De Studiestijgers is een groep van leraren in de exacte vakken te Groningen, zowel uit het voortgezet als uit het wetenschappelijk onderwijs. De subgroep wiskunde heeft zich beziggehouden met complexe getallen. **Pauline Vos** heeft de bijdragen van een aantal Studiestijgers verwerkt in het volgende artikel.

De D van 'Diep' of de D van 'Doom' of gewoon: de D van 'Doen!'

Inleiding

In Groningen hebben we een netwerk van leraren in de exacte vakken, de *Studiestijgers* genaamd. Elke maand komen we bij elkaar en werken we aan nieuwe ontwikkelingen in het onderwijs van onze vakken. Er zijn subgroepen, bijvoorbeeld voor NLT, Nieuwe Natuurkunde, Nieuwe Scheikunde en Wiskunde D.

In de wiskundegroep (twaalf deelnemers) hebben we ons in het schooljaar 2006–2007 beziggehouden met Wiskunde D, in het bijzonder met de complexe getallen. Dit artikel is een verslag van onze bevindingen; het bestaat uit twee onderdelen: enerzijds het onderwijzen van de complexe getallen, en anderzijds de samenwerking tussen scholen en universiteit. Het artikel eindigt met een betoog over het bestaansrecht van wiskunde D.

Complexe getallen en het didactiseren ervan

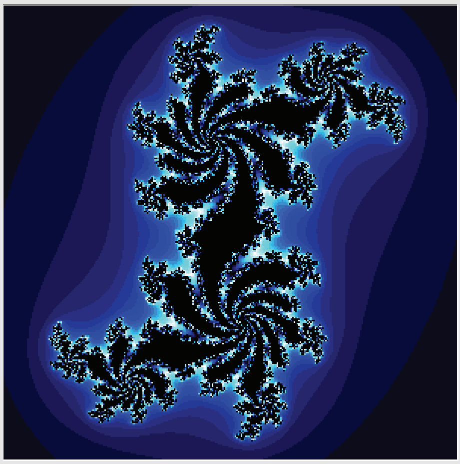
Om het wiskunde D-onderwijs concreet te maken, heeft een groot aantal Studiestijger-docenten les gegeven in de complexe getallen. Afhankelijk van de roostering betrof dit klassen 5V-wiskunde B1, 5V-wiskunde B1,2 en in een enkel geval een 6V-klas. We hebben eerst gestudeerd op vragen als: wat zijn geschikte contexten, wat is het nut van complexe getallen, wat is bruikbare software, hoe didactiseer je bijvoorbeeld de sprong van $a + bi$ naar $re^{i\varphi}$ voor 5V, enzovoorts. Een groot aantal Studiestijger-docenten organiseerde op hun school proeflessen aan de hand van het materiaal van *Getal en Ruimte* of van Jan van de Craats. De meningen over het eerstgenoemde materiaal: het eerste hoofdstuk is goed geschikt voor zelfstudie. Onze collega Mieke schreef over het materiaal van Van de Craats: 'Het eerste hoofdstuk was goed te doen. Het materiaal kent geen afwisseling, dus dat moet je als docent doen. En de auteur moet eens komen kijken in een gemiddelde VWO-klas.'

Wat betreft de contexten, hebben we binnen de docentengroep bijvoorbeeld gezocht naar fractals, en bracht collega Ale fractale muziek uit de jaren zeventig mee. Jan G vond op het internet de site van wiskundedocent Jan Stuivenberg (www.stuif.nl), waarvan we erg gecharmeerd waren. De site is een aanrader voor wie complexe getallen en fractals met elkaar wil verbinden.

Kennismaking met een aantal complexe functies

1.1 Gegeven is de volgende functie: $f(z) = z_1 \cdot z$ waarbij z_1 een vast complex getal is, bijvoorbeeld $z_1 = 1 + \sqrt{3} \cdot i$.
a) Beschrijf hoe een punt in het complexe vlak wordt verplaatst door de functie *f*. Je kunt hierbij denken aan spiegelingen, translaties (verschuivingen), vermenigvuldigingen en rotaties.
b) Wat wordt het bereik van de functie als je als domein het eenheidsvierkant neemt? Dat is in dit geval het vierkant in het complexe vlak met als hoekpunten 1+*i*, 1-*i*, -1+*i* en -1-*i*.

