Dick Klingens is lid van de werkgroep analytische meetkunde VWO. In dit artikel laat hij zien dat een aantal onmogelijke constructies met passer en blanco liniaal ineens wel kunnen als je twee streepjes op de liniaal zet. Dick benadrukt, net als in het eerste deel van de D-special, dat onderstaand artikel op persoonlijke titel geschreven is en als inspiratiebron voor materiaal voor wiskunde D kan dienen.

De gemerkte liniaal en enkele klassieke constructieproblemen

Inleiding

Meetkundige constructies worden, naar Oudgriekse (zeg maar Euclidische) traditie, uitgevoerd met passer en 'latje', een blanco liniaal zonder merktekens of onderverdeling. Bewezen kan worden dat dan bepaalde constructies *niet* kunnen worden uitgevoerd (ze behoren tot de 'klassieke' problemen), zoals:

– de trisectie van een gegeven (scherpe) hoek;
– de constructie van een lijnstuk met lengte $\sqrt[3]{a}$, als een lijnstuk met lengte a gegeven is;
– de verdubbeling van de kubus;
– de constructie van een regelmatige zevenhoek.

In hetgeen volgt, zullen we laten zien dat deze vier constructies wél mogelijk zijn als we gebruik kunnen maken van een zogenoemde *gemerkte liniaal*; dat is een liniaal waarop voorafgaand aan de constructie op twee willekeurige plaatsen een merkteken kan worden aangebracht.[1]

Basisconstructie
Gegeven zijn een punt O en een afstand d (een lijnstuk met lengte d); voorts zijn ook twee rechte lijnen l en m gegeven. We gaan er in hetgeen volgt vanuit dat we in staat zijn een punt X op de lijn l en een punt Y op de lijn m te tekenen, en wel zo, dat de lijn XY door O gaat, waarbij $XY = d$: we leggen de liniaal waarop we twee merktekens hebben aangebracht (op een afstand d) zo door O, dat het ene merkteken in X op de lijn l en het andere merkteken in Y op de lijn m valt. We zeggen nu dat de lijn $O[XY]$ geconstrueerd is met behulp van een gemerkte liniaal; zie figuur 1.

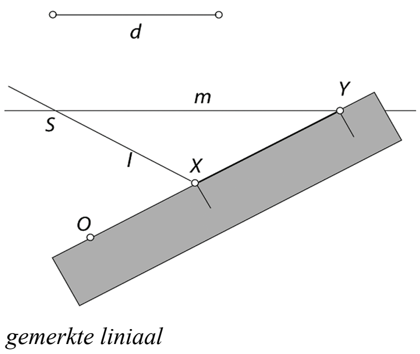

fig. 1 De gemerkte liniaal

Merk op: in het bovenstaande geval zijn er twee lijnen door O mogelijk die aan de gestelde eigenschappen voldoen. We zullen vaak een 'gerichte' volgorde van de punten O, X en Y aanhouden.

Trisectie van een scherpe hoek
Zij AOB een gegeven scherpe hoek; zie figuur 2.

– De lijn l is de loodlijn uit B op OA.
– De lijn m is de lijn door B evenwijdig met OA.
– Het punt B' ligt zo op het verlengde van OB dat $BB' = OB$ en we stellen $OB' = d$.
– We construeren nu met een gemerkte liniaal de lijn $O[XY]$ met X op l en Y op m waarbij $XY = d$.

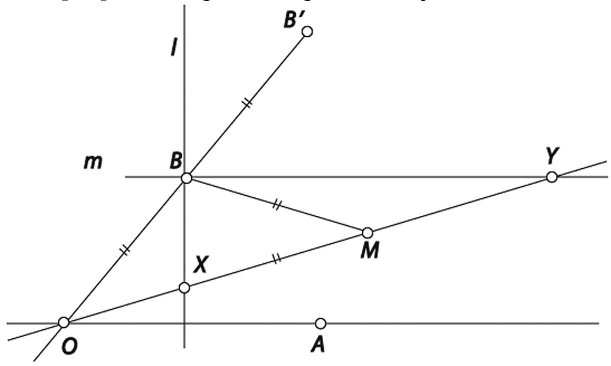

fig. 2 Trisectie van een scherpe hoek

Nu is $\angle AOX = \frac{1}{3}\angle AOB$.
Bewijs. Zij M het midden van het lijnstuk XY. Dan is $XM = MY = BM$, immers BM is de zwaartelijn naar de schuine zijde van de rechthoekige driehoek BXY (cirkelstelling van Thales). Is nu $AOX = a$, dan is ook $MYB = MBY = a$. In driehoek OMB is dan $OMB = 2a$ (stelling van de buitenhoek bij driehoek BMY). En dus is in driehoek BOM ook $MOB = 2a$.
Zodat inderdaad $\angle AOX = \frac{1}{3}\angle AOB$.
Waarmee is aangetoond dat de trisectie van een scherpe hoek mogelijk is door gebruik te maken van een gemerkte liniaal. Opmerkingen:

1. Bovenstaande methode voor de trisectie van de hoek wordt meestal toegeschreven aan Apollonius van Perga (265-190 v. Chr.), maar mogelijk was Hippocrates

van Chios (470-410 v.Chr.) de eerste die deze constructie gevonden heeft.

2. We laten het aan de lezer over om na te gaan hoe de trisectie van een *stompe* hoek met passer en gemerkte liniaal kan worden uitgevoerd.

