Geachte redactie...

Mag ik naar aanleiding van hetgeen Math Wielders schrijft op pagina 52 van de *Nieuwe Wiskrant*, jaargang 27 nummer 2, het volgende opmerken? Ik wil dat doen in navolging van Martin Kindt die op pagina 36 demonstreert hoe elementaire meetkunde in staat kan zijn ‘rekengeweld’ (van meer geavanceerde wiskunde) te vervangen.

Laat Λ een ellips zijn; noem zijn brandpunten F en G. Laat X een punt zijn van Λ; zeg Γ : = de cirkel met F als middelpunt en ($2a$: =)$|XF| + |XG|$ als straal. Noem de buitenbissectrice van $\angle$ FXG: x en spiegel G aan x: ‘G^x’.

Dan: $G^x \in \overrightarrow{FX}$ (: = de halve lijn die X bevat en F als uiteinde heeft); bovendien: $|FG^x| = |XF| + |XG| = 2a$; en dus: $G^x \in \overrightarrow{FX} \cap \Gamma$.

Merk op: voor elk punt Z van x dat niet X is: $|FZ| + |ZG| > 2a$; dus: x is de raaklijn te X van Λ.

Zeg: G_x:= de orthogonale projectie van G op x; merk op G_x = midden van $\{G, G^x\}$.
Laat $\{Y', G^x\}$ de doorsnede zijn van $\overleftrightarrow{GG^x}$ en Γ;
zeg: y: = de middelloodlijn van $\{G, Y'\}$, en

Y : = het snijpunt van y en $\overleftrightarrow{FY'}$.
Dan (zie figuur): $\gamma_2 = \eta = \xi = \gamma_1$, en dus:
GXFY is een parallellogram, terwijl $G_xF_xF_yG_y$ een omgeschreven rechthoek is van *GXFY*, en wel zo dat:

$$G \in \overleftrightarrow{G_yG_x} \parallel \overleftrightarrow{F_xF_y} \ni F \,;\; X \in \overleftrightarrow{G_xF_x} \parallel \overleftrightarrow{F_yG_y} \ni Y$$

en dus: $|FF_x| = |GG_x|$.

Conclusie:

$$|FF_x| \cdot |GG_x| = |GG_y| \cdot |GG_x| =$$

$$\frac{1}{4} \cdot |GY'| \cdot |GG^x| = \frac{1}{4} \cdot \text{de macht van } G \text{ t.o.v. } \Gamma$$

En dat geldt voor elk punt X van Λ (ook voor die twee punten X waarvoor *GFXY* een collineair parallellogram is).

Wie bereid is als vergelijking van Λ te nemen:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

vindt voor $|FF_x| \cdot |GG_x|$:

$$\frac{1}{4} \cdot 4 \cdot |a^2 - c^2| = a^2 - c^2 \text{ (= : b}^2\text{).}$$

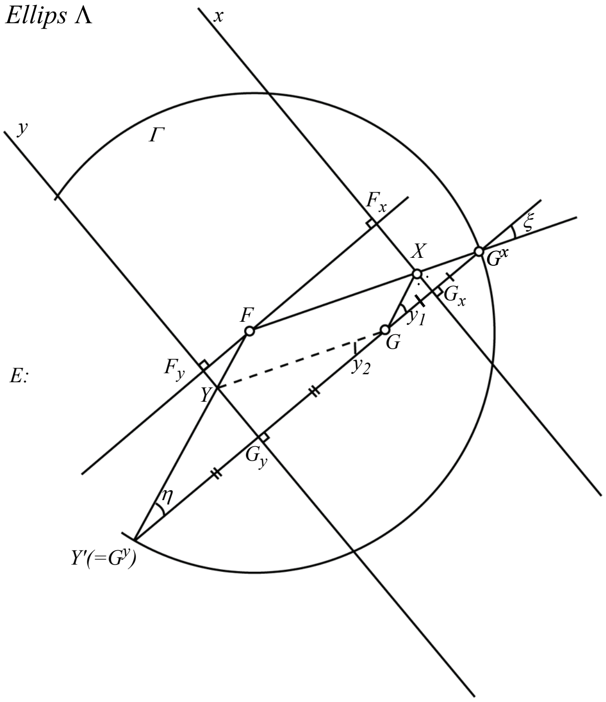
NB. Neem bij een hyperbool Φ (met F, G als brandpunten): $2a = ||XF| - |XG||$: x : = binnenbissectrice van $\angle$ FXG. U vindt dan:

$$|FF_x| = |GG_x| = \frac{1}{4} \cdot \text{ de macht van } G \text{ tegenover } \Gamma$$

$$(= (\frac{1}{4} \cdot 4 \cdot (c^2 - a^2) = b^2).$$

Louis Maassen,
Milsbeek

Ellips Λ



Hyperbool Φ