1.2 Gegeven is de functie $g(z) = z^n$. Voor *n* = 2, 3 en 5.
a) Beschrijf hoe een punt in het complexe vlak wordt verplaatst door de functie *f*. Je kunt hierbij denken aan spiegelingen, translaties (verschuivingen), vermenigvuldigingen en rotaties.
b) Wat wordt het bereik van de functie als je als domein het eenheidsvierkant neemt?
c) Los op $g(z) = 1$. Hoe ziet deze oplossing eruit in het complexe vlak? De rest van de opdracht staat op de website.



We hebben gezocht naar een verbinding tussen de complexe getallen en wisselspanningen, zoals gesuggereerd in het boekje van *Getal en Ruimte*. Teresa informeerde bij haar natuurkundecollega en rapporteerde dat de wisselspanningen geen onderdeel zijn van de VWO-natuurkundelessen, maar pas in het hoger onderwijs aan bod komen. Het is dus stof die niet alleen van een ander vak is, maar ook nog van een andere opleiding.

Onze algemene conclusie was bij veel onderwerpen, dat het al snel thema's waren voor een profielwerkstuk en minder geschikt voor werk met een hele klas. Voor wat betreft de software hebben we gekeken naar VU-grafiek en naar de *Bombelli Complex Function Viewer* (http://www.dmat.ufpe.br/~ssc/bombelli/). Ook hebben we gekeken of we met complexe getallen bijvoorbeeld sluisdeuren in het platte vlak konden laten draaien. Cees gaf een inleiding op MathCad, maar we kregen het niet goed voor elkaar om dat naar de leerlingen te vertalen. Uit de ervaringen in de klas bleek dat het in 5V voor de leerlingen al een hele stap is om in te zien dat bij de complexe vermenigvuldiging de argumenten worden opgeteld. De praktische opdracht van Wiebe-Kees bracht complexe functies en iteraties samen tot aan de Juliaverzameling; zie het kader op de vorige pagina.

We hebben ons vooral afgevraagd hoe we elementaire zaken over complexe getallen in de klas konden behandelen. Een eenvoudig voorbeeld: bij een parabool, die in het platte Oxy-vlak de x-as niet snijdt, kun je toch de nulpunten visualiseren. Uit een Amerikaans artikel[1] haalden we hiervoor een algoritme dat een verband geeft tussen de complexe wortels en de parabool. Zie figuur 1.

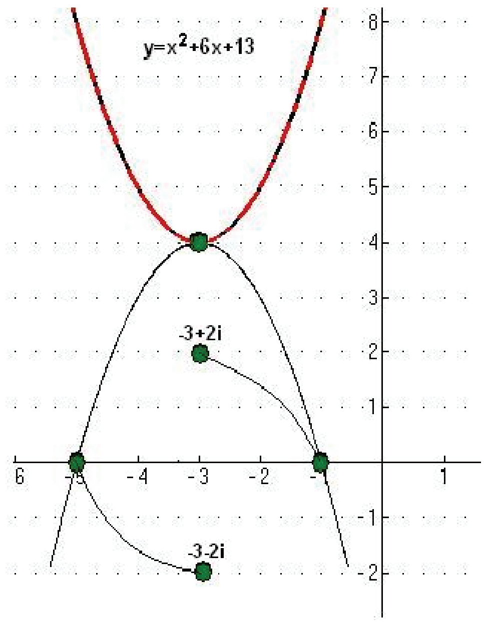
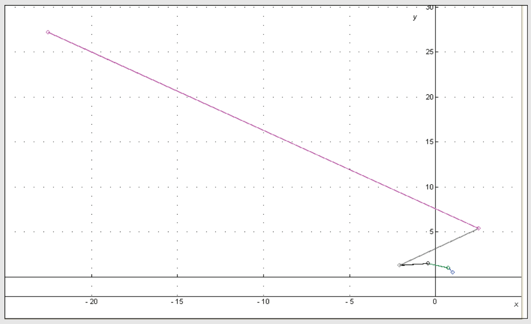


fig. 1 Spiegel de parabool in zijn top en roteer de nulpunten van de nieuwe parabool om hun midden met 90°. De gevonden punten met coördinaten in het complexe vlak zijn de gezochte wortels.