Conchoïde

We gaan uit van een vast punt O en een vaste lijn l. Het punt X is een variabel punt van l (zie figuur 3, links). We kiezen nu op de (veranderlijke) lijn OX de punten Y_1 en Y_2 waarvoor geldt: $XY_1 = XY_2 = d$ met d is constant.
De meetkundige plaats van de punten Y_i (i = 1, 2) is dan een zogenoemde *conchoïde*. Het punt O heet wel de pool van de conchoïde, de lijn l heet de richtlijn (of, zo men wil, asymptoot). Merk op dat de conchoïde uit twee takken bestaat.

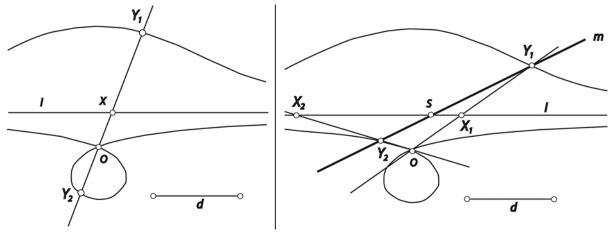

fig. 3 Conchoïde

Uit figuur 3 (rechts) blijkt dat deze conchoïde een rol speelt bij de gemerkte liniaal. Immers, voor het punt X_1 (c.q. X_2) op l en het punt Y_1 (c.q. Y_2), dat een snijpunt is van de conchoïde met de rechte lijn m, geldt:

- de lijn $O[X_1Y_1]$ (c.q. $O[X_2Y_2]$) gaat door O, en
- $X_1Y_1 = d$ (c.q. $X_2Y_2 = d$).

We kunnen dus ook de conchoïde gebruiken om een hoek in drie gelijke delen te verdelen (zie figuur 4). Het was Nicomedes (280-210 v. Chr.) die deze constructie voor het eerst toepaste bij de trisectie van een hoek. De kromme wordt daarom de *conchoïde van Nicomedes* genoemd.

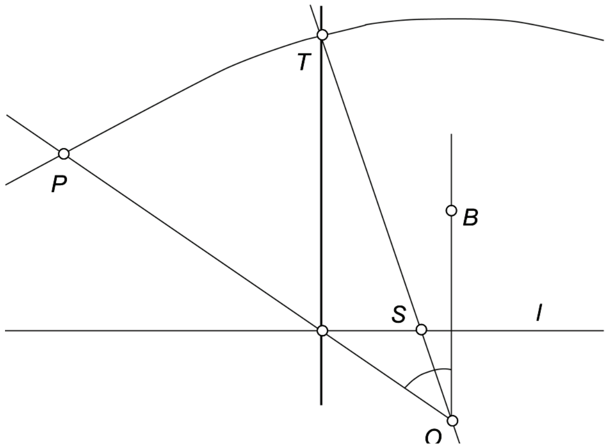

fig. 4 Conchoïde van Nicomedes

Zij AOB de gegeven hoek. We 'tekenen' nu (bij de oude Grieken ging dat zeker 'puntsgewijs') de conchoïde met $d = 2OA$ en met als richtlijn de loodlijn l uit A op de lijn OB.

De loodlijn in A op l snijdt de kromme in het punt T. De lijn OT snijdt l in het punt S (met $ST = AP = 2OA$).
Dan is: $\angle AOX = \frac{1}{3}\angle AOB$.
Bewijs: zie daartoe de vorige bladzijde.

Constructie van een regelmatige vijfhoek

Een regelmatige vijfhoek kan, zoals bekend, wél geconstrueerd worden met passer en (ongemerkte) liniaal. Indien we echter een gemerkte liniaal mogen gebruiken, dan levert dat een heel wat eenvoudiger constructie op; zie figuur 5.

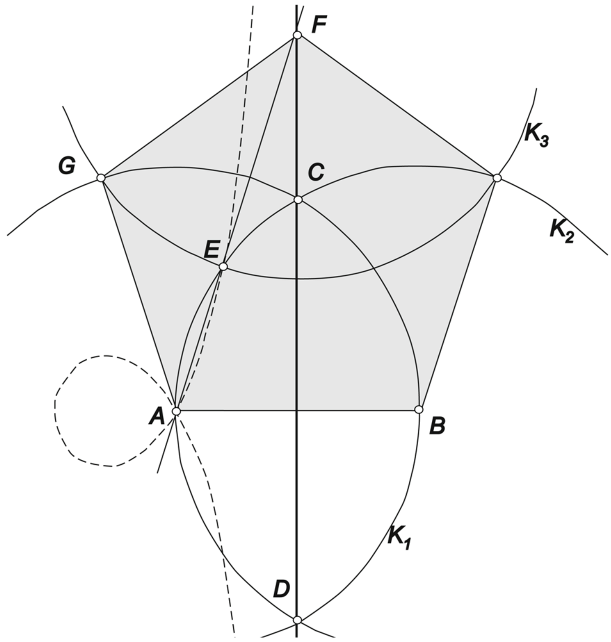

fig. 5 Constructie regelmatige vijfhoek

In de figuur hebben we opvolgend:

- K_1 = cirkel(A, AB) en K_2 = cirkel(B, BA) die elkaar snijden in de punten C en D;
- (een deel van) de conchoïde met pool A en richtlijn CD, waarbij $d = AB$, waarmee we op een lijn door A de punten E op K_2 en F op CD zo bepalen, dat $EF = AB$;
- K_3 = cirkel(F, FE) die K_1 en K_2 snijdt in opvolgend de punten G en H.

De veelhoek $ABHFG$ is dan een regelmatige vijfhoek.
Bewijs: een en ander volgt onmiddellijk uit de constructie. Immers, $AB = AG = BH$ en $FG = FH = FE$ waarbij ook $EF = AB$. Merk ook op dat $\angle AFC = \frac{1}{3} \cdot \angle GFC$
Bij deze constructie maken we een iets ander gebruik van de gemerkte liniaal dan we hierboven hebben beschreven. In plaats van twee rechte lijnen (de lijnen l en m in figuur 1) hebben we nu een rechte lijn (CD) en een cirkel (K_2) waartussen we de gegeven afstand $d = EF$ moeten 'passen'.

