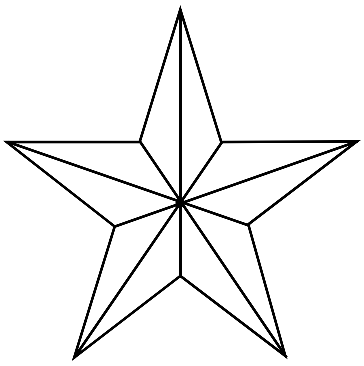
In de donkere dagen voor Kerst geen wiskunde? Niet als het aan **Henk Hietbrink** ligt. Zelfs twijfel of u een zeven- of een negenpuntige kerstster wil maken, hoeft u niet meer van creatieve uitspattingen te weerhouden. In dit artikel leert u hoe u de bijbehorende bouwplaat kunt doorrekenen.

Een kerstster van karton

Inleiding



Voor wie niet van kerstcryptogrammen houdt, is het maken van een echte kerstster een zinvolle bezigheid voor de kerstdagen. Een echte driedimensionale ster met een gezellig lampje binnenin kan toch niet zo moeilijk zijn. Ogenschijnlijk ziet deze ster er heel eenvoudig uit met sterpunten die opgebouwd zijn uit allemaal even grote vliegers. De lengtediagonaal bepaalt de lengte van de punten van de ster. We gaan op zoek naar de andere factoren die de bouwplaat eenduidig vastleggen. Om te beginnen is het aantal sterpunten relevant. Ook belangrijk is de diepte van de ster. Dat is de hoogte van de ster als we die plat op tafel leggen met de top naar boven. Alle sterpunten komen in de top bij elkaar, en ook komen ze paarsgewijs bij elkaar in een cirkel. Vierde factor is dus de straal van die cirkel. Vervolgens kunnen we aantonen dat die vier factoren de bouwplaat eenduidig vastleggen. Iedere lengte op de bouwplaat kan met een formule herleid worden tot deze vier. Sterker nog, we mogen ook vier andere factoren aanwijzen. Bijvoorbeeld:

- n = aantal sterpunten
- h = hoogte (diepte) van de ster
- a = afstand van top tot snijpunt diagonalen
- b = halve afstand van de breedtediagonaal

Met dit viertal ben ik aan de kerstpuzzel begonnen. De berekening van de overige lengtes als die van de lengtediagonaal vraagt redelijk wat wiskunde. Een sinusberekening, een aantal keer Pythagoras en naar keuze een meetkundige constructie of een algebraïsche slag om de afmeting van de lengtediagonaal te bepalen. Conclusie is dat deze opgave niet zomaar in de klas gegooid kan worden. Achtereenvolgens berekenen we:

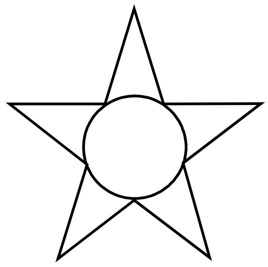
- r: de lengte van de ribbe waar de sterpunten aan elkaar vastzitten
- c: de straal van de cirkel
- d: de lengte van de koorde tussen twee punten op de cirkel
- e: afstand van snijpunt diagonalen tot het midden van de koorde
- f: afstand van centrum tot het midden van de koorde
- g: de lengte van de lengtediagonaal
- z: lengte van de zijde van een punt

Omdat de berekening van de lengtediagonaal een hele opgave bleek te zijn, is ook het alternatief uitgewerkt. Gegeven:

- n: aantal sterpunten
- h: hoogte (diepte) van de ster
- g: de lengte van de lengtediagonaal
- f: afstand van centrum tot het midden van de koorde,