Ook hebben we gezocht naar opdrachten met iteraties. Bert introduceerde het softwareprogramma GeoGebra (gratis te vinden op www.geogebra.org): het koppelt een functie aan een plaatje; hierbij kun je zowel in het algebravenster als in het tekenvenster manipuleren en daardoor de algebra en de bijbehorende meetkunde aan elkaar koppelen. Naar aanleiding hiervan maakte Mieke een werkblad, waarvan een deel in het volgende kader staat:

Itereren met complexe functies

Stel je hebt de functie $f(x) = x^2$ en als domein kiezen we de verzameling complexe getallen. We schrijven dan: $f(z) = z^2$. Dan kun je voor elk getal z uit het domein een beeldgetal uitrekenen.
Bijvoorbeeld, je begint met het getal $z = (1 + ½i)$
dan is $f(1 + ½i) = (1 + ½i)^2 = 1 + i - ¼ = ¾ + i$
Nu kun je opnieuw de functie f toepassen op het net gevonden punt en je krijgt: $I(¾ + i) = (¾ + i)^2 = …$
R*eken dit zelf uit,* en opnieuw f toepassen levert weer een nieuw punt op, enzovoort.
Dit proces van steeds weer volgens een vast functievoorschrift een berekening uitvoeren heet: itereren en de zo gevonden punten leveren een wat grillig patroon in het complexe vlak.



De vraag is nu: is het altijd zo dat de beeldpunten in een iteratieproces steeds verder van de oorsprong af komen te liggen?
De volledige opdracht staat op onze website.

Het algoritme bleek goed aan te sluiten bij het niveau van 5V. Op dat niveau kun je leerlingen vragen om te bewijzen dat het algoritme algemeen geldig is. De ervaring leerde ons dat de complexe getallen maar beperkt geschikt zijn voor behandeling in de eerste helft van het schooljaar van 5V. De leerlingen hebben dan nog geen e-machten gehad en zijn nog onbekend of onwennig met de kettingregel. De complexe e-macht is dan alleen te gebruiken als een soort alternatieve representatie voor de poolcoördinaten, maar dat is niet zeer motiverend. De complexe getallen blijken wel erg geschikt om oefening te geven in basale algebraïsche vaardigheden.

Integratie van wiskunde D met hoger onderwijs

In aansluiting op de gegeven lessen Complexe Getallen hebben we in februari 2007 een groot evenement op de

Rijksuniversiteit Groningen georganiseerd, de Scholierenacademie *Complexe Getallen in de Wetenschap*. Dit was een middag met twee hoorcolleges die aansloten op de lesstof. De leerlingen en hun docenten uit Friesland en Drenthe kwamen met bussen, terwijl de Groningse leerlingen op de fiets kwamen. Met meer dan tweehonderd leerlingen van twaalf scholen hadden we op 9 februari twee stampvolle, grote collegezalen – een unieke gebeurtenis voor de wiskunde!

Gedurende deze middag legde Professor Gert Vegter een link van de complexe getallen, via tweedimensionale transformaties naar de cirkellimieten van Escher. Zijn collega Hans Jordens behandelde de harmonische trillingen en demonstreerde de formules door allerlei veren te laten wapperen. De excursie maakte deel uit van de lessenserie op school, en over de stof van de hoorcolleges werden vragen op het proefwerk gesteld. Voor een impressie van de middag is een filmverslag te vinden op onze website.

Aan de Rijksuniversiteit worden Master Classes georganiseerd voor leerlingen die èchte wiskundeliefhebbers en daarmee potentiële wiskundestudenten zijn. Dat is dus redelijk exclusief. We hebben echter bij wiskunde D een breder scholierenpubliek op het oog, en daarvoor was de Scholierenacademie een experiment. Met een dergelijk evenement krijgt een wiskundedocent de mogelijkheid tot een excursie naar de universiteit, ook als hij of zij voor het zogenaamde 'schoolmodel' kiest. Het schoolmodel sluit ten slotte de samenwerking niet uit.

In de toekomst willen we kijken of een Scholierenacademie ook voor andere domeinen georganiseerd kan worden, zoals Analytische Meetkunde of Dynamische Modellen. Jan P noteerde hierover het volgende:

> 'Wanneer deze vorm voor een aantal onderwerpen wordt herhaald, heeft de leerling een uitstekend beeld van een exacte vervolgopleiding en heeft de leerling een aantal keren kunnen ervaren hoe het is om zich uit te moeten rekken naar een universitair niveau. Een perfect voorbeeld van de brugfunctie van wiskunde D.'