Lijnstuk met lengte $\sqrt[3]{a}$

We gaan uit van twee lijnstukken: een lijnstuk met lengte 1 en een lijnstuk met lengte a. We kunnen dan een lijnstuk met lengte $\sqrt[3]{a}$ met behulp van een gemerkte liniaal construeren (zie figuur 6a).

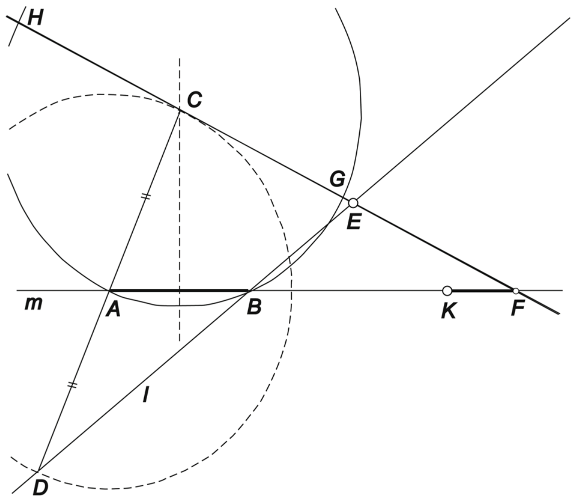

fig 6a Lijnstuk met lengte $\sqrt[3]{a}$

In figuur 6a zien, dan wel doen, we het volgende:

– AB is het gegeven lijnstuk met lengte a.
– We kiezen het gehele getal k zo, dat $b = 2^{3k-1} > a$. Met die waarde van b construeren we een gelijkbenige driehoek CAB waarvan $CA = CB = b$.
– Op het verlengde van CA ligt het punt D zo, dat $AD = b$.
– Met een gemerkte liniaal construeren we de lijn $C[EF]$ met E op BD en F op AB, waarbij $EF = b$.

Dan is $FB = 2^{2k}\cdot \sqrt[3]{a}$. We kunnen het lijnstuk FK met lengte $\sqrt[3]{a}$ nu construeren door $2k$ maal halveren van het lijnstuk FB.

Eerste bewijs: volgens de stelling van Menelaos in driehoek AFC met transversaal DBE geldt:

$$\frac{DA}{DC}\cdot\frac{BF}{BA}\cdot\frac{EC}{EF} = 1 \qquad (1)$$

Stellen we $BF = y$ en $CE = x$ dan gaat (1) over in:

$$\frac{b}{2b}\cdot\frac{y}{a}\cdot\frac{x}{b} = 1$$

waaruit volgt dat:

$$x = CE = \frac{2ab}{y} \qquad (2)$$

Voor de macht m van het punt F bij de cirkel (C, CA) hebben we: $m = FG\cdot FH = FB\cdot FA$ (3)

Nu is $EG = EC - GC = x - b$, zodat (3) kan worden herschreven als: $(b + x - b)(x + 2b) = y(y + a)$ of

$x(x + 2b) = y(y + a)$ (4)

Met (2) gaat (4) over in:

$$\frac{2ab}{y}\left(\frac{2ab}{y} + 2b\right) = y(y+a) \Rightarrow$$

$$4ab^2(a+y) = y^3(y+a)$$

zodat $y^3 = 4ab^2$ (5)

Met $b = 2^{3k-1}$ vinden we dan uit (5) $y^3 = 4a\cdot 2^{6k-2} = 2^{6k}\cdot a$.

En dus is $y = BF = 2^{2k}\cdot \sqrt[3]{a}$.

Tweede bewijs, zie figuur 6b: De lijn CG met G op het verlengde van DB is evenwijdig met de lijn AB. De driehoeken ABD en CGD zijn nu gelijkvormig (hh), zodat $CG = 2\cdot AB = 2a$. Ook zijn de driehoeken CGE en FBE gelijkvormig (hh). Daaruit volgt dan:

$BF : GC = EF : EC$ ofwel: $y : 2a = b : EC$

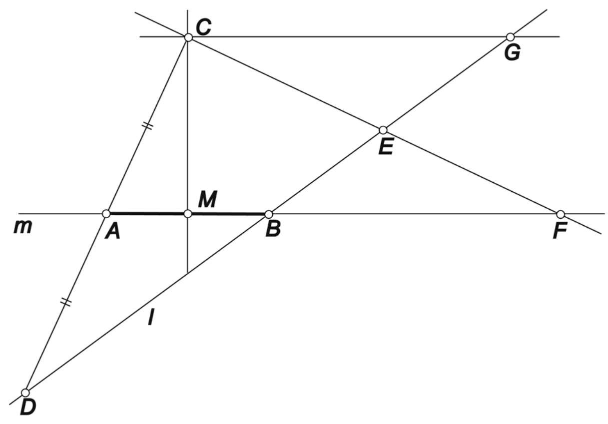

fig 6b Nogmaals: lijnstuk met lengte $\sqrt[3]{a}$

Zodat $CE = \dfrac{2ab}{y}$; zie ook (2) in het eerste bewijs.

Nu is, met M als midden van het lijnstuk AB, onder toepassing van twee keer de stelling van Pythagoras:

$CF^2 = CM^2 + FM^2 = (CA^2 - AM^2) + FM^2$

$$\left(b + \frac{2ab}{y}\right)^2 = b^2 - \left(\tfrac{1}{2}a\right)^2 + \left(y + \tfrac{1}{2}a\right)^2 \Rightarrow$$

$$\frac{4ab^2}{y} + \frac{4a^2b^2}{y^2} = y^2 + ay \Rightarrow$$

$$\frac{4ab^2}{y}(y+a) = y(y+a)$$

zodat $y^3 = 4ab^2$. Zie verder (5) in het eerste bewijs.

