Op de eerste plaats worden alle leermaterialen ontwikkeld voor de leerling en in tweede instantie voor de docent. Het materiaal bewijst zijn schoonheid, originaliteit, gratie, etcetera pas wanneer blijkt dat het in staat is bij de leerling een vonk over te laten springen. Of nog mooier: de leerling én de docent aan het denken zet. Dat laatste overkwam **Jacques Jansen**, leraar aan het Strabrecht College te Geldrop.

Descartes: ik denk, dus ik besta

Inleiding

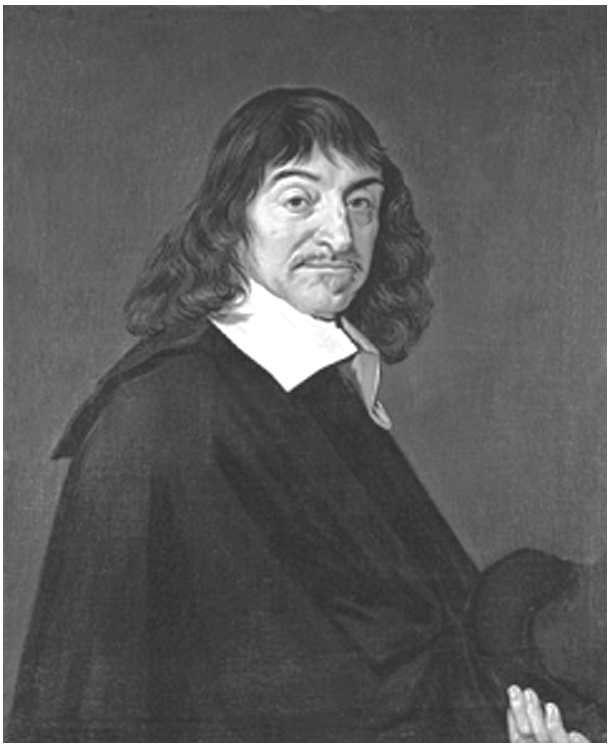


fig. 1 René Descartes, geschilderd door Frans Hals in 1648

Een citaat uit het ontwikkelde materiaal:

> De analytische meetkunde, ook wel bekend als Cartesiaanse meetkunde, is de studie van meetkunde die de principes van algebra gebruikt. Gewoonlijk wordt het Cartesisch coördinatenstelsel toegepast om vergelijkingen voor vlakken, lijnen, krommen en cirkels te manipuleren, vaak in twee of drie, maar in principe in willekeurig veel dimensies. Sommigen zijn van mening dat de introductie van analytische meetkunde door René Descartes het begin van moderne wiskunde was.

De droge feiten
Klas: Vijfde klas natuur- en techniekgroep
Periode: 12 maart – 22 april
Aantal lessen: 17
Lesmateriaal: 6-VWO Philips van Horne, Weert (Leon Smeets, januari 2007, van de site van cTWO).
Op grond van eerder geproduceerd materiaal zoals de introductie voor 4-VWO, het materiaal van het Junior College, passages uit Alders (zie hieronder), en aangevuld met eigen ideeën en opgaven, heeft Leon Smeets van de Philips van Horne SG Weert een lessenserie van vijftien lessen voor 6-VWO gemaakt.
Samenstelling klas: twaalf jongens en één meisje
Werkvorm: werken in groepen; twee groepjes van vier en een groep van vijf.

Hoe verliep het proces?