Voor de universiteit was het spannend en spectaculair dat de leerlingen in honderdtallen naar een wiskundige middag kwamen. Het scheelde enorm dat de leerlingen al door hun docenten voorbereid waren, niet alleen wiskundig, maar ook mentaal ('Tijdens een hoorcollege kun je niet de hele tijd om extra uitleg vragen!'). De meeste leerlingen hadden al weken met de complexe getallen gewerkt; de universiteit vroeg om voorkennis tot aan de Stelling van De Moivre. Van de meeste scholen uit de regio kwamen vijf tot acht leerlingen. Aan de school van Ale konden de leerlingen kiezen tussen complexe getallen en een middag skiën. Voor vijf leerlingen werd dat dus complexe getallen! De doelgroep van 6V of 5V met wiskunde B1,2 kon de Scholierenacademie goed aan. De ervaringen met enkele klassen 5V-klassen (wiskunde B1), voor wie de excursie aan alle leerlingen verplicht was gesteld, was wisselend. Het hing vooral af van een goede voorbereiding door de docent; na enkele weken hard werken was het niveau voor deze groep haalbaar. De B1-leerlingen van één school, waar weinig tijd was besteed aan een goede voorbereiding, konden zich echter slecht concentreren tijdens de hoorcolleges en zij profiteerden minder van de middag. Zie ook de sfeerimpressie 'Ze zit naast me'.

Ten slotte nog een onverwacht resultaat: één van de leerlingen van Bert wilde tot nu toe sterrenkunde gaan studeren, maar sinds de Scholierenacademie over de complexe getallen wil hij wiskunde gaan studeren!

Ze zit naast me

Ze zit naast me, Jeanet. Ja, zo heet ze niet, maar het zou kunnen. Sommige meisjes moeten gewoon Jeanet heten, op grond van … nou ja, ik schets mijn bevindingen en u denkt er het uwe van.

Op het schrijfblad, in collegezaal 11.022 van het natuur- en scheikundegebouw van de Rijksuniversiteit Groningen, heeft ze haar tasje dichtgeritst voor zich klaar staan. Vanaf mijn zitplaats – twee lege stoelen scheiden ons – geef ik mij over aan mijn observaties. Het weer buiten vergt deze negende februari 2007 nauwelijks extra kleding. Toch heeft Jeanet zonet haar verzorgde handen – de roodgelakte nagels kan ik niet omheen – opgeborgen in een paar stijlvolle glacéhandschoenen. Terwijl professor doctor Gert Vegter in zijn hoorcollege nog niet eens toe is aan een afrondende samenvatting, zie ik om Jeanet haar hals nu ook een mohair shawl gedrapeerd worden, een shawl die qua kleur afgestemd is op het tasje voor haar, waar ik overigens met de beste wil geen schooltas in herken. Jeanet is er klaar voor, voor de rest van de middag…

Wat brengt Jeanet en mij deze februaridag zo naast elkaar? Wel, Jeanet is leerling aan een school voor VWO. Ze heeft met wiskunde te maken, ik ook, als leraar. De Groninger universiteit wil de VWO-leerling de kans geven haar op te zoeken, te leren kennen. De zogenoemde Scholierenacademie biedt een proef vooraf aan hen die misschien na de middelbare school voor het wetenschappelijk onderwijs kiezen. Op enkele middagen worden er lessen verzorgd door echte professoren in echte collegezalen.

Vandaag is de wiskunde aan de beurt. Er wordt stilgestaan bij de complexe getallen. Of de professor vanmiddag Jeanet voor een eventuele wiskundestudie heeft gewonnen?

Aan Gert Vegter heeft het niet gelegen. Zijn uitleg hoe meetkundige transformaties eenvoudig te beschrijven met complexe getallen, binnen de context van verschillende kunstwerken van de hand van M.C. Escher, nodigt juist vanwege deze context uit hem te volgen. Je kan hoogstens bij wijze van kritiek opmerken dat de publiekspaaiende anekdote aan het begin van het college niet echt afgestemd is op het gehoor deze dag. Naar aanleiding van Eschers *Circle Limits* benaderde Mick Jagger in 1969 Escher schriftelijk voor toestemming een werk van hem te gebruiken voor de hoes van een nieuw te verschijnen L(angspeel).P(laat). Escher waardeerde de toon van het verzoek niet. Een ordinaire popster die een gerenommeerd kunstenaar benadert… zoiets. Escher wilde er niet aan en Jagger verkoos een zeshoekige hoes.