Verdubbeling van de kubus

Het vinden van de ribbe (x) van een kubus V bij een gegeven kubus K (met ribbe a) zodat de inhoud van V twee keer de inhoud is van K, staat bekend als de ‘verdubbeling van de kubus’. We moeten dus bij een gegeven lijnstuk a een lijnstuk x construeren met $x^3 = 2a^3$ of $x = \sqrt[3]{2}\cdot a$.

Is een lijnstuk met lengte 1 gegeven, dan kan het lijnstuk met lengte $\sqrt[3]{2}$ worden gevonden met de voorgaande constructie. Zie figuur 7a, waarin x geconstrueerd is uitgaande van 1: $\sqrt[3]{2} = a : x$.

Er is evenwel een eenvoudiger constructie, ook met behulp van een gemerkte liniaal, mogelijk. Zie daarvoor figuur 7b. In die figuur is:

– $AB = a$ is een gegeven lijnstuk, de ribbe van K;
– l is de loodlijn in B op AB;
– m is de lijn door B die een hoek van 120° maakt met BA;
– de lijn $A[CD]$ wordt geconstrueerd met een gemerkte liniaal via de lijnen l en m, waarbij $CD = a$.

Dan is in figuur 7b: $AC = \sqrt[3]{2}\cdot AB$. In beide figuren zijn ook een zijvlak van K en een zijvlak van V getekend.

Bewijs: met $AC = x$ en $BD' = y$ (D' is de projectie van D op de lijn AB) hebben we $DD' = y\sqrt{3}$. Dan zien we direct dat $x : a = a : y \Rightarrow\ y = \dfrac{a^2}{x}$. (6)

Volgens de stelling van Pythagoras in driehoek $AD'D$ is dan:

$(x + a)^2 = (a + y)^2 + 3y^2 \Rightarrow x^2 + 2ax = 2ay + 4y^2$

Eliminatie van y uit deze laatste relatie, via (6), geeft:

$$\begin{aligned} x^2 + 2ax &= \frac{2a^3}{x} + \frac{4a^4}{x^2} \Rightarrow \\ x^4 + 2ax^3 &= 2a^3x + 4a^4 \Rightarrow \\ x^3(x + 2a) &= 2a^3(x + 2a) \end{aligned}$$

zodat $x^3 = 2a^3$.

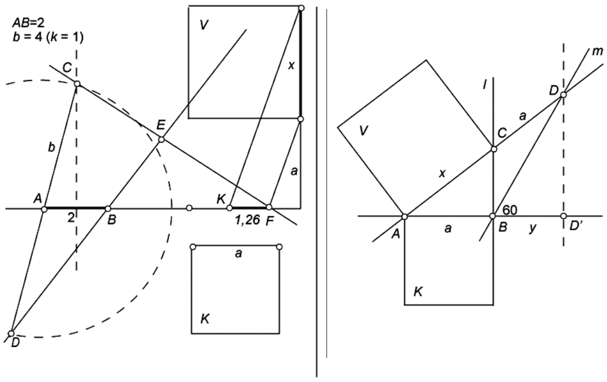

fig 7a en 7b Constructie lijnstuk met lengte $\sqrt[3]{2}$

Tussenspel: kubusverdubbeling via kromme lijnen

Bij dit tussenspel leggen we de gemerkte liniaal even weg; er komen evenwel kromme lijnen (anders dan cirkels) voor in de plaats. We gaan eerst eens uit van een lijnstuk met lengte a en een lijnstuk met lengte b. We zoeken nu lijnstukken met lengtes x en y zodat

$a : x = x : y = y : b$

We noemen deze relatie ook wel een 'gedurige' evenredigheid; x en y heten de 'middelste evenredigen' van a en b. Hieruit volgt dan: $x^2=ay$ en $xy=ab$ zodat $x^3=axy=a^2b$. Voor $b = 2a$ hebben we dan $x^3 = 2a^3$.

We herkennen hierin direct de vergelijkingen van een parabool en een hyperbool. Voor $a = 1$ (en $b = 2$) vinden we dan de x-coördinaat van het snijpunt van de kegelsneden $y = x^2$ en $xy = 2$: $x = \sqrt[3]{2}$ (zie figuur 8a). Is nu $OA = a$, dan is $OB=\sqrt[3]{2} \cdot a$. Een moderne oplossing? Zeker niet! Ook Menaichmos (380-320 v. Chr., Turkije) heeft deze oplossing van de kubusverdubbeling gevonden, en hij ontdekte hiermee de kegelsneden! We kijken in dit verband verder naar figuur 8b.

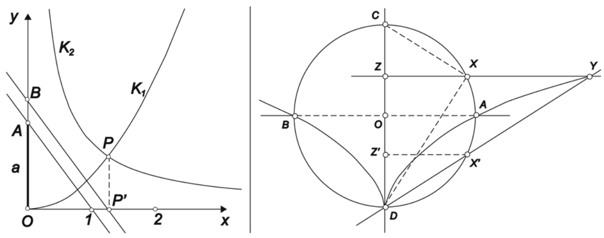

fig 8a en 8b Kubusverdubbeling via kromme lijnen

Hierin:

– AB en CD zijn twee loodrechte middellijnen van een cirkel met middelpunt O;
– X is een willekeurig punt op die cirkel; X' is het spiegelbeeld van X in de lijn AB en Z is het voetpunt van de loodlijn uit X op CD;
– Y is het snijpunt van de lijnen XZ en $X'D$.

