

Eindhoven is de thuisbasis voor zowel het steunpunt wiskunde D als NLT. In beide steunpunten werkt de Technische Universiteit Eindhoven samen met de Fontys Lerarenopleiding Tilburg. Voor wiskunde D komt daar ook nog de landelijke samenwerking met T(R)U's bij. De maandelijks op de TU/e bijeenkomende kerngroep van VO- en HO-docenten licht de activiteiten van het steunpunt toe, verwoord door **Hans Sterk**.

Wiskunde D: het steunpunt aan de TU/e

Inleiding

Vorig jaar is de Technische Universiteit Eindhoven gestart met het opzetten van een steunpunt Wiskunde D. In de regio worden we hierin bijgestaan door Fontys Hogescholen Tilburg. Anderzijds werken we nauw samen met vergelijkbare steunpunten aan de Universiteit Twente, de Technische Universiteit Delft en de Radboud Universiteit (het collectief van deze vier universiteiten wordt doorgaans aangeduid met 'T(R)U's'; zie ook de website www.wiskundedsteun.nl).

Zulke initiatieven worden door de Commissie Toekomst Wiskunde Onderwijs (CTWO) gestimuleerd. Vanuit dit steunpunt willen we de invoering en uitvoering van wiskunde D op diverse manieren ondersteunen en bovenal regionaal een hechte samenwerking tot stand brengen tussen voortgezet en hoger onderwijs.

De inrichting van het steunpunt

Bij de inrichting van het steunpunt zijn diverse lijnen uitgezet. Met de collegasteunpunten in Delft, Twente en Nijmegen is een scholingsreeks opgezet die afgelopen jaar op de diverse lokaties samen zo'n 260 deelnemers heeft getrokken. Dit jaar zullen de Technische Universiteiten cursussen aanbieden die elk ingaan op (achtergronden van) een of twee domeinen.

Daarnaast zijn we op de TU/e gestart met een 'kerngroep' bestaande uit docenten uit het voortgezet onderwijs, Fontys en de TU/e. Met deze groep hebben we ons gezet aan het ontwikkelen van materiaal voor wiskunde D, hebben we met name de laatste scholingsbijeenkomst van de Eindhovense reeks uit 2006–2007 ingericht en hebben we ons over andere zaken rondom wiskunde D gebogen, zoals voorlichting aan leerlingen uit klas 3. Ook dit jaar zet de kerngroep haar werk voort.

Een van de manieren waarop het steunpunt naar buiten treedt, is via de website www.win.tue.nl/wiskunded. Daar is ook het materiaal te vinden dat ontwikkeld is: *Complexe getallen*, *Beslissen* en *Cryptografie*. Aan de

hand van het gebruik op school door kerngroepleden en anderen proberen we het materiaal dit jaar waar nodig bij te stellen en verder te zoeken naar wegen om de samenwerking tussen docenten VO en HO te stimuleren en om van daaruit boeiend materiaal voor leerlingen af te leveren.

Hieronder gaan we nader in op het onderwerp complexe getallen.

Complexe getallen

Complexe getallen kom je in vrijwel elke beta-georiënteerde opleiding in het universitair onderwijs tegen: denk aan differentiaal- en differentievergelijkingen bij fysische of economische processen, of aan Fourier-theorie in verband met beeldverwerking. Daarnaast betreft het eenvoudigweg een fascinerend onderwerp – met meetkundige en algebraïsche aspecten – dat toegankelijk is voor middelbare (VWO-)scholieren.

De ontwikkelde module *Wat! Nog meer getallen?* over complexe getallen biedt naast een syllabus met de grondbeginselen van de complexe getallen en uitbreidingsgedeelten, ook webapplicaties (op de website van het steunpunt) en de gelegenheid om met een schoolklas aan een computerpracticum deel te nemen.