Zou Jeanet wel eens van Mick Jagger hebben gehoord? Ik schat die kans even groot in als de kans dat Gert Vegter van … tsja, waar zou Jeanet naar luisteren?

Aan ons, de leraren die de leerlingen op deze middag hebben voorbereid, heeft het aan ons gelegen? In onze werkgroep, functionerend onder de vlag van de Studiestijgers, hebben we ons beziggehouden met de complexe getallen als mogelijke invulling van de ruimte die het nieuw op te starten vak wiskunde D het middelbare onderwijs biedt. Ik ben na jarenlang lesgeven nog immer van mening dat het uitblijven van succes in de laatste plaats bij de leerling moet worden gezocht. Het is onze taak, de taak dus van leraren, de leerling te motiveren, uit te dagen, intellectueel te kietelen. Iedere vorm van onderwijs moet aangepast zijn aan zekere leeftijdsfasen die de leerling in zijn verstandelijke ontwikkeling doormaakt. Bevindt Jeanet zich in een eerdere fase, en laat zij zich daarom niet intellectueel kietelen? Kunnen wij dan als leraren aan deze situatie niets verhelpen?

De leraar anno 2007 heeft de taak de leerlingen iets te laten winnen door te verliezen. De glacés moeten uitgetrokken. De baantjes bij de verschillende winkels in de buitenschoolse uren – ter financiering van al de door de tijdgeest opgedrongen mooie zaken – moeten opgezegd, opdat we als opvoeders bereiken dat de leerling luistert naar een heuse professor. Grote mannen of vrouwen moeten weer discipelen tot zich trekken, discipelen die als leerlingen tot hem of haar komen om op vrijwillige basis te willen leren. Een Scholierenacademie kan de scholier die eraan toe is, uitdagen.

Aan de andere kant naast me zit Kees. Kees heet echt Kees, want Kees is leerling van mijn eigen school. ‘Hoe vind je het, Kees?’ vraag ik hem fluisterend. ‘Gaat wel, meneer.’ Als ik hem blijf aankijken, vervolgt hij: ‘Het verhaal is goed opgebouwd, ik kan het volgen.’ Kees heeft al eens aangegeven dat hij later natuurkunde gaat studeren, of heel misschien wiskunde, maar zeker iets exacts.

Het blijft een boeiende zaak, ons werk, ons afstemmen op de jeugd, opdat ze datgene oppikken waarvan wij zo verschrikkelijk overtuigd zijn dat het goed voor hen is.

Onze ervaring met de Scholierenacademie ‘Complexe getallen in de Wetenschap’ hebben ons geleerd dat wiskunde D uitgelezen mogelijkheden biedt voor samenwerking tussen scholen en hoger onderwijs. Het was dus niet zo dat de universiteit een syllabus met ‘hogere wiskunde’ over de schutting van de school heengooide en het verder aan de wiskundedocent overliet. Het was ook niet zo dat de school een groepje leerlingen over de schutting van de universiteit gooide om ze na een tijdje met een cijfer weer terug te krijgen. Door de hoorcolleges te laten aansluten bij de gegeven lessen, was er een succesvolle samenwerking.

Wie B zegt, moet ook D zeggen

Als wiskundedocenten zijn we sterk betrokken bij de toekomst van het wiskundeonderwijs. We herinneren ons allemaal de ‘Lieve Maria’-protesten in januari 2006 toen duizenden studenten in de exacte vakken hun mening kenbaar maakten met teksten als ‘Wij leren te weinig’. Op universiteiten en HBO’s was aan het licht gekomen, dat het gros van de tweedefasers met het schoolvak wiskunde B1,2 onvoldoende voorbereid was op technische of anderszins bèta-achtige studies als informatica en natuurkunde. Ondanks de protesten van studenten en van het hoger onderwijs, is de situatie nu na de herverkaveling van de schoolwiskunde voor NT-leerlingen als volgt: als uitgeklede versie van het eerdere wiskunde B1,2 gaat het nieuwe wiskunde B op de HAVO van 440 uren naar 300, op VWO van 760 naar 600.

Alleen als een leerling wiskunde D kiest, gaat hij of zij er niet op achteruit. Alleen met wiskunde D wordt de middelbare scholier beter dan in de oude situatie voorbereid op een exacte vervolgopleiding. Ja, als iedereen die wiskunde B kiest, daarnaast ook wiskunde D kiest. Wat blijkt echter?