De meetkundige plaats van het punt Y, als X de cirkel doorloopt, is dan een kromme lijn ($BDAY$), een zogenoemde *cissoïde* (Grieks: κισσος (kissos) = klimop(blad), de vorm van de boog $AXCBD$).

In de figuur is verder Z' de projectie van X' op de lijn CD.

Nu is, vanwege de symmetrie in de lijn AB:

$XZ = X'Z'$, $CZ = DZ'$ (7)

In rechthoekige driehoek XCD is $XZ^2 = CZ \cdot DZ$ of:

$CZ : XZ = XZ : DZ$ (8a)

Verder zijn de driehoeken $DZ'X'$ en DZY gelijkvormig (hh), waaruit volgt dat:

$DZ' : Z'X' = DZ : ZY$

of vanwege (7): $CZ : XZ = DZ : ZY$ (8b)

En dan geven (8a) en (8b) de gedurige evenredigheid:

$CZ : XZ = XZ : DZ = DZ : ZY$ (8c)

waaruit blijkt dat de lijnstukken XZ en DZ de middelste evenredigen zijn bij de lijnstukken CZ en ZY.

En daarmee kunnen we de cissoïde gebruiken om het probleem van de 'verdubbeling van de kubus' op te lossen (zonder gemerkte liniaal dus).

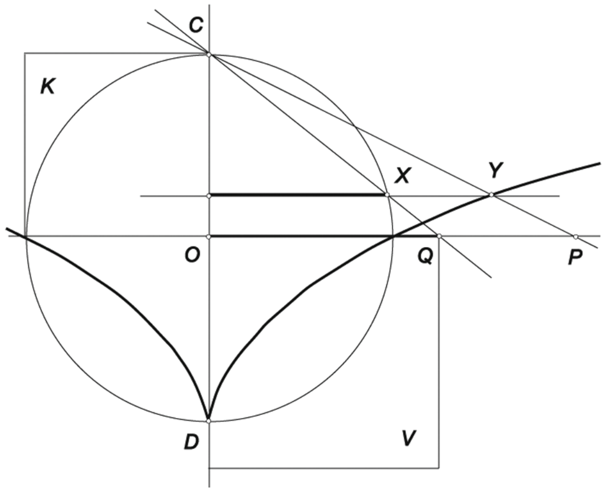

fig 9 Kubusverdubbeling met behulp van de cissoïde

In figuur 9 zien we:

– $CO = a$ en $OP = b = 2a$;
– Y is het snijpunt van de cissoïde, bepaald door de cirkel(O, OC), met de lijn CP;
– X en Z zijn opvolgend de snijpunten van de loodlijn door Y op CD met de cirkel en met de lijn CD;
– Q is het snijpunt van OP met de lijn CX.

Nu is $OQ=\sqrt[3]{2} \cdot a$.

Bewijs: op basis van de hierboven gevonden eigenschap is ZX één van de middelste evenredigen tussen CZ en ZY, waarbij in dit geval:

- $ZX^3 = 2 \cdot CZ^3$, volgens (8c), en
- $CZ : ZY = CO : OP = 1 : 2$

Echter, we zoeken een middelste evenredige tussen CO en OP. We dienen dan ZX met de factor CQ/CZ te ver-

groten: $OQ = CO/CZ \cdot ZX$.
En dan is:
$OQ^3 = CO^3/CZ^3 \cdot ZX^3 = CO^3/ CZ^3 \cdot 2CZ^3 = 2CO^3 = 2a^3$
Diocles (240–180 v. Chr., Griekenland), een tijdgenoot van Apollonius, heeft het probleem van de kubusverdubbeling opgelost met een door hem gevonden kromme, die pas later[2] cissoïde werd genoemd (vandaar de naam: *cissoïde van Diocles*)[3].

Constructie van een regelmatige zevenhoek

We construeren nu met een éénmalig gebruik van een gemerkte liniaal een regelmatige zevenhoek waarvan de omcirkel gegeven is; zie figuur 10. In die figuur zien we het volgende:

– De cirkels (O, OA), de omcirkel van de gezochte zevenhoek, en (A, AO) snijden elkaar in de punten C en D.
– Het punt T ligt zo op OA, dat $OT = \frac{1}{3} \cdot OA$.
– Het punt B is het andere eindpunt van de middellijn OA van cirkel(O, OA).
– Op de cirkel (T, TC) bepalen we nu, met behulp van een gemerkte liniaal, het punt G en op de lijn AB het punt H, waarbij $GH = TC$.
– De punten I, K worden gevonden met de cirkel (H, OA), de punten L, M met de cirkel (B, IK) en de punten N, P met de cirkel (B, IM).

Veelhoek $BILNPMK$ is dan een regelmatige zevenhoek.

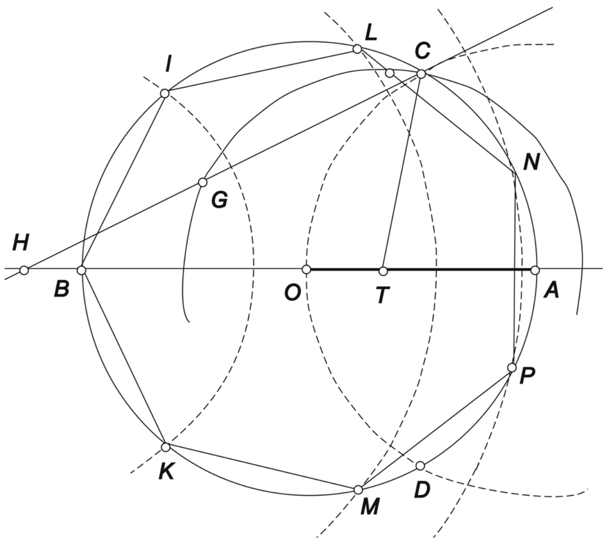

fig 10 De regelmatige zevenhoek

We leveren het bewijs van de juistheid van deze constructie door naar twee bijzondere configuraties te kijken. Beide configuraties komen voor in François Viètes (1540–1603) *Opera Mathematica*, in 1646 uitgegeven door Frans van Schooten Jr.[4] Allereerst Viètes propositie XVI (*Opera*, pg. 248):