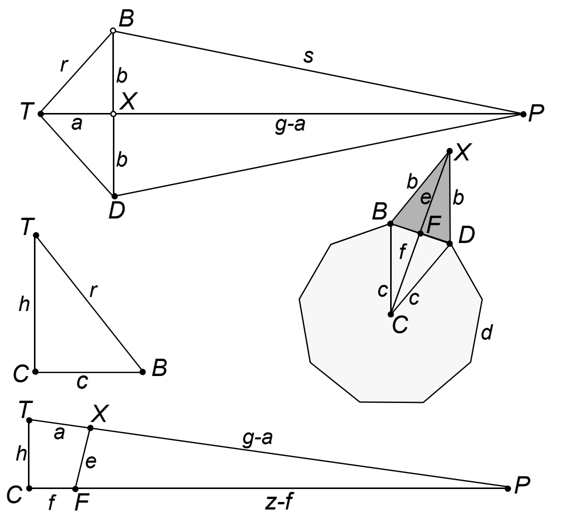
berekenen we, met wat sinus en cosinus en een verhoudingstabel, de formules voor c, d, r en e en vervolgens met de stelling van Pythagoras:

- a: afstand van top tot snijpunt diagonalen
- b: halve afstand van de breedtediagonaal



De meetkundige weg

Laten we beginnen met alle punten eenduidig te benoemen. Als referentievlak nemen we de tafel waarop we de ster maken. Alle lijnstukken worden getekend in doorsnedes of aanzichten. Een applet is gebruikt om de tekeningen op schaal te maken. Ook doen ze het nodige rekenwerk.



Verkenning via de breedtediagonaal

– Vlieger *TBPD* is een punt van de ster, waarbij *T* de hoogte van de ster is en *P*, *B* en *D* op tafel liggen.
– Driehoek *TBC* is een zijaanzicht met *T* als top en *B* en *C* op tafel.
– Driehoek *CBD* is een bovenaanzicht met punt *F* als het midden. Zichtbaar zijn alle negen punten.
– Driehoek *BXD* is een doorsnede over de breedtediagonaal.
– Driehoek *TCP* is een zijaanzicht over de lengtediagonaal. Duidelijk zichtbaar is dat driehoek *BXD* schuin staat in vlak *XF*.

r: de lengte van de ribbe waar de sterpunten aan elkaar vastzitten
Met de stelling van Pythagoras rekenen we de lengte van de ribbe waarmee de sterpunten aan elkaar vastzitten, uit. Dat is de afstand tussen top *T* en punt *B*:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

c: de straal van de cirkel
Met de stelling van Pythagoras rekenen we ook de lengte van de afstand tussen centrum *C* en het punt *B* uit.

$$c = \sqrt{r^2 - h^2}$$

d: de lengte van de koorde tussen twee punten op de cirkel
Gegeven het aantal sterpunten, *n*, is de hoek van één enkele sterpunt gelijk aan:

$$\angle BCD = \frac{2\pi}{n}$$

De halve afstand van de koorde is dan de sinus van de halve hoek maal de straal van de cirkel. De hele koorde is daarom twee keer de straal keer de sinus van de halve hoek. Deze lengte ligt plat in het vlak van de tafel:

$$d = 2 \times c \times \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

e: afstand van snijpunt diagonalen tot het midden van de koorde
Met de stelling van Pythagoras rekenen we de schuine hoogte van het snijpunt van de diagonalen naar halverwege de koorde uit.

$$e = \sqrt{b^2 - \left(\frac{1}{2}d\right)^2}$$

f: afstand van centrum tot het midden van de koorde
Met de stelling van Pythagoras rekenen we de afstand van centrum naar halverwege de koorde uit. Deze afstand ligt plat in het vlak van de tafel.

$$f = \sqrt{c^2 - \left(\frac{1}{2}d\right)^2}$$

g: de lengte van de lengtediagonaal
Meetkundig is de lengte van *g* te bepalen door een paar cirkels te tekenen. Uitgangspunt is dat driehoek *TCP* gelijkvormig is met driehoek *FXP*:
– Begin met een rechthoekige driehoek met hoogte *h*
– Vanuit *C* een cirkel met straal *f* geeft punt *F*
– Vanuit *F* een cirkel met straal *e*
– Vanuit *T* een cirkel met straal *a*
– Snijpunt van de cirkels om *F* en *T* geeft punt *X*
– Waar de rechte van *T* door *X* de rechthoekige driehoek snijdt, is punt *P*

Zo vinden we meetkundig de lengte van de vlieger.