Het practicum Cabri was heel nuttig. Later hebben de leerlingen er bij verschillende opgaven gebruik van gemaakt. Tijdens alle lessen was de motivatie van alle leerlingen bijzonder hoog. Dat heeft mij als docent erg verrast. Zouden ze dat rekenwerk wel leuk vinden, had ik mij van tevoren afgevraagd. Ja, dus. Als een stelletje terriërs beten ze zich vast in de opgaven. Een techniek zoals kwadraat afsplitsen hadden ze snel onder de knie.
Toegegeven, er stond druk op de ketel. Immers, het was in combinatie met de wiskunde D-dag een PTA en na elke vier lessen moest er een product worden ingeleverd. Meestal keek ik in het weekend dat werk na. Mijn inzet zat voornamelijk in de voorbereiding en correctie. Alle opgaven heb ik zelf uitgewerkt. In de klas had ik het gemakkelijk. Motiveren hoefde ik niet. Ik mocht van de leerlingen niets voor het bord uitleggen. De groepen wilden er eerst zelf uitkomen.

De leerlingen bekeken nieuwsgierig mijn opmerkingen, aanvullingen en correcties van hun wekelijkse producten. Meestal waren ze het wel eens met mijn beoordelingen.

Opvallende wiskundeopgaven

Kwamen de leerlingen wel eens niet uit een opgave, of zat ik zelf als docent wel eens vast? Ik doe een greep uit een aantal interessante opgaven.

Geheime agenda

Bij de keuze van analytische meetkunde heeft meegespeeld het meenemen van algebraïsche vaardigheden. Inderdaad, er kan heel wat gerekend worden. De vraag is of dat ook altijd gebeurt. Een mooi voorbeeld is opdracht 8 van paragraaf 3.2.2.

> 8. Van driehoek *ABC* waarvan $AC = BC$ en $\angle ABC = 90^{\circ}$ zijn gegeven de hoekpunten *A*(1,1), *B*(5,3). De driehoek ligt geheel in het eerste kwadrant. Bereken de coördinaten van hoekpunt *C*.

De auteurs hoopten waarschijnlijk op de volgende aanpak:

- schets maken
- de coördinaten berekenen van het midden *M* van lijnstuk *AB*: (3, 2)
- vergelijking van cirkel opstellen met *M* als middelpunt en de lengte van *AB* als diameter: $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 5$
- opstellen van de middelloodlijn van *AB*: $y = -2x + 8$
- stelsel van twee vergelijkingen oplossen, leidt tot een kwadratische vergelijking waarbij haakjes moeten worden verdreven, korter schrijven en tenslotte ontbinden in factoren. Dat geeft twee oplossingen voor punt *C*.