> *Eigenschap 1:* Als twee driehoeken gegeven zijn de een met gelijke zijden en de ander met dezelfde gelijke zijden, en de hoek aan de basis van de tweede is driemaal de hoek aan de basis van de eerste, dan is de derde macht van de basis van de eerste verminderd met het drievoud van het product van de eerste en het kwadraat van de gemeenschappelijke zijde gelijk aan het product van de basis van de tweede en het kwadraat van de gemeenschappelijke zijde.

In figuur 11 (uit *Opera Mathematica,* pg. 249) zien we:
– de beide gelijkbenige driehoeken ABC en CDE, waarbij dus $AB = BC = CD = DE$;
– de lijnstukken BI en DK, die hoogtelijnen zijn van die driehoeken.

Aan de in Eigenschap 1 genoemde hoekeneis is in deze tekening voldaan, immers:
stel $BAC = BCA = a$, dan is $CBD = CDB = 2a$ (stelling van de buitenhoek), en $DCE = 180° - DCA$, zodat
$DCE = 180° - (180° - 4a) - a = 3a$.

Eigenschap 1 luidt nu in formulevorm
$AC^3 - 3 \cdot AC \cdot AB^2 = CE \cdot AB^2$.

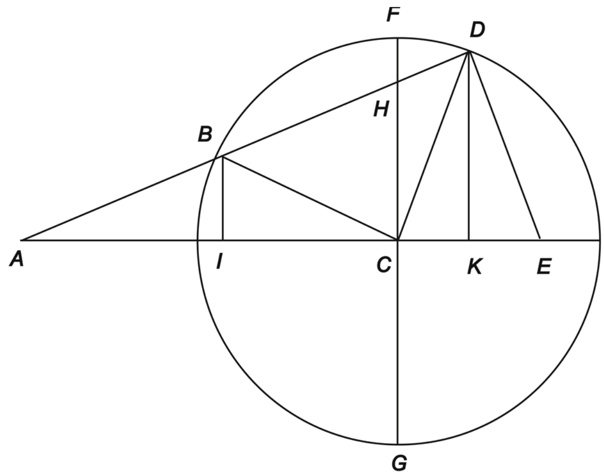

fig 11 Viètes propositie XVI

Bewijs: stellen we de gemeenschappelijke zijde van de driehoeken, dat is de straal van cirkel (C, CB), gelijk aan r en verder ook $AC = x$, $CE = b$ en $BD = y$.
We dienen dan aan te tonen, dat $x^3 - 3xr^2 = br^2$.
Nu is $AI = \frac{1}{2}x$ en $IK = \frac{1}{2}(x+b)$, zodat in driehoek AKD geldt $y : r = (x + b) : x$. En dus:

$$y = \frac{r(x+b)}{x} \Rightarrow ry = \frac{r^2(x+b)}{x} \qquad (9)$$

Zijn P en Q de eindpunten van de middellijn van de cirkel die door A gaat (ze staan niet in figuur 11), dan is:
$AP \cdot AQ = AB \cdot AD$
$(x + r) \cdot (x - r) = r(r + y)$
$x^2 - r^2 = r^2 + ry$
Met (9) vinden we hieruit:

$$x^2 - 2r^2 = \frac{r^2(x+b))}{x} \Rightarrow$$
$$x^3 - 3xr^2 = br^2 \qquad (10)$$

Hiermee is Eigenschap 1 bewezen. In driehoek AIB is $\cos a = \frac{x}{2r}$ en in driehoek CKD is $\cos 3a = \frac{b}{2r}$. Deling van

(10) door $2r^3$ geeft na enige herschrijving:

$$\frac{b}{2r} = 4\cdot\frac{x^3}{(2r)^3} - 3\cdot\frac{x}{2r}$$

Hierdoor is (10) equivalent met de bekende(?) gonioformule: $\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$.

In propositie XXIV van zijn *Opera* (pagina 255) construeert Viète dan de regelmatige zevenhoek. Dat doet hij op basis van enkele daaraan voorafgaande proposities, die in moderne zetting zijn samengevat in Eigenschap 2 (zie figuur 12).

Eigenschap 2: Gegeven is een cirkel met middelpunt O en middellijn AB met op het verlengde daarvan een punt H waarvoor geldt: $HB{\cdot}HA^2 = HO{\cdot}OA^2$

Is nu I een punt op de cirkel met $HI = OA$, dan is BI een zijde van een regelmatige zevenhoek.

Bewijs: zij Q het tweede snijpunt van de lijn HI met de cirkel. We zullen eerst aantonen dat $OQ \mathbin{//} AI$.

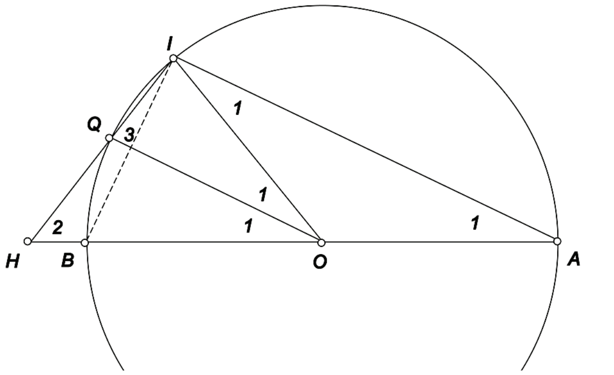

fig 12 Viètes propositie XXIV

Nu is:

$$HQ\cdot HI = HB\cdot HA \Rightarrow \frac{HQ}{HI} = \frac{HB\cdot HA}{HI^2} = \frac{HB\cdot HA^2}{OA^2\cdot HA} = \frac{HO}{HA}$$

Zodat inderdaad: $OQ \mathbin{//} AI$.