De moeilijke weg

g: de lengte van de lengtediagonaal
Algebraïsch vraagt het bepalen van de lengtediagonaal veel meer werk. Uitgangspunt is dat driehoek *TCP* gelijkvormig is met driehoek *FXP*. Met hulp van een verhoudingstabel en de stelling van Pythagoras lossen we een kwadratische vergelijking op om de waarde van *g* te berekenen. In onderstaande verhoudingstabel staan de overeenkomstige zijden van de gelijkvormige driehoeken *PCT* en *PXF*.

$TC = h$	$CP = z$	$TP = g$
$FX = e$	$XP = g - a$	$FP = z - f$

De uitwerking vraagt de nodige algebraïsche vaardigheid:

$$g = \sqrt{z^2 + h^2} \quad \text{c.q.} \quad z = \sqrt{g^2 - h^2}$$

Met de welbekende abc-formule komt daaruit dat *g* iets met wortels en machten van *a*, *h* en *e* is. Conclusie is dat de waarde van *g* zich niet zo gemakkelijk laat vinden.

$$\frac{h^2}{e^2} = \frac{z^2}{(g-a)^2} = \frac{g^2 - h^2}{(g-a)^2}$$

$$\frac{h^2}{e^2}\left(g + -a\right)^2 = g^2 - h^2$$

$$\frac{h^2}{e^2}g^2 - 2\frac{h^2}{e^2}ag + \frac{h^2}{e^2}a^2 = g^2 - h^2$$

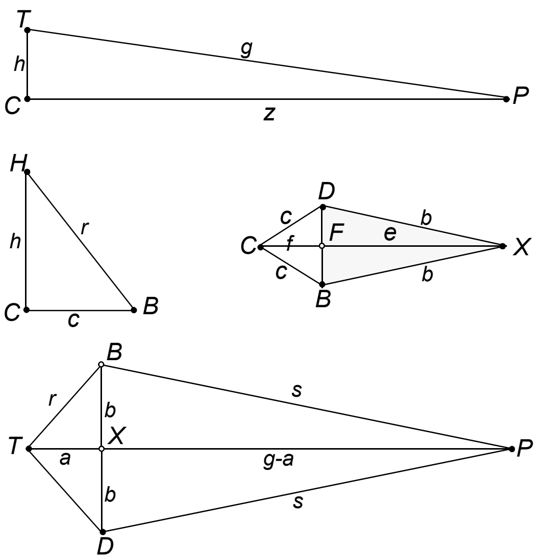
$$\left(\frac{h^2}{e^2} - 1\right)g^2 - \left(2a\frac{h^2}{e^2}\right)g + \left(\frac{h^2}{e^2}a^2 + h^2\right) = 0$$

Vanuit de gegeven invalshoek n, h, a en b is de opgave voor leerlingen te complex. De aanzichten zijn te doen en de stappen met Pythagoras en sinus ook, maar de laatste stap is ontmoedigend. Zonder hulp van de docent komen ze er niet uit, en dat bederft het plezier om een kerstster te maken.

Voor wie toch door wil gaan op deze weg, raden we aan om de computer te gebruiken om uit te proberen wat een geslaagde combinatie van n, h, a, b en g is, rekening houdend met de afmetingen van een groot vel karton. Handig van Excel is dat de formule van g stapsgewijs opgebouwd kan worden. Met een meetkunde-applet kan het ook.

Alternatief

Omdat de eerste weg, via de breedtediagonaal, te ingewikkeld geworden is, verkennen we de andere weg via de lengtediagonaal. Dit alternatief redeneert vanuit driehoek TCP. We starten dan met lengtediagonaal g, hoogte h, aantal sterpunten n en de cirkel met de eindpunten van de ribben. In de tekening zijn de aanzichten en doorsnedes getekend met dezelfde maten als in de vorige tekening.



