebruiken. Er ontstaat:

$$\frac{(x_1 + x_2) \cdot (x_1 - x_2)}{a^2} + \frac{(y_1 + y_2) \cdot (y_1 - y_2)}{b^2} = 0$$

Door delen krijgen we de min- en de plus-vormen bij elkaar en volgt het resultaat bijna vanzelf:

$$\frac{(x_1 + x_2)}{a^2 \cdot (y_1 + y_2)} + \frac{(y_1 - y_2)}{b^2 \cdot (x_1 - x_2)} = 0$$

want de stappen naar:

$$\frac{(x_1 + x_2)/2}{\underline{(y_1 + y_2)/2}} = -\frac{m \cdot a^2}{b^2}$$

zijn niet erg groot meer. Ja, de middens liggen op een lijn; pas nog even op met de richtingscoëfficient. Die is:

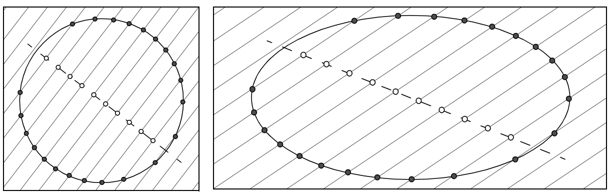
$$-\frac{b^2}{m \cdot a^2}$$

Zo'n elegante algebraïsche oplossing geeft een beeld van hoe het kán met algebra, maar die komt niet vanzelf naar boven drijven. Er zat heel wat overweging achter. Toch denk ik dat in de Analytische Meetkundelijn in Wiskunde D zulke oplossingen aan bod moeten komen.

Docent, doe je plicht. Wees maar eens even de Mozart van de algebra. Laat zien dat de (bekende?!) regel voor verschil van twee kwadraten het algebraïsche werk klein en heel doelgericht houdt, benadruk dat je bij je algebrastappen altijd even nadenkt óf je wel haakjes moet verdrijven om je formule in losse atomen te splitsen, óf dat je je formule als een samenhangende zin bij elkaar houdt. Doe nog eens zo'n actie en je leerlingen gaan de pret van de elegantie geleidelijk wel zelf beleven.

Driesecondenoplossing met addertje

Na de mooie algebraïsche tienminutenoplossing nu de drie secondenoplossing. Staat in de volgende illustratie. het bewijs is de opmerking: *Rek het linkerplaatje op tot het rechterplaatje*:



Omdat parallel, recht en midden na oprekken nog steeds parallel, recht en midden zijn, gaat het goed. Simpel toch?

Van de andere kant: dit 'bewijs' (van de vlotte hint met de twee plaatjes is zeker een kloppend bewijs te maken) heeft het voordeel dat het appelleert aan intuïties, er is behalve *verificatie* nu ook *evidentie*.

We kregen iets moois van de analytische methode, namelijk een stevige en toegankelijke methode, maar we leverden ook wat in: evidentie. Dat lijkt vaak zo te zijn bij analytische meetkunde.

Toch liggen winst en verlies hier wel gespreid. Want van de weer andere kant: hoe weten we eigenlijk dat de opgerekte cirkel inderdaad een ellips is volgens de tuinmansdefinitie met de constante som van afstanden tot de brandpunten is? Dat is wel een addertje onder het schijnbaar heel directe bewijs. Het is echter goed mogelijk met of zonder coördinaten aan te tonen dat de opgerekte cirkel een ellips is.

Dit zou een schitterend meetkundehoofdstuk op wiskunde D-niveau kunnen zijn: het beschouwen van de verschillende ovalen die we kennen (tuinmansdefinitie, opgerekte cirkel, kegelsnede, mogelijk nog andere) en het onderzoek naar de verbanden uit te voeren met synthetisch én analytische middelen samen. Samenhang![5]

Conclusies, deel twee

De belangrijkste conclusies van dit artikel stonden al als aanbevelingen onder het kopje *Zie toe op wiskunde B en D*. Bij de analytisch-meetkundige voorbeelden zijn ze wat betreft het opnemen van algebraïsche vaardigheden binnen meetkundige toepassingen nog eens toegelicht. Analytische meetkunde is een paradijs voor het beoefenen van algebra, met het bijkomende voordeel dat er een intrinsieke beloning is: de kick dat het zo lekker klopt.

Aan het eind is nogmaals gepleit voor een samengaan van diverse methoden bij de meetkunde.

Onderdelen waar we het in praktische zin wat minder over gehad hebben, maar die wel aangestipt zijn:

- het gebruik van vectoren, dat weer herhaaldelijk genoemd wordt;
- welke algebraïsche sleutelstappen zijn nu eigenlijk nodig;
- ruimtemeetkunde, die danig in het slop raakt in de bovenbouw;
- gebruik van ICT.

We komen erop terug, want meetkunde blijft!

Aad Goddijn
Freudenthal Instituut, Utrecht

5. Zie ook de herdruk van *Lessen in Ruimtemeetkunde* (Martin Kindt, 1986) op de website van cTWO.