Stel nu $IAO = a$. Gemakkelijk is dan aan te tonen, dat de hoeken die in figuur 12 aangegeven zijn met 1, 2 en 3, opvolgend gelijk zijn aan a, $2a$ en $3a$. Zodat $IOA = 5a$ (buitenhoek van driehoek IOH). IOB is dan een middelpuntshoek van een regelmatige zevenhoek. BI is dan een zijde van die regelmatige zevenhoek. Waarmee Eigenschap 2 is aangetoond.

Bewijs van de constructie: In figuur 13 zijn de voor het bewijs relevante onderdelen uit figuur 10 overgenomen. Er zijn ook enkele punten en lijnstukken toegevoegd:

– het punt R is het midden van TA, het punt S is het midden van TR;
– driehoek TRC, een gelijkbenige driehoek.

We kiezen, teneinde de berekeningen eenvoudig te houden, $OA = 1$. Verder merken we op dat $HT = x$ en dat op basis van de constructie $OT = TR = \frac{1}{3}$.

Dan is:

– $CS = \frac{1}{3}\sqrt{3}$, immers CS is een hoogtelijn in de gelijkzijdige driehoek OCA;
– $TS = \frac{1}{6} \Rightarrow TC = \frac{1}{3}\sqrt{7}$.

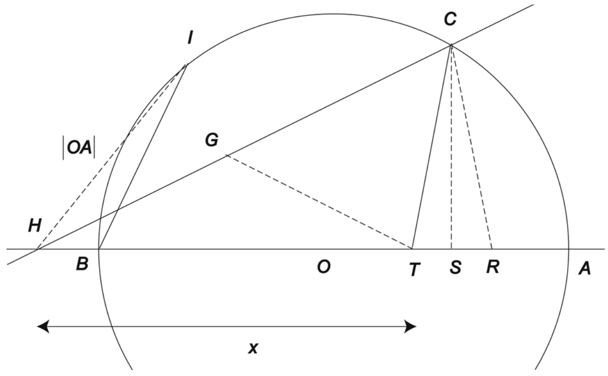

fig 13 De essentie van figuur 10

We herkennen vervolgens in figuur 13 in de driehoeken HTG en TRC een configuratie die overeenkomt met die van Eigenschap 1. Viètes vergelijking bij Eigenschap 1, zie relatie (10), gaat dan over in:

$$x^3 - 3\cdot\tfrac{7}{9}x = \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{7}{9}$$
$$x^3 - \tfrac{7}{3}x = \tfrac{7}{27}$$

Verder geeft dan $HB{\cdot}HA^2 = HO{\cdot}OA^2$(zie Eigenschap 2):

$$(x - 1\tfrac{1}{3})(x + \tfrac{2}{3})^2 = (x - \tfrac{1}{3})\cdot 1^2$$
$$(x - \tfrac{4}{3})(x^2 + \tfrac{4}{3}x + \tfrac{4}{9}) = x - \tfrac{1}{3}$$
$$x^3 - \tfrac{12}{9}x - \tfrac{16}{27} = x - \tfrac{9}{27}$$
$$x^3 - \tfrac{7}{3}x = \tfrac{7}{27}$$

De ligging van het punt H in de configuratie voldoet dus aan de eerste in Eigenschap 2 genoemde voorwaarde.

Met $HI = OA$, de tweede voorwaarde van Eigenschap 2, is dan BI een zijde van een regelmatige zevenhoek beschreven in de cirkel met straal OA.

Waarmee de juistheid van de constructie van figuur 10 is aangetoond...

Een tweede zevenhoek-constructie

In figuur 14 (links) is $AB = BC = CD = DE = EF = FG = GA = 1$, waarbij de puntenreeksen A, B, F, D en A, G, C, E elk collineair zijn. We kunnen gemakkelijk aantonen dat $\angle DAE = \frac{1}{7}\cdot 180° = h$, zodat DE een zijde is van een regelmatige zevenhoek waarvan het punt A één van de andere hoekpunten is. Figuur 14 (links) is door Abu'l-Jud Muhammad ibn al-Layth (ca. 1000, Iran?) gebruikt als uitgangspunt bij diens constructie van een regelmatige zevenhoek (zie Knorr, 1993, 181 – 187).

Ook geldt (zie figuur 14, rechts): $BE = \sqrt{2}$.

Bewijs: de driehoeken GAB en DEF zijn congruent (ze hebben onder meer dezelfde tophoek met grootte h), zodat: $BG = FD = a$.