De leerlingen willen er niet vrijwillig aan. De aantallen leerlingen die in de derde klas aangeven dat ze in de vierde klas wiskunde D kiezen, vallen tegen. Er zijn scholengemeenschappen met zo’n 150 derdeklassers HAVO van wie er minder dan tien wiskunde D kiezen. Voor de VWO-ers gelden vergelijkbare aantallen. Ongeveer een op de vier scholen biedt het vak wiskunde D niet eens aan. Wat erger is, ja onbegrijpelijk zelfs, is dat vervolgopleidingen met een bèta-karakter wiskunde D niet als toelatingseis stellen. Dat waren toch degenen die zo over het wiskundig niveau van de aankomende studenten klaagden?

Een gekortwiekte wiskunde B en een vrijwillige wiskunde D in de nieuwe tweede fase vanaf 2010-2011 hebben alles weg van een sterfhuisconstructie. Het zou niet verkeerd zijn als wiskunde D na 2010–2011 verplicht wordt voor elke leerling die opteert voor een exacte studie aan een universiteit of HBO.

Materialen geproduceerd door de Studiestijgers, zoals praktische opdrachten, proefwerken, de film van de scholierenmiddag ‘Complexe Getallen in de Wetenschap’, aankondigingen van nieuwe plannen, enzovoort, staan op de website http://www.rug.nl/fwn/informatieVoor/scholieren/betasteunpunt/steunpuntnoord

De Studiestijgers Wiskunde is een groep wiskundedocenten: Johannes Adema (H.N. Werkman College), Jan Gankema (Esdal College), Wiebe-Kees Goodijk (Zernike College), Teresa Hallmann (Piter Jelles Gymnasium), Jan Peters (Winkler Prins SG), Ineke van Pol (Willem Lodewijk Gymnasium), Mieke Thijsseling (Maartens College), Léon Tolboom (Belcampo College), Pauline Vos (Rijksuniversiteit Groningen), Bert Wikkerink (CSG Liudger), Cees van Wijk (Hanzehogeschool), Ale S. van Zandbergen (RSG Magister Alvinus).

Noot

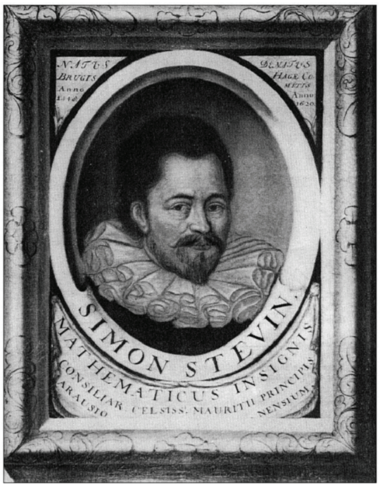
[1] Audrey Weeks (2003). Connecting complex roots to a parabola’s graph. *ON-Maths, 1*(2), http://my.nctm.org/eresources.

Wintersymposium Koninklijk Wiskundig Genootschap

12 januari 2008 – Utrecht

Wiskundehelden uit de Gouden Eeuw
Dit wintersymposium staat in het teken van drie wiskundehelden uit de zeventiende eeuw.

Teun Koetsier, universitair hoofddocent geschiedenis van de wiskunde aan de Vrije Universiteit te Amsterdam, opent het symposium met een voordacht over Simon Stevin.



Jan van Maanen, hoogleraar-directeur van het Freudenthal Instituut voor Didactiek van Wiskunde en Natuurwetenschappen, zal spreken over vader en zoons Van Schooten.

Fokko Jan Dijksterhuis, universitair docent wetenschapsgeschiedenis aan de Universiteit Twente, sluit het symposium af met een lezing over Christiaan Huygens.

Het symposium wordt gehouden in het Academiegebouw van de Universiteit Utrecht. Het programma start om 10.00 uur en eindigt rond 14.45 uur.

U wordt verzocht u van te voren on-line aan te melden via de website van het Koninklijk Wiskundig Genootschap www.wiskgenoot.nl (> ‘wat doet het KWG’; >‘congressen en symposia’). Daar is ook het volledige programma, inclusief samenvattingen van de lezingen, te vinden. Van de deelnemers wordt een bijdrage gevraagd, onder andere voor lunch en consumpties gedurende de dag. Leden van het KWG betalen € 12,50; niet-leden € 17,50.

Nadere inlichtingen: Iris van Gulik
gulikgulikers@home.nl of 038-4536366