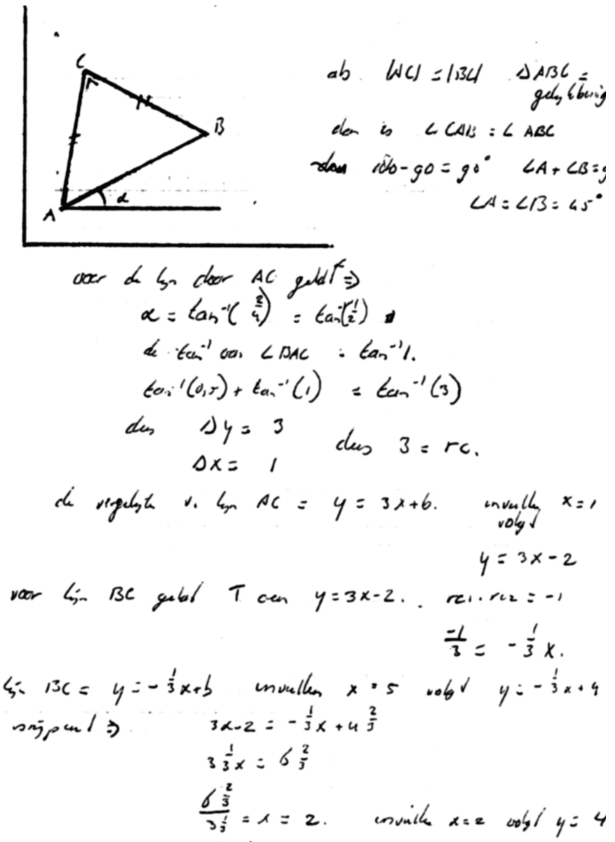


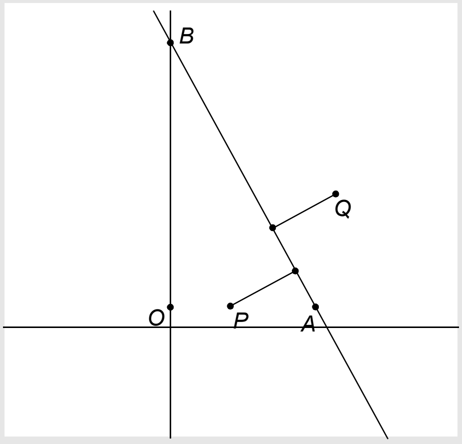
fig. 2 uitwerking 1

Echter, groep A, vertrouwd met de grafische rekenmachine, pakt het anders aan. Zie uitwerking 1. Hun uitwerking beperkt zich tot een lineaire vergelijking. De tweede oplossing voor punt *C*, op de *x*-as wordt daarbij wel over het hoofd gezien.

Problem solving

Naast het tonen van algebraïsche vaardigheden wordt er ook een beroep gedaan op het tonen van inzicht bij de start van het oplossen van een probleem. In '§ 3.5 Gemengde opgaven over lijnen' staat opgave 2:

> 2. Gegeven zijn de punten *P*(1,0) en *Q*(3,2).
> De punten *P* en *Q* hebben gelijke afstanden tot een lijn *l*, die de positieve *x*-as in het punt *A* en de positieve *y*-as in *B* snijdt.
>
> De oppervlakte van driehoek *ABO* is minimaal
> Stel de vergelijking op van de lijn *l*.



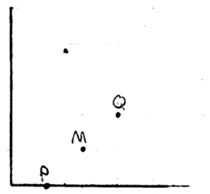
Groep B maakt een schets (zie uitwerking 2), en bepaalt het punt *N*(2, 1) het midden van *PQ*. Vervolgens schrijven ze een prachtige opmerking op, maar laten het na om hun bewering te bewijzen. Met behulp van congruente driehoeken was dat zo gelukt. Toch, met die ene opmerking is het hele probleem opgelost. Daarna volgt het ambachtelijke werk. De groep maakt een rekenfoutje in de algebra, maar als er toch gedifferentieerd moet worden, komt alles weer goed.

De docent loopt vast en de leerlingen aanvankelijk ook

Hier komt opgave 5 van 7.3:

> 5. Bewijs dat het product van de afstanden van de brandpunten van een ellips tot een willekeurige raaklijn constant is.

Hier kwam ik in eerste instantie niet uit, de leerlingen ook niet. Ik had wel een tip voor de leerlingen. Pak een mooie situatie en bereken die constante. We kiezen de raaklijn even niet willekeurig maar in punt (0,*b*). Het product van de afstanden is dan b^2. Helaas, deze tip hielp niet. Deze opgave leverde enorme rekenpartijen op en een confrontatie met je persoonlijke eigenschappen. Ik was verbaasd over het doorzettingsvermogen van de leerlingen.



De verzameling lijnen die net zo ver van P als van Q afliggen gaan allemaal door M(2,1), want dat punt ligt ertussenin.

lijnen net zo ver van P als Q: $y = ax + b$ met punt $(2, 1)$

$1 = 2a + b$

$b = 1 - 2a$ $\quad y = ax + 1 - 2a$ Als $x = 0$, $y = 1 - 2a$ = hoogte Δ

$x = \dfrac{y-b}{a} = \dfrac{y - 1 + 2a}{a}$. Als $y = 0$, $x = -\frac{1}{a} + 2$ = breedte Δ

$\text{opp.}\Delta = \dfrac{h \times b}{2} = \dfrac{(1-2a)\cdot(-\frac{1}{a}+2)}{2} = (\frac{1}{2} - a)(-\frac{1}{a} + 2) =$