Verkenning via de lengtediagonaal

z: de lengte van de zijde van een punt
Gegeven hoogte h en lengte g berekenen we z met de stelling van Pythagoras:

$$z = \sqrt{g^2 - h^2}$$

c: de straal van de cirkel
d: de lengte van de koorde tussen twee punten op de cirkel
Gegeven f berekenen we c en d met hulp van sinus en cosinus:

$$c = \frac{f}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)} \text{ en } d = 2 \times c \times \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

r: de lengte van de ribbe waar de sterpunten aan elkaar vastzitten
Hieruit volgt de lengte van ribbe r met de stelling van Pythagoras:

$$r = \sqrt{c^2 + h^2}$$

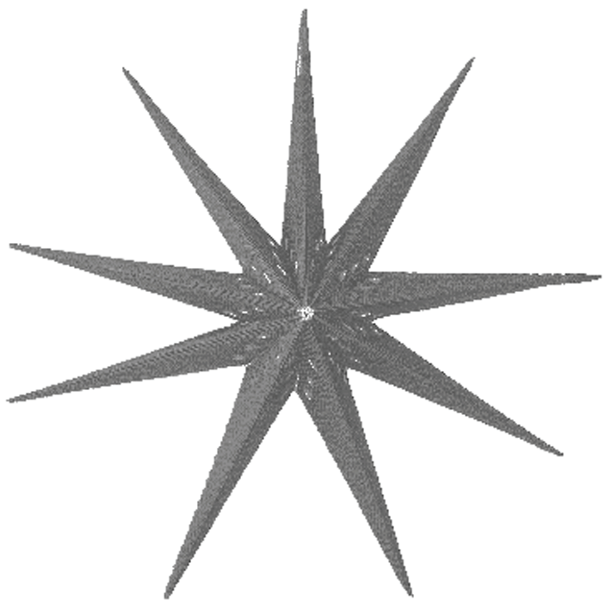
e: afstand van snijpunt diagonalen tot het midden van de koorde
Uit de verhoudingstabel volgt op grond van gelijkvormigheid uit:

$$\frac{h}{e} = \frac{g}{z - f} \text{ dat } e = h\frac{z - f}{g}$$

a: afstand van top tot snijpunt diagonalen
b: halve afstand van de breedtediagonaal
Tot slot berekenen we a en b met de stelling van Pythagoras:

$$b = \sqrt{e^2 + \left(\frac{1}{2}d\right)^2} \text{ en } a = \sqrt{r^2 - b^2}$$

Het was even rekenen, maar nu hebben we de vlieger eenduidig bepaald met sinus, cosinus, verhoudingstabel en veel Pythagoras, maar zonder ingewikkelde kwadratische vergelijking.



Het is verbazingwekkend dat er zoveel wiskunde verstopt zit in iets simpels als een kerstster met een lampje voor het raam. Twee aanpakken zijn getoond. De eerste is vanuit de breedtediagonaal geredeneerd en leidt tot een voor veel leerlingen onoplosbaar probleem vanwege de noodzakelijke algebraïsche vaardigheden. De tweede redeneert vanuit de lengtediagonaal en kan vanaf de derde klas behandeld worden als afsluitend kerstproject.

We hopen dat deze bijdrage aanleiding is tot creatieve werkstukken, en bovenal dat leerlingen inzien dat formules maken met sinus en cosinus praktisch nut heeft.
Tot slot de tips voor het plakken en knippen. Uit een groot vel ribbelkarton van 70 bij 50 cm hebben we negen punten geknipt. Met een pons hebben we er figuurtjes uitgeponst. De gaten zijn afgeplakt met doorzichtig gekleurd papier. Voor de stevigheid zijn de sterpunten aan de achterzijde beplakt met papier opdat ze met drie zijden goed in vorm blijven. Ook is het verstandig om stroken papier of plakband te bevestigen achter de cirkel om te voorkomen dat de ster gaat uithangen onder zijn eigen gewicht. Bijzonder is dat de kerstster zich laat opvouwen, zodat deze na afloop van de feestdagen weinig ruimte in beslag neemt.

Henk Hietbrink,
Freudenthal Instituut

Foto: Liesbeth van Geenhoven