De syllabus kan gratis worden gebruikt, maar we vragen docenten die dit doen om ons hiervan in kennis te stellen, en ervaringen te melden. Er is ook een voorlopige docenthandleiding verkrijgbaar bij het steunpunt.

Nog meer getallen

Het is gangbaar om complexe getallen in te voeren als paren reële getallen of punten in het platte vlak. Wij hebben een andere weg bewandeld, waarbij we leerlingen eerst met een rekensysteem laten werken dat qua structuur met de complexe getallen verwant is, maar dat zich toch binnen de 'bekende' reële getallen bevindt: de getallen van de vorm $a + b\sqrt{2}$ waarbij a en b rationale getallen zijn; deze getallen worden wel genoteerd met $\mathbf{Q}[\sqrt{2}]$. Deze verzameling is gesloten ten aanzien van de rekenkundige

bewerkingen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. Deze aanpak biedt de mogelijkheid in een vroeg stadium de vereiste rekentaalvaardigheid te trainen. Het zet daarnaast voor geïnteresseerde leerlingen de deur open naar een korte bespreking van enkele zogenaamde diofantische vergelijkingen via enkele opgaven.

Na dit inleidend getallensysteem introduceren we complexe getallen door te gaan rekenen met getallen van de vorm $a + b \cdot i$ met a en b reëel waarbij we eisen dat i voldoet aan $i^2 = -1$ (nadat we in het eerdere getallensysteem hadden gerekend met een getal α dat voldoet aan $\alpha^2 = 2$). Wat de wiskunde betreft, voeren we hier complexe getallen in via een uit de algebra bekende manier: als een quotiëntring $\mathbf{R}[X]/(X^2 + 1)$. Maar die achtergrond blijft in het materiaal uiteraard achterwege. Ervaringen met enkele scholen die met het materiaal gewerkt hebben, laten zien dat het leren rekenen met i op deze manier soepel verloopt. Na deze algebraïsche introductie van de complexe getallen komt het complexe vlak aan de orde, gaan we in op de polaire schrijfwijze voor complexe getallen en introduceren we de complexe e-macht e^{it} als $\cos t + i \sin t$. Als motivatie voor deze definitie gebruiken we het feit dat $\cos t + i \sin t$ zich bij differentiëren gedraagt zoals je van een e-macht verwacht: $(\cos t + i \sin t)' = i(\cos t + i \sin t)$.

In uitbreidingsgedeelten van het materiaal (voor een deel in ontwikkeling) gaan we onder andere in op verbanden met meetkunde, getaltheorie, fractals en differentiaalvergelijkingen.

Computerpracticum

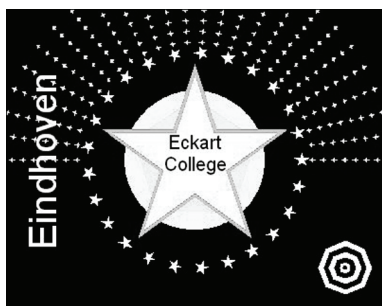


fig. 1 voorbeeld van een logo dat door leerlingen van het Eckart college met Mathematica is gemaakt

Ter ondersteuning van de module complexe getallen biedt de TU/e een computerpracticum aan. Voor het succesvol afsluiten van de module is het practicum niet strikt noodzakelijk, maar het is een waardevolle aanvulling op de opgaven uit de syllabus, omdat we in het practicum de leerlingen met min of meer vrije opdrachten stimuleren complexe getallen te gaan gebruiken als tool en op die manier de koppeling tussen complexe getallen en de rol ervan in het platte vlak vanzelf leren waarderen.

Het practicum bestaat uit een bezoek aan de Technische Universiteit Eindhoven, waar leerlingen een middag lang

aan de slag gaan met het computeralgebrapakket Mathematica. Dit pakket is geïnstalleerd op laptops, waar de leerlingen in tweetallen op werken. Speciaal voor het practicum is een aantal notebooks ('notebook' is de Mathematica-term voor een Mathematica-document) zo ontwikkeld, dat leerlingen niet eerst een cursus Mathematica hoeven te doorlopen, maar zich op de wiskunde kunnen richten. Leerlingen blijken zich doorgaans gemakkelijk in te werken in de notebooks, al signaleren we nog wel punten ter verbetering.