$-\dfrac{\frac{1}{2}}{a} + \underline{1 - 1} - 2a = -\dfrac{1}{2a} - 2a = -\frac{1}{2}a^{-1} - 2a$

$\text{opp}\Delta' = \frac{1}{2}a^{-2} - 2 = 0$

$\frac{1}{2}a^{-2} = 2 \quad \dfrac{1}{2a^2} = 2 \quad 4a^2 = 1 \quad a^2 = \frac{1}{4}$

$a = -\frac{1}{2}$ (Bij $a = \frac{1}{2}$ heb je geen ΔABO)

$b = 2$

vergelijking l: $y = -\frac{1}{2}x + 2$

fig. 3 uitwerking 2

De leerlingen maakten gebruik van onderstaande tekst en de afstandsformule van een punt tot een lijn.

De vergelijking van de raaklijn in $P(x_1, x_2)$ aan de ellips met vergelijking $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ is $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$.

De brandpunten zijn $F_2(-c, 0)$ en $F_1(c, 0)$, waarbij geldt: $c^2 = a^2 - b^2$.

De schrijvers hebben het ons niet gemakkelijk gemaakt. Een paar bladzijden terug vonden de leerlingen de volgende tekst:

> Evenals bij een cirkel is ook bij de ellips een parametervoorstelling goed bruikbaar om een willekeurig punt op de ellips te beschrijven.
>
> $\begin{cases} x = a\cos\varphi \\ y = b\sin\varphi \end{cases}$ is de parametervoorstelling van een ellips.

Dit was een keerpunt in de worsteling. Een cruciaal moment! Voor de raaklijn in punt $P(a \cdot \cos\varphi, b \cdot \sin\varphi)$ krijgen we:

$\frac{1}{a} \cdot \cos\varphi \cdot x + \frac{1}{b} \cdot \sin\varphi \cdot y = 1$. Vervolgens worden de afstandsformules gebruikt:

$$\frac{\left|\frac{1}{a}\cdot\cos\varphi\cdot(-c) - 1\right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\cdot\cos\varphi\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\cdot\sin\varphi\right)^2}} \cdot \frac{\left|\frac{1}{a}\cdot\cos\varphi\cdot(c) - 1\right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\cdot\cos\varphi\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\cdot\sin\varphi\right)^2}}$$

en met de relaties $c^2 = a^2 - b^2$ en $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$ wordt het product vereenvoudigd tot de constante b^2. Twee van de drie groepen kwamen hier helemaal uit.

Woensdag 13 juni, was er een wiskunde-D dag 'Dé Start'. Aad Goddijn liet in de eerste lezing zien hoe dit probleem opgelost kan worden met de vlakke meetkunde.

Gemengde opgaven

Twee leerlingen heb ik gevraagd om een verslag te schrijven. Hieronder een stukje uit het verslag van Rob Klabbers van groep A:

> Uiteindelijk kwamen we na een week of vier aan bij de laatste pagina's, waarop de gemengde opdrachten stonden. En het oplossen van deze zes problemen, dat was eigenlijk ons voornaamste levensdoel in de laatste week. Ikzelf had me vastgebeten in probleem 6, maar ik kwam er na twee uur complexe en vooral uitgebreide berekeningen achter dat het analytisch oplossen van dit probleem meer tijd in beslag zou nemen dan realistisch beschikbaar was. Het was een kleine desillusie, maar ik wist dat de oplossing binnen mijn kunnen lag. Helaas kon ik het niet opbrengen om meerdere malen breuken met zowel in de teller als in de noemer meer dan zes termen te kwadrateren, om te controleren of mijn bewering juist was.
>
> Maar ook de andere problemen waren prachtig om te doen. Ik kan wel zeggen dat ik dit project echt heel leuk vond om te doen. Het slokte me op als het ware. En ik denk zelfs het mijn houding tegenover wiskunde (nog) positiever heeft gemaakt. Ik vond het echt een leuk en geslaagd project, en naar mijn weten delen vrijwel al mijn medestudenten deze mening!