Ook blijkt dat driehoek BFC gelijkbenig is met tophoek F ($FBC = 2h$ en $BCF = 2h$), zodat: $BF = FC = b$

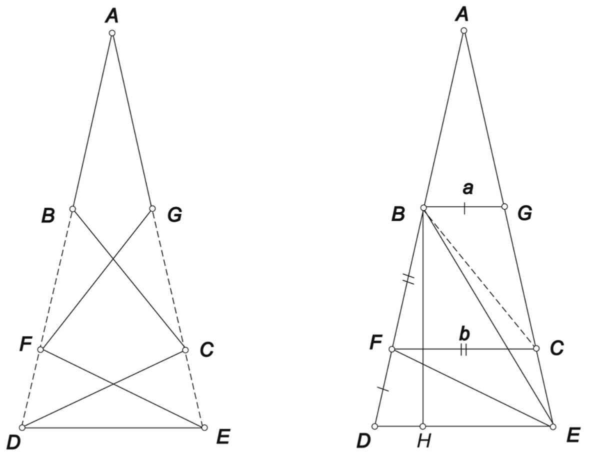

fig 14 Uitgangspunt van een zevenhoekconstructie

De driehoeken ABG, AFC, ADE zijn gelijkvormig, waaruit volgt dat:

$$\frac{1}{a} = \frac{1+b}{b} = \frac{1+a+b}{1}$$

De relaties $\frac{1}{a} = 1+a+b$ en $\frac{1+b}{b} = 1+a+b$ leiden dan tot: $a^2 + ab + a = 1$ en $b^2 + ab = 1$, en optelling daarvan:

$a^2 + b^2 + 2ab + a = 2$ (11)

Zij verder H het voetpunt van de loodlijn uit B op DE. Dan is $EH = 1 - \frac{1}{2}(1-a) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}a$ en $DH = 1 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}a) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}a$.

Passen we nu de stelling van Pythagoras toe in de driehoeken BEH en BDH, dan is: $BH^2 = BE^2 - EH^2 = BD^2 - DH^2$

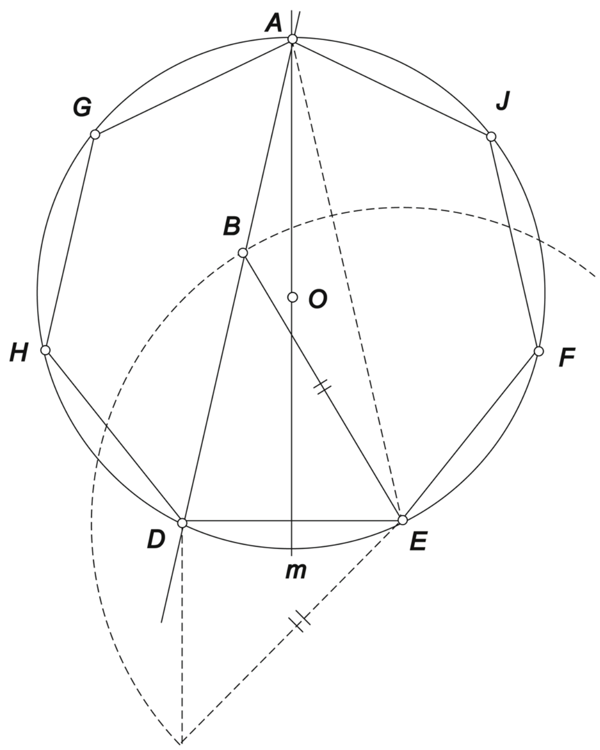

fig 15 Een zevenhoekconstructie

En dus:

$BE - (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}a)^2 = (a+b)^2 - (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}a)^2$

zodat

$BE^2 = a^2 + b^2 + 2ab + a$

Samen met (11) vinden we dan:

$BE^2 = 2 \Rightarrow BE = \sqrt{2}$

Het bovenstaande geeft nu een andere constructie van een regelmatige zevenhoek dan die in de vorige paragraaf is beschreven; zie figuur 15.

- Teken een lijnstuk DE met lengte 1; dit lijnstuk is dan een zijde van de gezochte regelmatige zevenhoek.
- Teken de cirkel met middelpunt E en straal $\sqrt{2}$. Op deze cirkel ligt het punt B (zie figuur 14, rechts).
- Teken de middelloodlijn m van het lijnstuk DE. Op deze lijn ligt het punt A, en wel zo, dat $AB = 1$.
- De lijn $D[BA]$ kan nu worden getekend met behulp van een gemerkte liniaal.
- Het middelpunt O van de omcirkel van de zevenhoek is dan het snijpunt van de lijn m en de middelloodlijn van het lijnstuk DA.

De andere hoekpunten van de zevenhoek kunnen verder op de gebruikelijke manier worden gevonden.

Naschrift

In het bovenstaande hebben we enkele ‘klassieke’ constructieproblemen behandeld, waarbij de constructieve methoden niet veel afwijken van de methoden die hun ontdekkers in het oude Griekenland (voor en na Euclides) hanteerden. De bewijsvoering is redelijk modern: we gebruikten letters: x, y, … voor onbekende grootheden, a, b, … voor bekende, en we legden relaties tussen die grootheden, en dit min of meer volgens de ‘meetkunde van Descartes’, de analytische meetkunde.

We hebben in dit artikel willen tonen, dat ook in de ‘oude meetkunde’ aanknopingspunten (en daarmee ook uitdagingen) kunnen liggen voor behandeling in ons huidige meetkundeonderwijs, en *zeker* binnen het nieuwe VWO-vak wiskunde D. We hopen dan ook dat dit artikel kan bijdragen aan de verdere ontwikkeling van dit nieuwe vak. En natuurlijk, een uitdaging voor leraren in deze zal zijn het bovenstaande om te zetten naar voor leerlingen hanteerbare lesstof (theorie, onderzoekopdracht, …).

Dick Klingens,
Alphen aan den Rijn

Noten

[1] Engels: ‘marked ruler’ of ‘marked straight edge’. In het Grieks spreekt men van een *neusis*constructie (aanpassing).

[2] Door Geminus (110-70 v. Chr. (?), Rhodos).

[3] Diocles beschouwde alleen het binnen de cirkel gelegen deel van de kromme. Gilles de Roberval (1622–1675, Frankrijk) en René de Sluze (1622–1685, Bel-