Bij het practicum ligt de nadruk op de meetkundige aspecten van het complexe vlak. Met één van de notebooks kun je bijvoorbeeld vrij figuren tekenen uitgaande van een aantal basisfiguren zoals rondjes, rechthoeken en sterretjes. Via complexe getallen kun je allerlei transformaties op de figuren loslaten: translaties, rotaties, schalingen en spiegelingen.

De eindopdracht van dit notebook is het ontwerpen van een logo voor de school, een open opdracht dus, die de nodige creativiteit van de deelnemers vergt. Er valt niet te voorspellen wat de leerlingen als eindproduct gaan inleveren, maar dit maakt het juist spannend. Bij de beoordeling weegt de mate waarin complexe getallen een rol spelen bij het ontwerp zwaar.

Op Dé Start, de openingsmanifestatie van wiskunde D die afgelopen 13 mei plaatsvond, is een workshop over het schoolpracticum gehouden. Een hand-out van deze presentatie is te vinden op de ctwo-website. Daarin zijn nog meer logo's te bewonderen.

Posteropdrachten

Met enkele scholen hebben we geëxperimenteerd met posteropdrachten: opdrachten waarin leerlingen een poster ontwerpen aan de hand van een thema uit de complexe getallen, en deze klassikaal toelichten. In deze opdrachten dienen leerlingen tot de kern van een onderwerp door te dringen om de relevante informatie bondig en visueel aantrekkelijk te presenteren. Onderwerpen zijn bijvoorbeeld: complex worteltrekken, meetkundige bewijzen met complexe getallen en gonioformules.



fig. 2 leerlingen van het Eckart college aan de slag met het schoolpracticum

Tot slot

Voor de andere modules, Beslissen en Cryptografie, zijn we een vergelijkbaar pad ingeslagen, maar zijn we nog niet zo ver met de praktijkervaring.

Zoals gezegd staat dit jaar in het teken van het bijschaven van materiaal, maar ook in het teken van het zoeken naar andere manieren om de modules te verrijken. Te denken valt aan masterclasses of gastlessen op school.

Hans Sterk,
Technische Universiteit, Eindhoven

De kerngroep bestaat uit:

Linda Bindels (Pleincollege Eckart, Eindhoven),

Ingrid van den Blik (Mencia de Mendoza, Breda),

Mike Boldy (TU/e),

Felix Borghouts (Pleincollege Van Maerlant, Eindhoven),

Jan Essers (Fontys lerarenopleiding, Tilburg),

Marwane Foujay (Pleincollege St-Joris, Eindhoven),

Gerry van den Heuvel-Verhaegh (Philips van Horne, Weert),

Jacques Jansen (Strabrecht College, Geldrop),

Wil Kok (Trevianum, Sittard),

John Klok (BC Weert, Weert, vanaf augustus 2007: Maurickcollege, Vught),

Wim Laaper (Koning Willem II, Tilburg),
Marcel Laarhoven (Sondervickcollege, Veldhoven),
Ernst Lambeck (Newmancollege, TU/e),
Marianne Lambriex (Stedelijk College Eindhoven),
Hans de Leuw (Augustinianum, Eindhoven),
Theo Saleming (Pius X college, Bladel),
Hans Sterk (TU/e),
Carolijn Tacken (Zwijsencollege, Veghel)

Links

Website Wiskunde van de T(R)U's:

<http://www.wiskundedsteun.nl>

Regionaal steunpunt Wiskunde D Eindhoven:

<http://www.win.tue.nl/wiskunded/>

Website ctwo: <http://www.fi.uu.nl/ctwo>

Dictaat *Wat? Nog meer getallen!*:

http://www.win.tue.nl/wiskunded/files/public/Complexe_getallen/complex.pdf

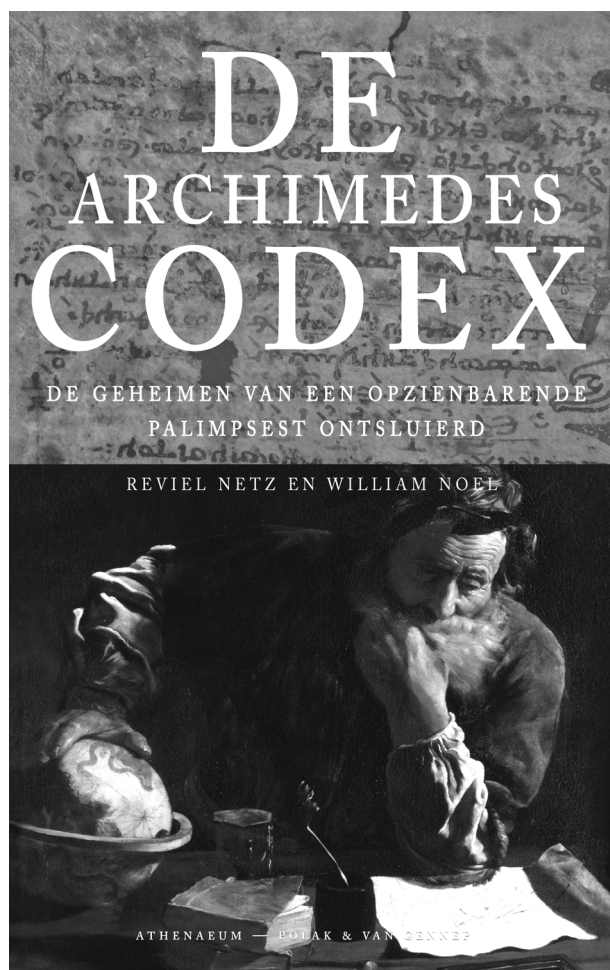
Dé Start: presentatie Schoolpracticum:

<http://www.fi.uu.nl/ctwo/WiskundeD/docs/boldyhandout.pdf>

Dé Start: slotlezing door Roel van Asselt

<http://www.fi.uu.nl/ctwo/WiskundeD/docs/deDestartwiskundeDasselt.ppt?>

Mathematica: <http://www.wolfram.com>



Verschenen:

Uit het persbericht:

De Archimedes Codex bevat het waar gebeurde verhaal van een verloren gewaand werk van Archimedes, de grootste wiskundige die ooit heeft geleefd. Een middeleeuws afschrift van het handschrift uit de oudheid dook in 1998 onverwachts op in een veilinghuis. Wetenschappers zijn onthutst: Archimedes bleek al te weten wat Newton tweeduizend jaar later met veel moeite opnieuw moest uitvinden. In de derde eeuw voor Christus schreef Archimedes zijn belangrijkste ontdekkingen op in een aantal brieven. In de tiende eeuw werden deze overgeschreven in een codex. Een monnik gebruikte die in de dertiende eeuw om er een gebedenboek van te maken, waardoor de tekst van de vier traktaten vrijwel onleesbaar werd. Het manuscript, nu een palimpsest, werd in 1906 ontdekt in een bibliotheek in Constantinopel, waarna het opnieuw decennialang zoek was. Twee wetenschappers, Reviel Netz en William Noel, leggen de wiskundige teksten bloot en analyseren ze. Zij ontdekken dat Archimedes een nog groter genie was dan we al dachten, én dat zijn werk vol zit met intrige, vervalsing, detectivewerk en wetenschappelijke openbaringen. Wiskunde zal nooit meer hetzelfde zijn.

De Archimedes Codex

Reviel Netz en William Noel

Athenaeum - polak & van Gennip

€ 19,95

ISBN 978 90 253 6322 2