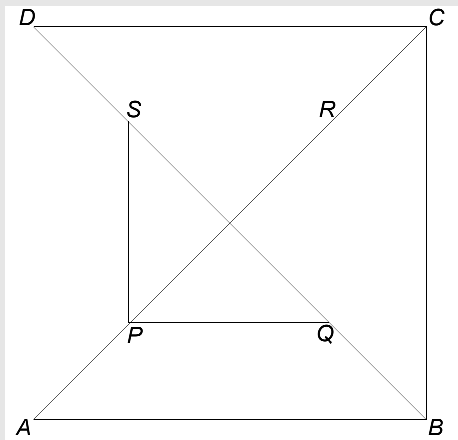
Het project wordt dus afgesloten met zes opgaven. Het interessante van deze opgaven is dat er twee oplossingsstrategieën gevraagd worden.

Opgave 5

Gegeven een vierkant *ABCD* met zijn diagonalen *AC* en *BD*.

Construeer het vierkant *PQRS* met de hoekpunten op de diagonalen *AC* en *BD* zo dat *AP* = *PQ* = *BQ*.

Geef zowel een constructie met behulp van de vlakke meetkunde als van de analytische methode.



De leerlingen deden het als volgt:

> $AP = PQ$ dus $\angle AQP = \angle PAQ$. Maar $\angle AQP = \angle QAB$ (Z-hoeken). Lijn AQ moet dus een deellijn zijn van $\angle PAB$. Dus de deellijn moet geconstrueerd worden.

Met de analytische meetkunde kan het een rekenpartij worden.

Terugblik

Prachtig is het dat de analytische meetkunde tegenover de synthetische meetkunde wordt gezet. Vaak zijn de oplossingen van de synthetische meetkunde veel fraaier, maar je moet er wel opkomen. In hogere dimensies heeft de analytische meetkunde meer voordelen.

Verbaasd was ik over de inzet van de leerlingen. Ze hebben hard en enthousiast gewerkt. Het materiaal zit goed in elkaar. Hier en daar zijn er wat typefoutjes en kan de tekst wat duidelijker. Opvallend is dat leerlingen het niet erg vinden om een of twee pagina's theorie te bestuderen. Het is de moeite waard om even stil te staan bij het werk van René Descartes: 'Cogito, ergo sum'.

Jacques Jansen,
Strabrecht College, Geldrop

Verschenen:

Uit het persbericht:
'Ik ben geboren op 31 januari 1979, een woensdag. Ik weet dat het een woensdag was omdat de datum me blauw bijstaat, en woensdagen zijn altijd blauw, net als het cijfer negen of het geluid van harde, ruziënde stemmen.'
Daniel heeft een obsessieve behoefte aan orde en regelmaat. Zo moet hij elke ochtend 45 gram pap eten, op vaste tijden zijn kopjes thee drinken en voor hij het huis verlaat altijd het aantal kledingstukken tellen dat hij draagt. Getallen en woorden zijn Daniels vrienden, hij ziet ze als kleuren en vormen. Hij legt uit hoe hij razendsnel rekent, priemgetallen herkent, kalenderdagen benoemt en talen leert: voordat hij geïnterviewd werd voor de IJslandse tv, leerde hij in een week IJslands.

Citaat:

> Wanneer ik een getal door een ander getal deel, zie ik in mijn hoofd een spiraal die in steeds grotere, kromtrekkende lussen omlaag draait. Elke deling zorgt weer voor een andere maat spiraal met een andere kromming. Ik kan een som als 13 : 97 (= 0,1340206...) tot op honderd cijfers achter de komma uitrekenen.

Op een blauwe dag geboren
Daniel Tammet
Uitgeverij Nieuwezijds
€ 19,95
ISBN 978 90 571 2255 2